高考数学标准化题型训练手册

GAOKAO SHUXUEBIAOZHUNHUA TIXINGXUNLIANSHOUCE

辽宁教育出版社

高考数学标准化题型训练手册

（修订本）

高文生　吴振奎　侯华祥　编

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行

（沈阳市南京街6段1里2号）　朝阳新华印刷厂印刷

字数：250,000　开本：787×1092 1/32　印张：10

印数：1—4,412

1990年2月第1版　1990年2月第1次印刷

责任编辑：俞晓群　责任校对：杨　力

封面设计：谭成荫

ISBN 7-5382-0772-4/G·684

定　价：2.65元

再 版 前 言

感谢各方面的大力支持，使本书有机会再次和读者见面。在这次修订中，首先删去了原来的附加题型即微积分部分，并调整了函数、不等式和数列部分的内容，以求更加符合高考的要求。

继续欢迎读者对本书的缺点错误给予指正。

编　者

前言

分析近几年来（主要是1983—1988年）全国高等学校招生统一考试数学试题，可以发现一些规律性，正是基于这一点，我们编写了这本书。

近几年的试题，虽然每年具体题目变化很大，但主要题型的变化并不大，数学各单元所占的比例变化并不大，对考生能力的要求变化并不大。为便于考生复习与应试，我们认为了解和熟悉高考题型是十分必要的。

本书编写的宗旨是：依照近年来高考试题的内容，即在高考命题范围内举例和编选练习；高考中不做要求的部分（如概率、微积分和数理统计）不再选入；对高考中要求较少的部分（如体积面积计算）只编选部分基本题放到选择题或计算题中；对高考要求较高的部分（如不等式、数列、参数方程等）则有所侧重。在习题配置上，选入了一些函数（变量观点）类型题和一些讨论常数、参系数的类型题，以期在处理相应问题方面提高能力。

由于本书是为应试作准备的，所以凡现行教材中出现的概念、定理、公式和符号不再另加说明，另根据高考要求对超出教材的试题类型，适当地引进了一些概念和方法。

内容（各种类型题）排列的顺序是按照在高考试卷中出现的先后为依据。

编写本书只是作为一种尝试，至于效果如何，敬请读者评鉴。

由于我们水平有限，本书里面定有不少的缺点和错误，欢迎读者批评指正。

编　者

目　　录

第一题型　选择题

选择题涉及的内容广泛、知识覆盖面大，应用选择题可以全面考查知识掌握的深度和广度；选择题又具有较强的针对性，可以精确地考查在某一知识点上对基本概念的理解或基本运算的能力，所以近年来选择题在各类考试中被广泛采用。

在全国高考数学试题中，从1983年开始采用一部分选择题，并且分数从10分、15分一直升到1988年的45分。估计在今后的统一考试中，选择题所占比重不会减小，所以，了解选择题的题型和掌握选择题的特殊解法是很有必要的。

选择题大致可以分成两种类型：

正误型　在选择题所列各答案中，只有一个答案是正确的，其它都是错误的，这一类选择题，即所谓正误型选择题。现在，在高考数学试题中出现的选择题，均属这一类型，因此在以下的讨论中，我们也仅限于这一类型。

比较型　在选择题所列各答案中，有一个是最佳的，其余答案次之（但并没有原则错误），这类选择题即所谓比较型选择题。

另外，对选择题还有其它的分类方法。可以按各学科、各单元分类，还可以按概念、运算或推理分类。但由于这样的分类，对于解题的意义不大，所以我们只准备在解法方面略谈一下。

选择题出现较晚，题型新颖，所以在解法上也与传统题

有差别。以下，我们略举几例，简单叙述一下选择题的各种解法思路。为了便于掌握，我们将解法概括成以下三种。

一 直 接 法

这种解法是将选择题当作一般的练习，直接从条件出发，通过准确的运算，严密的推理，导出正确的结果，然后做出判断。这种方法又叫正推法，适用的范围广泛。当整个题目很简单或结论较复杂时，往往应用此法。

例1 如果$\log_{11}[\log_5(\log_3 x)]=0$，那么$x^{-\frac{1}{2}}$等于

（A）243；（B）1/243；（C）$\sqrt{3}/27$；（D）$9\sqrt{3}$。

解 由$\log_{11}[\log_5(\log_3 x)]=0\Longrightarrow\log_5(\log_3 x)=1$

$\Longrightarrow\log_3 x=5\Longrightarrow x=3^5$。

$\therefore\quad x^{-\frac{1}{2}}=1/\sqrt{243}=\sqrt{3}/27$。

故应选择（C）。

例2 若$T=\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$（$\alpha\neq k\pi/2$，$k\in Z$），那末

（A）T为负值； （B）T为非负值；

（C）T为正值； （D）T值可正可负。

解 $T=\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha(\cos\alpha+1)}{\cos^2\alpha(\sin\alpha+1)}$

