高等教育精品教材

工程应用软计算

GONGCHENG YINGYONG RUANJISUAN

郭嗣琮 主编

中国矿业大学出版社

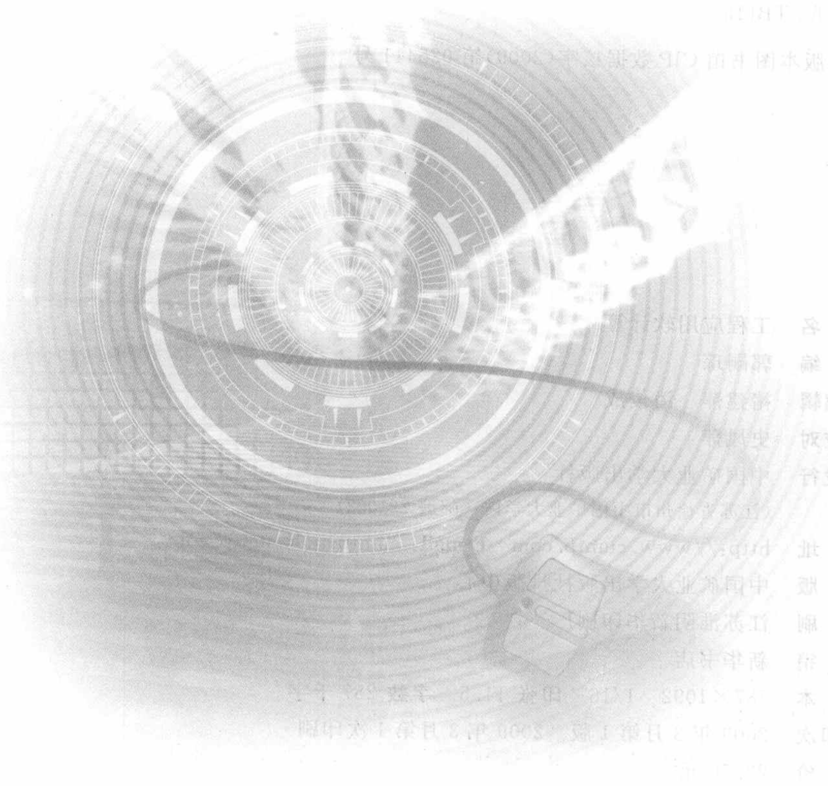
China University of Mining and Technology Press

高等教育精品教材

工程应用软计算

GONGCHENG YINGYONG RUANJISUAN

郭嗣琮 主编



中国矿业大学出版社

China University of Mining and Technology Press

内容简介

本书主要介绍工程应用中常用的软计算方法，包括模糊数学、人工神经网络、遗传算法、分形几何与混沌理论。书中特别注意这些方法的实际应用，并列举了大量工程应用的实例。本书适用于高等院校非数学专业的本科生及专科生作为学习软计算方法的选修课教材，同时也可作为数学基础相对较弱的工程技术人员学习了解软计算方法的入门教材。

图书在版编目(CIP)数据

工程应用软计算/郭嗣琮主编. —徐州：中国矿业大学出版社，2009.3

ISBN 978-7-5646-0281-9

Ⅰ.工… Ⅱ.郭… Ⅲ.工程计算—计算方法—高等学校—教材 Ⅳ.TB115

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 025411 号

书　　名　工程应用软计算

主　　编　郭嗣琮

责任编辑　褚建萍　潘俊成

责任校对　史凤萍

出版发行　中国矿业大学出版社

（江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编 221008）

网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**：cumtpvip@cumtp.com

排　　版　中国矿业大学出版社排版中心

印　　刷　江苏淮阴新华印刷厂

经　　销　新华书店

开　　本　787×1092　1/16　**印张** 11.5　**字数** 287 千字

版次印次　2009 年 3 月第 1 版　2009 年 3 月第 1 次印刷

定　　价　23.50 元

前 言

软计算是近几十年来随着信息科学的发展而逐渐发展起来的新兴的应用数学学科。

众所周知，数学是工程物理、力学、电子、电气、机械、材料等学科的基础性工具。被普遍应用的经典数学方法，包括数学物理方法、运筹学方法、数理统计方法以及近些年发展起来的各种非线性数学方法等，无不与三百年来逐步发展起来的以微积分理论为主线的数学分析相联系。因此，微积分及严谨的极限理论基础已经成为现代基础数学的主要分析工具。随着人们对自然科学研究的深化，尤其是信息科学的发展，将数学作为科学分析、计算的工具，有两个重大矛盾问题已经展现在我们面前。

一是牛顿数学的连续动力学系统假设与自然界中面临复杂系统的非连续动力学性质的矛盾。在大量工程实践问题研究中，人们习惯采用以牛顿建立的分析数学为计算工具，而牛顿的分析数学基础是建立在连续动力学系统假设之上的，而无论在大的岩石力学系统还是在小的纳米结构中，介质的连续性都不存在（或者说，在现实的世界中，除了时间和空间具有连续性质外，似乎没有任何实体物质结构是连续的）。因此，在这些领域里运用牛顿数学方法的合理性受到怀疑。

