解析几何综合题解

《平面》

太原市教育学院

平面解析几何综合题解

太原市教育学院

一九八〇年一月

前 言

在全国人民向四个现代化乘风破浪前进的年代里，广大教育工作者精神振奋，意气风发，正在又红又专的大道上阔步前进，为早出人才，快出人才，积极贡献力量。

为了适应形势发展的要求，满足中学数学教学的需要，我院数学科晁国勋、郭风英同志编写了《平面解析几何综合题解》一书，供中学数学教师教学时参考和高中毕业学生复习之用。

全书编写了有一定难度的综合性平面解析几何题200个，一一作了解答。这些题目取材范围较广，类型较多，对提高中学数学教学质量，培养中学生分析问题和解决问题的能力有一定帮助。

本书由段步玉同志绘制了图形，并进行了校对。

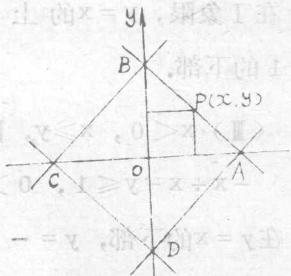
由于水平有限，书中一定存在不少缺点，敬希广大读者批评指正。

太原市教育学院数学科

一九八〇年一月

平面解析几何综合题解

1．至二直交直线的距离之和等于定值，求这种点的轨迹。



(1题)

【解】 以二直交直线为x轴与y轴，满足条件的任意一点p的坐标为（x，y），那么，条件就可写作

$$|x|+|y|=a,$$

从这里可以看出

$-a\leqslant x\leqslant a,\quad -a\leqslant y\leqslant a.$

当 $0\leqslant x$，$0\leqslant y$时，条件式为 $x+y=a$；

当 $0\geqslant x$，$0\leqslant y$时，条件式为$-x+y=a$；

当 $0\geqslant x$，$0\geqslant y$时，条件式为$-x-y=a$；

当 $0\leqslant x$，$0\geqslant y$时，条件式为$x-y=a$。

这四个条件式是四条直线的方程，它们分别截x轴，y轴于A（a，0），B（0，a）；C（－a，0），B（0，a）；C（－a，0），D（0，－a）；A（a,0），D（0，－a）。因为$-a\leqslant x\leqslant a$，$-a\leqslant y\leqslant a$；所以所求的轨迹是上面的四条直线夹于坐标轴的线段所组成的。

2．已知x，y是实数，画图表示满足不等式

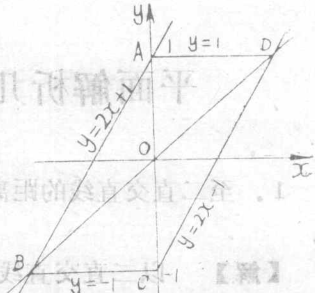
$|x|+|x-y|\leqslant 1$的点（x，y）的范围。

【解】 (i)$x\geqslant 0$，$x\geqslant y$，原不等式为$x+x-y\leqslant 1$，

$\therefore\quad 2x-y\leqslant 1$.

在Ⅰ，Ⅳ象限，$y=x$的下部，

$y=2x-1$含原点的一侧。



（2题）

（Ⅱ）$x\geqslant 0$，设$y\geqslant x\geqslant 0$.

$x+y-x\leqslant 1$，$\therefore\quad y\leqslant 1$，

在Ⅰ象限，$y=x$的上部，

$y=1$的下部。

（Ⅲ）$x<0$，$x\geqslant y$，因此，假若$0>x\geqslant y$，

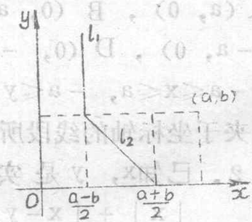
$-x+x-y\leqslant 1$，$0>y\geqslant -1$，

在$y=x$的下部，$y=-1$的上部的第Ⅲ象限部分。

（Ⅳ）$x<0$，假若$x\leqslant y$，$-x+y-x\leqslant 1$，$y\leqslant 2x+1$.即在$y=x$的上部，$y=2x+1$的原点一侧；第Ⅰ、Ⅱ象限部分。

因此，点(x,y)的范围是图中平行四边形ABCD的边及其内部。

3．在(x,y)平面上定义两点(x_1,y_1)和(x_2,y_2)的距离为$d=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$。在此距离下，试求出到原点及点(a,b)等距离的动点(x,y)的轨迹（$a\geqslant b\geqslant 0$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$）。



（3题）

【解】由于规定$x\geqslant 0$，

$y \geqslant 0$，$a > b \geqslant 0$，故动点（x, y）要适合的方程为

$$x+y=|x-a|+|y-b|. \quad ①$$

当$x \geqslant a$时，①式可写成$y+a=|y-b|$，显然在规定范围内无解.