由$\alpha\neq k\pi/2$（$k\in Z$），知$\sin^2\alpha$、$\cos^2\alpha$、$\cos\alpha+1$、$\sin\alpha+1$均为正数，从而T值为正。

故应选择（C）。

例3 若a、b、c均为正数，$x=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}$，则

x 的值一定是

（A）1/2；（B）-1；（C）1/2或-1；（D）3/2。

解 由等比定理， $x=\dfrac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\dfrac{1}{2}$，

故应选择（A）：

注 当去掉“a、b、c均为正数”这一条件时，如 $a=b=1$，$c=-2$，则结论应选（C），这时$a+b+c=0$不可应用等比定理，但这时有$a=-(b+c)$，$b=-(c+a)$，和$c=-(a+b)$。

当题目较复杂时，除了直接计算外，还需要较为详尽的讨论和分析。

例 4 数$A=3^{1001}\cdot 7^{1002}\cdot 13^{1003}$的个位数字是

（A）1；（B）3；（C）5；（D）7；（E）9。

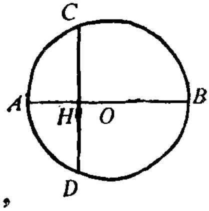
解 由具有相同底数的各次幂的个位数均呈现以 4 为周期的循环性，我们引入一个记号$R(k)$表示数 k 的个位数，以上性质就可以表示成 $R(k^{n+4})=R(k^{n})$，例如 $R(17^9)=$

$$R(17^5)=R(17)=7.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad R(A)&=R(3^{1001}\cdot 7^{1002}\cdot 13^{1003})\\&=R(3^{1001})\cdot R(7^{1002})\cdot R(13^{1003})\\&=R(3)\cdot R(7^2)\cdot R(3^3)=R(3\cdot 9\cdot 7)=9.\end{aligned}$$

故应选择（E）。

例 5 一个圆的直径AB的长是两位的（十进制）整数，将两位数字颠倒顺序便得到与AB垂直的弦CD的长，它们的交点H到圆心的距离是正有理数（如图），则AB的长是



（A）58；（B）65；（C）47；（D）89。

解 设AB的长为$10x+y$，HO的长为 z，

圆半径长为 r，则$10x+y=2r$，CD的长为$10y+x=2\sqrt{r^2-z^2}$，消去 r，得

$$(10y+x)^2=4(5x+y/2)^2-4z^2$$

$$4z^2=99(x^2-y^2)=3^2\cdot11\cdot(x+y)(x-y)$$

由$x+y$，$x-y$均为正整数，从而 $4z^2$ 是正整数，又 z 是有理数，从而$2z$应为正整数。

令 $x+y=11m$，　$x-y=m$　$(m\in N)$，解得 $x=6m$，$y=5m$，又x、y均为 1 位正整数，得$x=6$，$y=5$即 AB 的长为65。

故应选择（B）。

注　本例也可利用$AB>CD$，将几个答案两位数颠倒过来。从而直接选择（B）。

例 6　三个正整数a、b、c，满足条件：$a<b<c<30$；且以某一正整数为底，$a(2b-a)$与$c^2+60b-11a$的对数分别为 9 和11，则$a+c-2b$的值为

（A）4；　（B）2；　（C）0；　（D）-4。

解　设作底的正整数为 x，据题意

$$\log_x[a(2b-a)]=9,\quad x^9=a(2b-a) \qquad ①$$

$$\log_x(c^2+60b-11a)=11,\quad x^{11}=c^2+60b-11a \qquad ②$$

由$a<b<c<30$，知$b\leqslant28$，当$b=28$时，令 $y=a(2b-a)=-a^2+56a$，此时 y 最大值为784。再由①，若 $x>2$，取最小$x=3$，，有$3^9=19683$，显然 $x\neq3$，再根据对数定义，得 $x=2$。从而 $a(2b-a)=2^9=2^4\cdot2^5$，只能得出 $a=2^4=16$，$2b-a=2^5=32$，进一步解出$b=24$，$c=28$。