另一个是数学的结构性与信息科学中广泛存在的非结构性问题的矛盾。自然界提供给我们的信息处理问题大致可分为两类，即结构性问题和非结构性问题。所谓结构性问题是指可以用数学语言严格描述，将要解决的问题算法公式化，并可以写成计算机程序，由计算机按程序执行的问题。通俗地说，此类问题可以建立起传统意义的数学模型；非结构性问题是指人知道怎样处理，但无法用数学语言描述，并有大量的范例可供学习，结论可以通过人的联想推理得出。非结构性的例子有图像处理、语言理解、景物识别、思维判断、联想推理、知识学习等。

非结构问题主要出现在信息科学领域，非结构问题的结构化是信息时代的实践为数学发展提出的新需求。这种需求导致"软计算"的崛起。为了处理信息科学中的技术问题，如自然语言的理解、图像的识别、知识的表述与推理以及在各种不确定现象中对事物的处理，人们先后提出了模糊集合理论、人工神经网络技术、遗传算法、分形几何、混沌理论、数学形态学、粗糙集理论等全新的数学概念与方法体系。由于这些数学方法不是以严格的极限分析为基础的，故称之为软计算方法。软计算的概念是 20 世纪 90 年代初由模糊集合理论创始人查德（L. A. Zadeh）教授提出来的，并在信息与工程科学的许多领域得到了普遍的应用和高速的发展。

相对于软计算概念，我们将传统计算称之为硬计算，它的主要特征是严格、确定和精确，它只能处理结构性的事物。而软计算则是建立一种近似有效而非精确解释的计算方法，它

通过对不确定、不精确及不完全真值的容错以取得低代价的解决方案和鲁棒性。也可以说，它是对传统的非结构性问题进行结构化的过程。如模糊数学，给出了人类语言交流中模糊概念的集合刻画方法，进而可以建立起自然语言的数学模型、思维推理模型；人工神经网络的应用中，无需清楚地知道研究对象的数学形式，只要掌握系统的输入、输出方式，就可以建立起网络意义下的对象模型；利用遗传算法进行优化计算时，也可以无需了解对象的数学结构，只要能够对研究对象状态进行观测就可以寻找问题的最优解，等等。与传统的硬计算相比，软计算方法不失为一种解决复杂问题的新方法。同时，软计算也是对传统人工智能算法的扩充，传统的人工智能加上软计算就可成为智能计算。

2001 年，我们编写了《信息科学中的软计算方法》一书，并将其作为信息与计算科学本科专业的专业课教材，同时也作为工科专业硕士研究生的教材。由于软计算方法在许多工程与管理领域得到越来越广泛的应用，逐渐发展成为一门实用的工程数学分支，从 2006 年开始作为全校各本科专业学生应用数学知识扩展的选修课程。考虑到不同专业本科生的数学基础知识结构，我们在原有的《信息科学中的软计算方法》一书的基础上，重新编写了这本教材。编写中除了注意到本书作为非数学专业本科生的选修课教材，还希望它能成为数学基础较弱的工程技术人员学习了解软计算方法的入门书。因此，这本书在《信息科学中的软计算方法》一书的框架基础上作了如下的改变：

(1) 本书仍然分为模糊数学、神经网络、遗传算法、分形几何、混沌理论五章，但是对每章的内容作了较大的删减，重点保留了应用领域较宽、方法比较成熟、数学基础相对较弱的实用技术部分。以便于读者不用涉及任何较深刻的数学知识，就可以很容易地看懂这些方法与原理。

(2) 为了使读者能够学以致用，每章中都补充了较多的应用实例，这些实例均取自国内外学者公开发表的应用性论文。读者通过阅读这些应用实例，既可以加深理解书中介绍的相关数学原理，同时也可以掌握这些原理、方法的运用技巧，提高读者应用所学到的数学理论方法解决工程实际问题的能力。

(3) 由于大多数软计算方法都要依靠计算机程序来实现，尤其是具有强大计算功能的数学软件 Matlab 已经具有模糊逻辑、神经网络以及遗传算法工具箱，为了便于学生运用软计算方法解决实际问题，本书补充了相关的工具箱函数。

在教材编写中，由郭嗣琮教授制定教材编写提纲，通过集体讨论后，由王磊(第一章)、曾繁慧(第二章)、魏林(第三章)、刘威(第四章)、胡行华(第五章)分别撰写各章初稿，最后由郭嗣琮进行修改和统稿，并补充了应用实例和部分章节。本书引用了许多作者的应用成果，在此向他们一并表示致谢。同时，感谢辽宁工程技术大学教务处处长沈玉志教授对本教材编写和出版所给予的关心和支持。

作者　谨识

2009 年元旦

目　录

第一章
模糊数学

第一节 模糊集合与运算

模糊数学是研究和处理自然界与信息技术中广泛存在的模糊现象的数学理论。它的产生既反映了信息革命的迫切需要，也为信息科学提供了一种新的有力的数学工具。自从美国著名控制论专家查德(L. A. Zadeh)教授于 1965 年发表《模糊集合》论文并建立模糊集合论以来，模糊数学从理论到应用、从软技术到硬技术都取得了飞跃性的发展，已在人工智能、信息处理、专家系统、数据挖掘与知识发现、模式识别、图像处理、自动控制、机器人技术、预测与决策、社会学、经济学、心理学、管理科学、教育学、运筹学等众多领域获得了广泛而成功的应用，人们认为它是智能数学的雏形。