当$x < a$时，①式可写成

$$x+y=a-x+|y-b|$$

或 $$2x+y=a+|y-b|.$$

Ⅰ）当$y \geqslant b$时，②式化为$2x+y=a+y-b$, ②

故 $2x=a-b$，即以

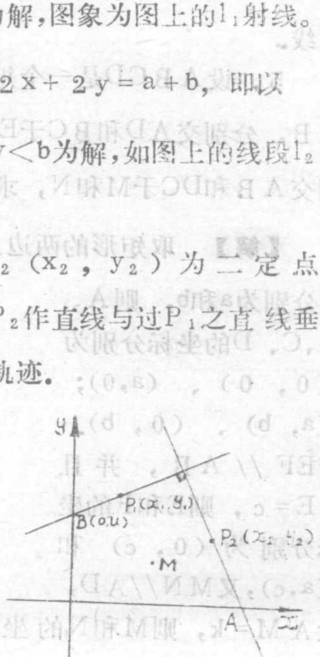
$$x=\frac{(a-b)}{2}, y \geqslant b \text{为解，图象为图上的} l_1 \text{射线。}$$

Ⅱ）当$y < b$时，②式化为$2x+2y=a+b$，即以

$$x+y=\frac{a+b}{2}，x < a，y < b \text{为解，如图上的线段} l_2.$$

因此，动点轨迹为l_1和l_2.

4．设P_1（x_1, y_1），P_2（x_2, y_2）为二定点，过P_1作直线交y轴于B，过P_2作直线与过P_1之直线垂直交x轴于A，求AB的中点的轨迹.



（4题）

【解】 设B（0，u），

则 L_1：

$$y=[(y_1-u)\frac{x}{x_1}]+u,$$

L_2：

$$y=[x_1 \cdot \frac{x}{u}-y_1]+k,$$

$\because P_2$在L_2上，

$\therefore L_2$：$y=\dfrac{x_1}{u-y_1}x+y_2-\dfrac{x_1x_2}{u-y_1}$，

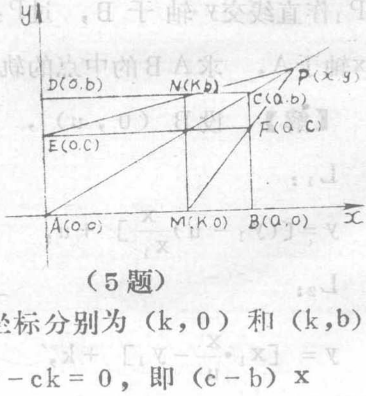
$\therefore$ A $\left[x_2+\dfrac{y_1y_2}{x_1}-\dfrac{y_2}{x_1}u,\ 0\right]$，

$\therefore$ M $\left[\dfrac{x_2}{2}+\dfrac{y_1y_2}{2x_1}-\dfrac{y_2}{x_1}\cdot\dfrac{u}{2},\ \dfrac{u}{2}\right]$，

$\therefore$ M点的轨迹为$x=-\dfrac{y_2}{x_1}y+\dfrac{x_2}{2}+\dfrac{y_1y_2}{2x_1}$，是一直线。

5．设ABCD是一个矩形，EF为定直线且平行于AB，分别交AD和BC于E和F，MN平行于AD移动，分别交AB和DC于M和N，求EN同MF交点的轨迹方程。

【解】 取矩形的两边AB和AD作坐标轴，设两边的长分别为a和b，则A、B、C、D的坐标分别为（0，0）、(a,0)，(a，b)、（0，b）。若EF // AB，并且AE = c，则E和F的坐标分别为（0，c）和(a,c)，又MN//AD，



（5题）

设AM = k，则M和N的坐标分别为（k，0）和（k，b）．

$\therefore$ EN：$(c-b)x+ky-ck=0$，即$(c-b)x$

$$= (c-y)\,k, \qquad ①$$

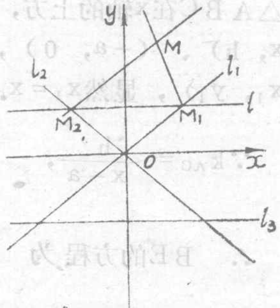
$$MF:\ cx+(k-a)\,y-ck=0,\ 即\ cx-ay = (c-y)\,k, \qquad ②$$

由①，②得 $(c-b)\,x=cx-ay$，即 $bx-ay=0$.