$\therefore$　$a+c-2b=-4$。

故应选择（D）。

例 7　当$k\in(0,1/2)$时，方程$\sqrt{|1-x|}=kx$的解的个

数是

（A）0；（B）1；（C）2；（D）3；（E）4。

解 由题设可知$x\geqslant 0$，将原方程变形，得

$$k^2x^2=|1-x|，即k^2x^2=1-x\ (x\leqslant 1) \quad ①$$

或 $k^2x^2=x-1\ (x>1)$ ②

①中有$\Delta>0$，且$x_1x_2<0$，有一正根，一负根；

②中有$\Delta>0$，且$x_1+x_2>0$，$x_1x_2>0$，有两正根。

据题意舍去负根，可得出三个正根。

故应选择（D）。

当题目的叙述较为生僻时，我们还可将原题条件适当转化。

例8 在空间四点中，无三点共线是无四点共面的

（A）充分必要条件；

（B）充分而不必要条件；

（C）必要而不充分条件；

（D）不充分且不必要条件。

解 将命题变成等价的逆否命题，即“四点共面是三点共线的什么条件？”显然是必要而不充分的条件。

故应选择（C）。

在某些情况下，依题意画出相应的图形，再根据有关的定理、性质去寻找正确的答案，是较为方便的。

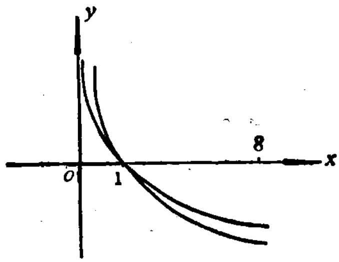
例9 已知$\log_m 8<\log_n 8<0$（m、n为不等于1的正数），则m、n应满足

（A）$1<n<m$；（B）$m<n<1$；

（C）$1<m<n$；（D）$n<m<1$。

解 由已知，真数大于1，且对数值为负，故m、n两数均小于1。

在同一直角坐标系内，任意取两条底数小于1的对数曲线，例如$y=\log_{0.1}x$和$y=\log_{0.5}x$，可明显看出当$x>1$时，底数较大的曲线在下方，即得出$m>n$。



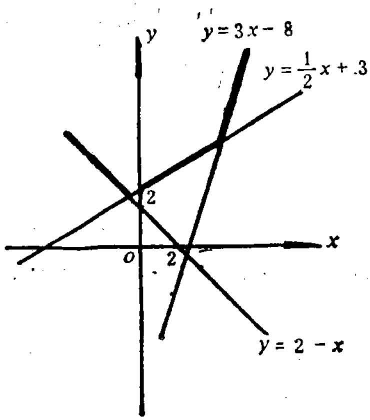
故应选择（D）。

注　利用特殊值取$\log_n 8=-1$，$\log_m 8=-3$，仍可得相同结论。

例10　若对于任何实数x，函数$f(x)$都是下列三个函数$2-x$，$0.5x+3$，$3x-8$的最大值，则$f(x)$的最小值为

（A）3/2；　（B）2/3；　（C）$-3/2$；　（D）8/3。

解　由$2-x$，$0.5x+3$，$3x-8$在直角坐标系中均表示直线（如图），符合题意的$f(x)$即组成一折线（图中粗线部分）。



从图中可以看出$f(x)$最小值应是直线$y=2-x$与$y=0.5x+3$交点纵坐标的值，即$y=8/3$。

故应选择（D）。

二　逆　推　法

例1　$\sqrt{7x-3}+\sqrt{x-1}=2$的解是

（A）$x=3$；　（B）$x=3/7$；　（C）$x=2$；

（D）$x=1$；　（E）$x=0$。

解　分别将3、3/7、2、1、0代入原方程，只有$x=1$适合原方程。

故应选择（D）。

例2　一凸多边形，除一个内角外，其余内角之和是2570°，则这个内角是

（A）90°；（B）105°；（C）120°；（D）130°；

（E）144°。

解　由于凸多边形内角和是180°的倍数，将以上各角分别与2570°求和，进行验证，容易得出仅有130°满足要求。

故应选择（D）。

例3　若$\sin x+\cos x=7/13$（$0\leqslant x\leqslant\pi$），则$\operatorname{tg}x$的值为

（A）5/12；　　（B）12/5；

（C）$-12/5$；　　（D）$-5/12$。

解　由于$0\leqslant x\leqslant\pi/2$时，有$1\leqslant\sin x+\cos x\leqslant\sqrt{2}$，故只需验证$\pi/2<x<\pi$（$\operatorname{tg}x<0$）时的答案（C）、（D），若$\operatorname{tg}x=-12/5$，，则$\sin x=12/13$，$\cos x=-5/13$，从而$\sin x+\cos x=7/13$。

故应选择（C）。

例4　满足等式$1983=1982x-1981y$的一组自然数是

（A）$x=12785$，$y=12768$；

（B）$x=12784$，$y=12770$；

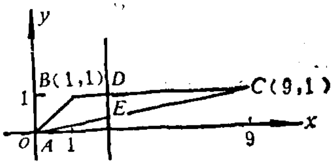
（C）$x=11888$，$y=11893$；

（D）$x=1984$，　$y=1987$。

解　注意本题特点，只需验证末位数，且只需验证y为奇数的两组。由$2\times8-3\times1=3$，$4\times2-7\times1=1$，故仅有（C）是正确的。