一、概念与集

人类在长期的社会生产实践中逐渐形成了以自然语言为载体的信息交流(包括接收、存储、加工和传递)方式。

语言信息的单位是语词(或单词)，它在语言信息传递中表达概念。概念是客观事物在人脑中抽象概括的反映，是借助语词来表达的(当然，也可以利用“肢体语言”来表达概念)。语词是概念的载体，人类的自然语言的交流本质上是概念的传递。人们对于以语言表达方式的信息处理，主要是对语言信息中所表达的概念(而不是语词本身)进行处理。

如何让计算机理解人的自然语言(包括由语音或文字所表达的语言)，是智能信息处理技术研究的一项重要任务。理解人的自然语言，除了对语言文法、语义做出正确分析外，最根本的是能够正确理解语言所表达的概念。那么，如何才能使计算机表示和理解概念呢？

概念具有内涵和外延，概念的内涵是指概念对事物的特有属性的反映，我们还找不到一种能让计算机正确理解概念内涵的方法。而概念的外延是指具有概念所反映的那些对象全体，它是特有对象的集合。如果用概念外延构成的集合来表示这个概念，那么，计算机就可以很容易地理解和表示概念。

本书假定读者已经具备了经典集合论的初步知识。但是，为了能使读者顺利地理解模糊集合概念，我们还是简单地回顾一下经典集合论的一些相关知识。

在讨论某些具体问题时，需要先把所涉及的对象范围确定下来，把被讨论的对象全体称为论域。例如，我们讨论学生的某门课程成绩，可以将分数确定在 0，1，2，…，100 范围内，用集合表示 $X=\{0,1,2,\cdots,100\}$。

设 X 是一论域，X 中部分元素组成的集合称为 X 的子集合（简称子集），X 的全体子集构成一个集合族，称为 X 的幂集，记为 $\mathscr{P}(X)$。

集合可以表示概念。例如，取论域 $X=\{0,1,2,\cdots,100\}$ 为考试成绩的分数集合，则成绩"优秀"概念可由集合 $A=\{90,91,\cdots,100\}$ 表示；"良好"概念可由集合 $B=\{80,81,\cdots,89\}$ 表示；"中等"概念可由集合 $C=\{70,71,\cdots,79\}$ 表示；"及格"概念可由集合 $D=\{60,61,\cdots,69\}$ 表示；而集合 $E=\{0,1,2,\cdots,59\}$ 则表示"不及格"这一概念。

论域 X 有两个特殊的子集合，即 X 自身和空集 $\varnothing$。在表示概念上，空集表示虚概念。

设 A,B 是 X 的任意两个子集，记 $A,B\in\mathscr{P}(X)$，$A\cup B$，$A\cap B$，A^C 分别表示 A 和 B 的并集、交集和 A 的余（补）集，有

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$
$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$
$$A^C=\{x\mid x\overline{\in}A\}$$

如果 A,B 表示两个概念，对于给定的某一对象 x，若有 $x\in A$，则对象 x 满足概念 A。比如，X 是年龄论域，X 的子集 A 表示"老年人"的概念，不妨设 $A=\{60,61,\cdots\}$（年龄）。设某人的年龄为 x，如果 $x\in A$，则该人的年龄符合老年人的概念，即该人为老年人；如果 $x\overline{\in}A$，则该人不属于老年人。由此，我们不难理解集合运算的概念表现。$A\cup B$ 表示概念"A 或 B"；$A\cap B$ 表示概念"A 且 B"；A^C 表示概念"非 A"。例如，

若 A 表示"中年人"，B 表示"青年人"，则 $A\cup B$ 表示"中青年人"；

若 A 表示"白色"，B 表示"马"，则 $A\cap B$ 表示"白马"；

若 A 表示"金属"概念，则 A^C 表示"非金属"概念。

下面引入集合的特征函数。

设 $A\in\mathscr{P}(X)$，称 X 到 $\{0,1\}$ 的映射

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, x\in A\\ 0, x\overline{\in}A\end{cases}\tag{1-1}$$

为集合 A 的特征函数。

对于任意的 $x\in X$，特征函数 $\chi_A(x)$ 表明了元素 x 属于集合 A 的"程度"。在经典集合论中规定，x 属于或不属于 A 是绝对明确的，因此用 0 和 1 二值表示对象 x 属于 A 的仅有的两种极端性"程度"。如果集合 A 表示某一概念，那么，$\chi_A(x)$ 则表示 x 是否满足概念 A 的真实程度，1 表示为"真"，0 表示为"假"。

一个集合 A 可以由特征函数 $\chi_A(x)$ 唯一确定，反之亦然。进而，集合间的关系与运算也可以由特征函数来表示。

设 $A,B\in\mathscr{P}(X)$，特征函数分别为 $\chi_A(x)$ 和 $\chi_B(x)$。

（1）若 $A\subseteq B$，则 $\forall x\in A\Rightarrow x\in B$，即 $\chi_A(x)=1\Rightarrow\chi_B(x)=1$。所以

$$A\subseteq B\Leftrightarrow\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x), \forall x\in X\tag{1-2}$$

（2）若 $A=B$，则 $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$，即 $\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$ 且 $\chi_B(x)\leqslant\chi_A(x)$。所以

$$A=B\Leftrightarrow\chi_A(x)=\chi_B(x), \forall x\in X\tag{1-3}$$

（3）由 $A\cup B$ 的定义知：

若 $x\in A$ 且 $x\in B$，则 $x\in A\cup B$，即 $\chi_A(x)=1$ 且 $\chi_B(x)=1$，则有 $\chi_{A\cup B}(x)=1$；

若 $x\in A$ 且 $x\overline{\in}B$,则 $x\in A\cup B$,即 $\chi_A(x)=1$ 且 $\chi_B(x)=0$,则有 $\chi_{A\cup B}(x)=1$;
若 $x\overline{\in}A$ 且 $x\in B$,则 $x\in A\cup B$,即 $\chi_A(x)=0$ 且 $\chi_B(x)=1$,则有 $\chi_{A\cup B}(x)=1$;
若 $x\overline{\in}A$ 且 $x\overline{\in}B$,则 $x\overline{\in}A\cup B$,即 $\chi_A(x)=0$ 且 $\chi_B(x)=0$,则有 $\chi_{A\cup B}(x)=0$。
综上可取

$$\begin{aligned}\chi_{A\cup B}(x) &= \max\{\chi_A(x),\chi_B(x)\}\\ &\triangleq \chi_A(x)\vee\chi_B(x),\forall x\in X\end{aligned}\tag{1-4}$$

(4) 由 $A\cap B$ 的定义知:
若 $x\in A$ 且 $x\in B$,则 $x\in A\cap B$,即 $\chi_A(x)=1$ 且 $\chi_B(x)=1$,则有 $\chi_{A\cap B}(x)=1$;
若 $x\in A$ 且 $x\overline{\in}B$,则 $x\overline{\in}A\cap B$,即 $\chi_A(x)=1$ 且 $\chi_B(x)=0$,则有 $\chi_{A\cap B}(x)=0$;
若 $x\overline{\in}A$ 且 $x\in B$,则 $x\overline{\in}A\cap B$,即 $\chi_A(x)=0$ 且 $\chi_B(x)=1$,则有 $\chi_{A\cap B}(x)=0$;
若 $x\overline{\in}A$ 且 $x\overline{\in}B$,则 $x\overline{\in}A\cap B$,即 $\chi_A(x)=0$ 且 $\chi_B(x)=0$,则有 $\chi_{A\cap B}(x)=0$。
综上可取

$$\begin{aligned}\chi_{A\cap B}(x) &= \min\{\chi_A(x),\chi_B(x)\}\\ &\triangleq \chi_A(x)\wedge\chi_B(x),\forall x\in X\end{aligned}\tag{1-5}$$

(5) 由 A^C 的定义知:若 $x\in A$,则 $x\overline{\in}A^C$,即 $\chi_A(x)=1$,则 $\chi_{A^C}(x)=0$;
若 $x\overline{\in}A$,则 $x\in A^C$,即 $\chi_A(x)=0$,则 $\chi_{A^C}(x)=1$;
综上可取

$$\chi_{A^C}(x) = 1-\chi_A(x),\forall x\in X\tag{1-6}$$

在前面的公式中,符号"$\vee$"和"$\wedge$"分别表示"取大"和"取小"运算,即对任意 $\forall\alpha,\beta\in\{0,1\}$,有

$$\alpha\vee\beta=\max\{\alpha,\beta\},\alpha\wedge\beta=\min\{\alpha,\beta\}$$

对于 $\forall A,B,C\in\mathscr{P}(X)$,集合的并、交、余运算具有如下的性质:

(1) 幂等律 $A\cup A=A,A\cap A=A$

(2) 交换律 $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$

(3) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

(4) 吸收律 $A\cup(A\cap B)=A,A\cap(A\cup B)=A$

(5) 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(6) 0—1 律 $A\cup\varnothing=A,A\cap X=A$

$A\cap\varnothing=\varnothing,A\cup X=X$

(7) 复原律 $(A^C)^C=A$

(8) 互补律 $A\cup A^C=X,A\cap A^C=\varnothing$

(9) 对偶律 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$

$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

二、模糊概念与模糊集合

人类在利用语言进行信息交流中,力图用尽量少的语词表达尽量多的信息,因而产生了

一个语词多种含义或概念的外延丰富的现象，以至于许多语词所表达的概念的外延变得不清晰。另一方面，概念产生于人对自然界的认识过程，概念的形成是人对自然对象的一种划分，这种划分是以复杂事物间存在的某种共性为基础的。许多概念所反映的对象是一个具有某种属性的事物类，而忽略了某些事物间的细微差异。这种概念尽管其外延不清晰，但是所含信息量却更为丰富。例如，"年轻人"就是这样的概念，我们无法用精确的集合将"年轻人"应具有的所有年龄表示出来。又如，人们经常用"绵绵细雨"和"倾盆大雨"来形容雨的大小，但是，我们无法用一个精确的尺度来区分这两个概念，也就是说，不能找到一个精确的降水量值，使得实际降水量小于该值就判定为"绵绵细雨"，否则为"倾盆大雨"。因此，这些概念的外延不明确。