故应选择（C）。

例 5　一个三角形以(0,0),(1,1)及(9,1)为三个顶点，一条与 x 轴互相垂直的直线将三角形划分成面积相等的两部分，则该直线的方程为 $x=$



（A）2.5；（B）3.0；（C）3.5；（D）4.0；

（E）4.5。

解　首先画出图形，然后进行估计，$x=3.0$正确可能性较大，此时$S_{\triangle CDE}=(1/2)\times 6\times 2/3=2$，而$S_{\triangle ABC}=8\times 1/2=4$。

故应选择（B）。

例 6　当$a\neq b$，$a^3-b^3=19x^3$，并且$a-b=x$，以下结论哪个是正确的？

（A）$a=3x$；　（B）$a=3x$或$a=-2x$；

（C）$a=-3x$或$a=2x$；　（D）$a=3x$或$a=2x$；

（E）$a=2x$。

解　当$a=3x$时，$b=2x$，$a^3-b^3=19x^3$。但此时并不能断定（A）正确，因为（B）、（D）都包含$a=3x$，再验证$a=-2x$时，有$b=-3x$，仍满足$a^3-b^3=19x^3$。

故应选择（B）。

注　区分对待上面两例的情况，例 5 中几个结论互不相容；例 6 中几个结论有些是相容的，所以验证也不能一次完成。

例 7　两条直线l_1和l_2以直线$y=x$为对称轴，若直线l_1的方程是$y=ax+b$（$ab\neq 0$），那末直线l_2的方程是

（A）$y=x/a+b$；　（B）$y=ax+1/b$；

（C）$y=-(x+b)/a$；　（D）$y=(x+b)/a$；

（E）$y=(x-b)/a$。

解 在$y=ax+b$上取点$(0,b)$，它关于$y=x$的对称点为$(b,0)$，代入以上各答案，只有$y=(x-b)/a$适合。

故应选择（E）。

三 否 推 法

否推法即对所给的错误结论加以否定，从而作出正确的选择，这也是基于选择题的特点：有唯一正确的答案，所以在否定了错误答案后，剩下的一个就算是正确解答。根据命题定量和定性的差异，可分为分析否定与特例否定，可以一次否定几个答案，也可以分几次否定错误答案。

首先来看分析否定。

例1 如果凸n几边形$F(n\geqslant 4)$的所有对角线都相等，那末

（A）$F\in\{$四边形$\}$； （B）$F\in\{$五边形$\}$；

（C）$F\in\{$四边形$\}\cup\{$五边形$\}$；

（D）$F\in\{$等边多边形$\}\cup\{$等（内）角多边形$\}$。

解 由于所有对角线相等的凸多边形只有正方形、矩形、等腰梯形和正五边形，从而否定（A）、（B）、（D）。

故应选择（C）。

例2 与$\lg(\cos x-1)^2$相等的是

（A）$[\lg(\cos x-1)]^2$； （B）$2\lg(\cos x-1)$；

（C）$2\cos(\lg x)$； （D）$4\lg|\sin(x/2)|+2\lg 2$。

解 根据对数的真数大于零，可否定（A）、（B），又$\lg(\cos x-1)^2$与$2\cos(\lg x)$显然不等，可否定（C）。

故应选择（D）。

例3　对于任何$x\in(0,\pi/2)$，下列不等式成立的是

（A）$\sin\sin x<\cos x<\cos\cos x$；

（B）$\sin\sin x>\cos x>\cos\cos x$；

（C）$\sin\cos x>\cos x>\cos\sin x$；

（D）$\sin\cos x<\cos x<\cos\sin x$。

解　当x从0增至$\pi/2$时，$\cos x$从1递减到0，而$\sin x$从0递增到1，故$\sin\sin x$即不恒小于$\cos x$，也不恒大于$\cos x$，可否定（A）、（B），又当$x\in(0,\pi/2)$时，$\sin\cos x<\cos x$，从而（C）被否定。

故应选择（D）。

例4　若正数M的倒数的常用对数的首数为a，尾数为b（$b\neq0$），则M的常用对数是

（A）首数$-a$，尾数$-b$；

（B）首数$1-a$，尾数$-1-b$；

（C）首数$1/a$，尾数$1/b$；

（D）首数$-a-1$，尾数$1-b$。

解　由于对数的尾数必大于等于0且小于1，又由$b>0$，可有$-b<0$和$-1-b<0$，从而否定（A）、（B），又$1/b>1$可以否定（C）。

故应选择（D）。

例5　若a、b、c、d四数满足不等式：$abcd>0$，$a>c$，$abd<0$，$b+d<0$，那末

（A）$a>0$，$b>0$，$c>0$，$d>0$；

（B）$a<0$，$b<0$，$c<0$，$d<0$；

（C）$a>0$，$b<0$，$c>0$，$d>0$；

（D）$a<0$，$b>0$，$c<0$，$d>0$；

（E）$a>0$，$b<0$，$c<0$，$d<0$。