我们称外延不明确的概念为模糊概念。

在人的语言信息交流中，模糊概念比比皆是，如"年轻"、"年老"、"高个子"、"大雨"、"很快"、"比较凉爽"等，都是模糊概念。人在语言交流中频繁而灵活地使用这些概念，形成了人类独特的信息传递和信息处理方式，高效而又可靠，表明人类大脑具有很强的模糊思维和模糊推理的能力。

人们把计算机看成是人脑的延伸，并称其为电脑。事实上，计算机在计算速度、精度和数据存储方面具有人无法与之媲美的卓越性能，但是在模糊性语言信息理解与处理方面，其能力远不及一个婴儿，这是因为计算机处理问题必须依赖一种明确的数学结构。要使计算机在模糊信息处理问题上有所突破，就必须对模糊语言表现的模糊概念有一个结构性（数学性）的刻画。

经典集合可以表示明确概念而不能表现模糊概念，那么，如何用数学手段刻画模糊概念呢？

在经典集合论中，论域 X 的子集 A 可由其特征函数 $\chi_A(x)$ 唯一确定，$\chi_A(x)$ 指明了 X 上的每个元素 x 对 A 的隶属程度，不过，隶属程度只有 0 和 1 两种极端情况，代表"是"与"非"的判断。而模糊概念的外延不明确，因此不能简单地用"是"或"非"来判断对象 x 与概念 A 的隶属关系。下面举一个有趣的例子来说明这个问题。

我们称没有头发的人为秃子，只有一根头发的人当然也称为秃子，这是因为一发之差不能引起秃与不秃的变化。假设有 n 根头发的人为秃子，那么有 $n+1$ 根头发的人自然也一定是秃子。于是，依照数学归纳法，人类的头发都是有限的，所以，全世界的人都是秃子。

上述悖论产生的原因在于"秃子"是一个不能用经典集合表现的模糊概念，对于给定的头发根数 n，不能简单地用"是"或"非"二值逻辑来进行判断，因而传统的数学归纳法也就失效了。

如何利用集合来表现模糊概念呢？一个很自然的想法是把元素对于集合的隶属程度从 $\{0,1\}$ 两种情况扩展到 $[0,1]$ 实数区间的无穷多值情况。我们用 $\mu_A(x)\in[0,1]$ 来表示 X 的元素 x 隶属于集合 A 的程度。例如，我们认为 20 岁的人绝对是"年轻人"，即认为 20 岁隶属于年轻人的程度是 1；而 30 岁的人不能绝对地认为是年轻人，但也不能绝对地认为不是年轻人，为此引入 $[0,1]$ 间的一个数，比如 0.8，则 30 岁的人隶属于年轻人的程度是 0.8。又如对于集合 A 及元素 x_1，x_2，若 $\mu_A(x_1)=0.8$，$\mu_A(x_2)=0.5$，则表明 x_1 比 x_2 更属于 A。于是，我们可以给出模糊集合的定义。为了区分经典集合与模糊集合，我们用 $\underset{\sim}{A}$ 表示一个模糊集合，而用 A 表示一个经典集合。

定义 1-1 论域 X 的一个模糊子集$\underset{\sim}{A}$是指 X 到$[0,1]$的一个映射：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}: X \to [0,1]$$

映射 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$称为$\underset{\sim}{A}$的隶属函数，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$表示元素 x 属于集合$\underset{\sim}{A}$的程度，或称为 x 对$\underset{\sim}{A}$的隶属度。

当 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$仅取 0,1 二值时，$\underset{\sim}{A}$是 X 的经典子集，此时，$\mu_{\underset{\sim}{A}}$就是$\underset{\sim}{A}$的特征函数。所以，经典集合是模糊集合的特例。

论域 X 的所有模糊子集全体记为 $\mathscr{F}(X)$，称为 X 的模糊幂集。不难看出，有：

$$\mathscr{P}(X) \subseteq \mathscr{F}(X)$$

我们熟知，具有有限元素或具有可数无限元素的集合可以用列举方法

$$A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

表示，这里 A 是集合，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为集合的元素。对于具有不可数无限元素的集合可以用特征法

$$A = \{x \mid x \text{ 满足的性质}\}$$

表示，这里 x 是集合元素的一般符号。

由于模糊集合与元素的关系不能用属于或不属于来表示，所以，上述两种方法都不能用来表示模糊集。下面给出模糊集合的表示方法。

当 X 是有限论域 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$时，$X$ 的模糊子集一般可以用下述三种方法表示：

(1) Zadeh 表示法

$$\underset{\sim}{A} = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1)/x_1 + \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2)/x_2 + \cdots + \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_n)/x_n \tag{1-7}$$

其中“+”不表示求和符号，而是表示论域 X 上的元素 x_i 与其隶属度 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)$对应关系的一个总括。

(2) 有序对表示法

将论域中的元素 x_i 与其隶属度 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)$构成序偶来表示，即

$$\underset{\sim}{A} = \{(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1), x_1), (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2), x_2), \cdots, (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_n), x_n)\} \tag{1-8}$$

(3) 向量表示法

$$\underset{\sim}{A} = (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1), \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2), \cdots, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_n)) \tag{1-9}$$

例如，论域 X 为掷一颗骰子观察的点数，有 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$，集合$\underset{\sim}{A}$表示“较大的点数”，则可记

$$\underset{\sim}{A} = 0/1 + 0/2 + 0.2/3 + 0.6/4 + 1/5 + 1/6$$

或

$$\underset{\sim}{A} = \{(0,1), (0,2), (0.2,3), (0.6,4), (1,5), (1,6)\};$$

或

$$\underset{\sim}{A} = (0, 0, 0.2, 0.6, 1, 1)$$

从上例中可以看出，在向量表示法中，每个“分量”必须对应论域上固定的元素。

当论域 X 是不可数集合时，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$是$\underset{\sim}{A}$的隶属度函数，则 Zadeh 表示法为

$$\underset{\sim}{A} = \int_{x \in X} \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)/x \tag{1-10}$$

这里的积分符号也不是通常积分的意义，仅表示每个元素与隶属度对应关系的总括。

例 1-1 取论域 X 为正实数集合，$\underset{\sim}{A}$为“比 0 大得多的实数”的模糊集，$\underset{\sim}{A}$的隶属函数可以写成：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ (1+100x^{-2})^{-1} & x>0\end{cases}$$

其隶属函数的图形如图 1-1 所示。

例 1-2 以年龄作论域，取 $X=[0,100]$，“年老”与“年轻”这两个模糊概念可分别用两个模糊集合$\underset{\sim}{O}$与$\underset{\sim}{Y}$来表示，它们的隶属函数分别为：

$$\mu_{\underset{\sim}{O}}(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 50<x\leqslant 100\end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{Y}}(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & 25<x\leqslant 100\end{cases}$$

它们的隶属函数图形见图 1-2。

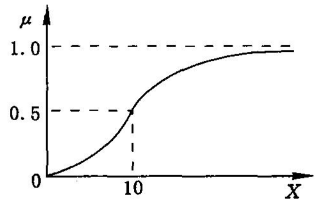


图 1-1 隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$图形

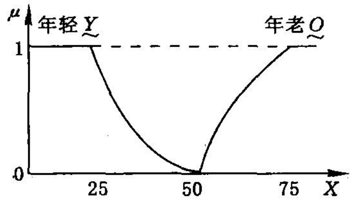


图 1-2 隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{Y}}(x)$和 $\mu_{\underset{\sim}{O}}(x)$的图形

初学者一定会问：模糊集合的隶属函数应该如何确定？围绕这个问题，人们曾作了许多研究，并提出了隶属函数的统计估计方法。事实上，隶属函数确定的最常用方法就是人为估计，而这也成了最初模糊集合论遭到最猛烈批评的原因之一。在很多人的意识中都存在着数学的精确性观念，有人批评模糊集合隶属函数由人为估计的做法是“用模糊来描述模糊，岂不是更模糊”。但是，我们反过来想，如果用一个经典集合[0,x]表示“年轻人”概念，那么年龄 x 应该取什么值？是 25,26 还是 27？你如果非要用一个明确的实数来表示，难道没有主观性吗？这说明，即使是用经典集合来表现模糊概念的话，这个集合也要靠人为估计。另外还有一个重要的逻辑问题：如果一个模糊集合的隶属函数是一个精确的表达式，那么它还能是模糊的集合吗？

模糊集合隶属函数的人为估计不是数学的倒退，而是人的经验表达。在人工智能问题中，人的经验表达是信息处理、控制与决策、推理的重要依据。在医疗诊断、市场分析、军事指挥、故障处理等诸多领域中，人的经验起着决定性作用，在那些依赖思维的科学中，经验与统计数据一样是重要的信息资源。从这个意义上讲，模糊数学是一种表达人类经验的数学方法，是数学的一个进步。

三、模糊集合的运算

设$\underset{\sim}{A}$,$\underset{\sim}{B}$是论域 X 的模糊子集，可以定义模糊集的并集、交集和余集。事实上，这些运算的定义是不唯一的。但是，由于模糊集合是经典集合的拓广，经典集合是模糊集合的特例，即当隶属函数的取值域从[0,1]蜕化到{0,1}时，模糊集蜕化为普通集。因此，模糊集的并、交、余运算必须满足当隶属函数仅取 0,1 值时，其定义应该与普通集相应运算定义是完全一

致的。

下面的定义是 Zadeh 给出的，它直接利用了式(1-2)～式(1-6)的定义，只是用隶属函数替换了特征函数。

定义 1-2 设$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$是论域 X 的模糊子集，隶属函数分别为 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$和 $\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$，则模糊集合的相等、包含关系及并集、交集、余集表示为：

$$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\qquad\forall x\in X\tag{1-11}$$

$$\underset{\sim}{A}\supseteq\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\geqslant\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\qquad\forall x\in X\tag{1-12}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\vee\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\qquad\forall x\in X\tag{1-13}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\wedge\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\qquad\forall x\in X\tag{1-14}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}^C}(x)=1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\qquad\forall x\in X\tag{1-15}$$

模糊集的并集、交集、余集隶属函数如图 1-3 所示。

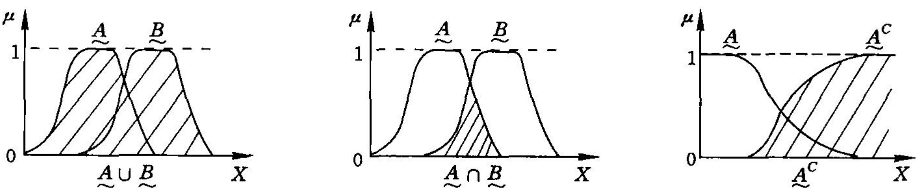


图 1-3 模糊集合$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$的并集、交集、$\underset{\sim}{A}$补集图形

容易证明，在普通集合并、交、余运算所满足的性质(1)～(9)中，除了性质(8)以外，其余的八个性质对于模糊集合均成立，即对于$\forall\,\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(X)$，一般地，有：

$$\underset{\sim}{A}^C\cup\underset{\sim}{A}\neq X,\underset{\sim}{A}^C\cap\underset{\sim}{A}\neq\varnothing$$

即对于模糊集合而言，互补律一般不成立。这一性质从图 1-4 中可以直接看出。

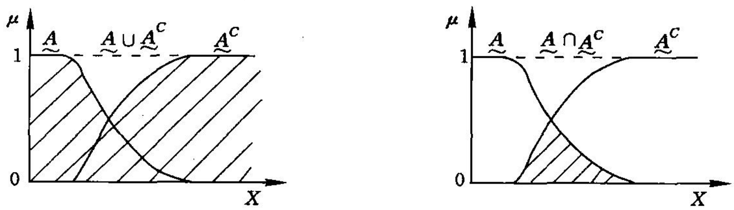


图 1-4 模糊集互补律一般不成立的示例

Zadeh 给出的关于模糊集并、交、余运算的定义是直接从式(1-2)～式(1-6)移植过来的，它保证了当模糊集合蜕化成经典集合时定义的合理性，称这种合理性为模糊集合的并、交、余运算定义的扩充原则。事实上，不难想象满足这种扩充原则的定义绝不是唯一的。

例如，$\forall\,\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(X)$，我们重新定义并集$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$和交集$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$的隶属函数如下：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)+\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\cdot\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\qquad\forall x\in X\tag{1-16}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\cdot\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\qquad\forall x\in X\tag{1-17}$$

可以验证，当 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$和 $\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$仅取 0，1 二值时，与式(1-4)和式(1-5)的结果是一致的。

由于式(1-16)和式(1-17)很类似于概率论中计算随机事件和与事件积的公式，因此，称

上述定义的一对运算为“概率算子”。

模糊集合的并、交运算在实际应用中表现的内容十分丰富，通常都采用“最大—最小”算子，偶尔也有采用“概率算子”或其他算子的情况。“最大—最小”算子在表现上显得粗糙，但是，运算简洁、方便是其最大的优点。

例 1-3 设论域 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$为 X 上的两个模糊子集，其隶属函数分别用向量式表示

$$\underset{\sim}{A}=(0,0.2,0.5,0.8,1)$$
$$\underset{\sim}{B}=(0,0.5,1,0.5,0)$$

采用“最大—最小”算子，有

$$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=(0\vee 0,0.2\vee 0.5,0.5\vee 1,0.8\vee 0.5,1\vee 0)$$
$$=(0,0.5,1,0.8,1)$$
$$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=(0\wedge 0,0.2\wedge 0.5,0.5\wedge 1,0.8\wedge 0.5,1\wedge 0)$$
$$=(0,0.2,0.5,0.5,0)$$
$$\underset{\sim}{A}^C=(1-0,1-0.2,1-0.5,1-0.8,1-1)$$
$$=(1,0.8,0.5,0.2,0)$$
$$\underset{\sim}{B}^C=(1,0.5,0,0.5,1)$$

下面介绍一个很有用的概念——模糊集合的水平截集。

定义 1-3 设$\underset{\sim}{A}$为论域 X 上的模糊子集，具有隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$，对于任意实数 $\lambda\in[0,1]$，记

$$A_\lambda=\{x\mid x\in X,\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\geqslant\lambda\}$$

称集合 A_λ 为模糊集$\underset{\sim}{A}$的 λ 水平截集，或简称 λ 截集。

由定义不难看出，对于任意 $\lambda\in[0,1]$，A_λ 是普通集合，它的直观意义是：若 X 中的元素 x 对于$\underset{\sim}{A}$的隶属度达到或超过 λ，则 x 就是 A_λ 的元素。

例如，设论域 $X=\{a,b,c,d,e,f\}$，X 中的模糊子集

$$\underset{\sim}{A}=\{0.1/a+0.3/b+0/c+0.5/d+0.9/e+1/f\}$$

则

$$A_0=X=\{a,b,c,d,e,f\}$$
$$A_{0.5}=\{d,e,f\}$$
$$A_{0.9}=\{e,f\}$$
$$A_1=\{f\}$$

若$\underset{\sim}{A}$是连续域 X 上的模糊集，$\underset{\sim}{A}$的 λ 截集 A_λ 是 X 上的一个普通集合，如图 1-5 所示。

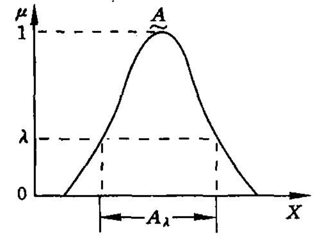


图 1-5 模糊集合$\underset{\sim}{A}$的 λ 截集 A_λ

λ 截集具有如下性质：

① $(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})_\lambda=A_\lambda\cup B_\lambda$，$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})_\lambda=A_\lambda\cap B_\lambda$；

② 若 $\lambda_1\leqslant\lambda_2$，则 $A_{\lambda_1}\supseteq A_{\lambda_2}$；

③ $A_0=X$。

这些性质都是很显然的，其中，性质①可以被推广到任

意多个模糊集合的并、交运算上去。

定义 1-4 称 $A_1=\{x\mid\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=1,x\in X\}$为模糊集$\underset{\sim}{A}$的核，记作 Ker $\underset{\sim}{A}$；称$\underset{\sim}{A}$的隶属度大于零的元素构成的集合为$\underset{\sim}{A}$的承集（也叫支撑集），记作 Supp $\underset{\sim}{A}$，即

$$\text{Supp}\,\underset{\sim}{A}=\{x\mid\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)>0,x\in X\}$$

第二节 模糊模式识别

"模式识别"是一门研究用机器代替人来识别事物的科学。模式是供模仿用的客体集合，识别就是判定所给定的对象应归属哪一个客体。日常生活中，读一篇手写的稿子就是模式识别问题，要对手书文字与头脑中已储存的标准文字进行比较识别。当与人交谈时，当医生诊断时，都在做模式识别，听者要对对方的语音进行识别，医生要对病人的疾病进行识别。

当模式或被识别的对象只能用模糊集合表达时，这类识别称为模糊模式识别。

一、模糊模式识别的原则

（一）最大隶属度原则

当模式是模糊的，被识别对象是明确的，问题可描述如下：

设有 n 个模式，它们分别表示为某论域 X 的 n 个模糊子集$\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\cdots,\underset{\sim}{A}_n$，而 $x_0\in X$ 是一个被识别的对象，若有 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_i}(x_0)=\max\{\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(x_0),\mu_{\underset{\sim}{A}_2}(x_0),\cdots,\mu_{\underset{\sim}{A}_n}(x_0)\}$$

则认为 x_0 相对属于模式$\underset{\sim}{A}_i$。

（二）贴近度与最大贴近原则

贴近度是两个模糊集合接近程度或相似程度的一种度量。通常用$[0,1]$之间的数来表示两个模糊集的贴近度，0 表示最不贴近，1 表示完全贴近或相同。

定义 1-5 设 σ 为映射

$$\sigma:\mathscr{F}(X)\times\mathscr{F}(X)\rightarrow[0,1]$$
$$(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\longmapsto\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$$

若 σ 满足：

① $\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{A})=1,\sigma(\varnothing,X)=0$；

② $\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A})$；

③ $\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C}\in\mathscr{F}(X)$，且$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{C}\Rightarrow\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{C})\leqslant\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\wedge\sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C})$。

则称 $\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$为$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}$的贴近度。

由定义 1-5 可知，贴近度的定义是不唯一的。贴近度是一个有重要实用价值的概念，首先是由我国学者汪培庄提出的，引起了国内外理论及应用两方面研究工作者的极大兴趣，不少人曾先后提出了多种计算贴近度的方案。由于具体应用的问题不同，所以不能绝对地说哪一种定义比其他定义都好，而需要根据具体问题作具体的选择。下面给出几种常用的贴近度的定义。

① 格贴近度

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\triangleq\frac{1}{2}[\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}+(1-\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})]$$

其中

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} = \bigvee_{x \in X} [\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)]$$

$$\underset{\sim}{A} \odot \underset{\sim}{B} = \bigwedge_{x \in X} [\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \vee \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)]$$

分别称为$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的内积和外积。

② 距离贴近度

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} | \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i) |$$

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sum_{i=1}^{n} (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i))^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

这里假定论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$。

③

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \begin{cases} |\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}| / |\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}| & \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} \neq \varnothing \\ 0 & \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \varnothing \end{cases}$$

其中$|\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}|$和$|\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}|$分别为集合$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$和$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$的基数。对于给定的模糊子集$\underset{\sim}{M} \in \mathscr{F}(X)$，$\underset{\sim}{M}$的基数定义为

$$| \underset{\sim}{M} | = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\underset{\sim}{M}}(x_i)$$

④

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \begin{cases} 2\,|\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}| / (|A| + |B|) & \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} \neq \varnothing \\ 0 & \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \varnothing \end{cases}$$

⑤

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} | \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i) |}{\sum_{i=1}^{n} | \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i) |}$$

⑥

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{n} \min[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_k), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_k)]}{\sum_{k=1}^{n} \max[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_k), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_k)]}$$

在模式识别中，当模式及被识别对象都是模糊集时，最大贴近原则描述为：

设有 n 个模式，它们分别表示为某论域 X 上的 n 个模糊子集$\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\cdots,\underset{\sim}{A}_n$，被识别对象可表示成 X 的模糊子集$\underset{\sim}{B}$，若有 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$，使得

$$\sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A}_i) = \max\{\sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A}_1), \sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A}_2), \cdots, \sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A}_n)\}$$

则认为$\underset{\sim}{B}$相对合于模式$\underset{\sim}{A}_i$。

在模糊模式识别的具体应用中，最关键的问题是模式或被识别对象的隶属函数构造，即如何建立刻画模式或对象的模糊集合。根据实际应用看，通常有三种主要方法，它们分别是简单模式的识别方法、基于语言模式的识别方法和基于统计模式的识别方法。