这就是所求的轨迹方程.

6．直线l_1、l_2与另一平行于定直线l_3的动直线l分别交于M_1、M_2，现在过M_1及M_2分别作l_1、l_2的垂线，求此二垂线的交点M的轨迹方程.

【解】 由题设条件知l_1、l_2、l_3两两都不平行，故可以l_1l_2的交点为原点，以过此交点且平行于l_3的直线为x轴建立坐标系.



(5题)

设l_1、l_2、l_3的方程分别为$y=k_1x$，$y=k_2x$，$y=m$，

解得l_1与l交点为$M_1(\frac{m}{k}, m)$

l_2与l交点为$M_2\left(\frac{m}{k_2}, m\right)$.

过M_1且与l_1垂直的直线的方程为

$$y=-\frac{1}{k_1}\left(x-\frac{m}{k_1}\right)+m. \qquad ①$$

过M_2且与l_2垂直的直线方程为

$$y=-\frac{1}{k_2}\left(x-\frac{m}{k_2}\right)+m. \qquad ②$$

设M点坐标为（x，y），则由①－②得

$$x=\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}m, \quad ③ \qquad y=\frac{k_1k_2-1}{k_1k_2}m, \quad ④$$

由③，④得 $y=\dfrac{k_1k_2-1}{k_1+k_2}x$.

7．已知一三角形底边长为定量2a，底边上的高为定长h，试求此三角形的垂心的轨迹方程．

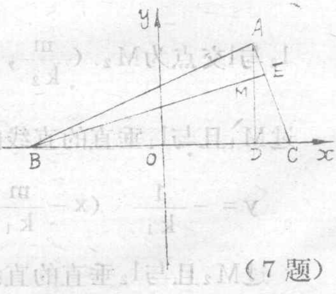
【解】 以底边作x轴，底边的中点作原点建立坐标系，若△ABC在x轴的上方，则其三顶点A、B、C的坐标为（x，h）、（－a，0），（a，0）．又设垂心的坐标为（x_1，y_1），显然$x_1=x$．

$$\because k_{AC}=\frac{h}{x-a}, \qquad \therefore k_{BE}=-\frac{x-a}{h},$$

∴ BE的方程为 $y=-\dfrac{x-a}{h}(x+a)$，

又∵ AD的方程为$x=x_1$

$$\therefore \begin{cases} x=x_1 \\ y=-\dfrac{x-a}{h}(x+a). \end{cases}$$



（7题）

整理得$x_1^2=-hy_1+a^2$

∴ 垂心的轨迹为：

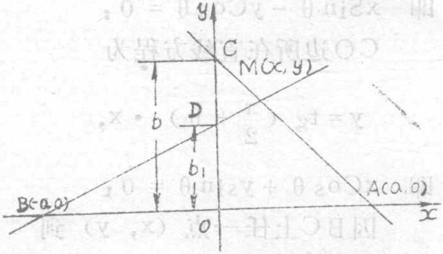
$x^2=-hy+a^2$.

同理，若△ABC在x轴的下方，可得垂心轨迹方程是：$x^2=hy+a^2$.

8．如图，二杆各绕点A（a，0）和B（－a，0）

旋转，且它们在y轴上的截距的乘积$bb_1 = a^2$（常数），试求旋转杆交点的轨迹方程。

【解】设M(x,y)是两杆交点，则M(x，y)满足两杆所确定的直线方程



（8题）

$$y = -\frac{b}{a}(x - a), \quad ①$$

$$y = \frac{b_1}{a}(x + a), \quad ②$$

①、②两式两边分别相乘，得

$$y^2 = -\frac{bb_1}{a^2}(x^2 - a^2),$$

把$bb_1 = a^2$（题设）代入上式，得

$$y^2 = -x^2 + a^2,$$

即 $$x^2 + y^2 = a^2,$$

由$bb_1 = a^2$（常数），得b、b_1不为0，因而$y \neq 0$，$x \neq \pm a$。

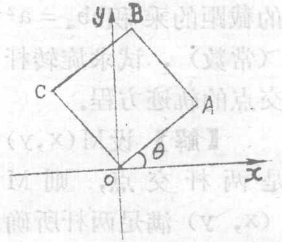
故所求轨迹方程为$x^2 + y^2 = a^2$ $(-a < x < a)$。

9．正方形一顶点在原点，边长为a，一边与x轴正方向间的夹角为θ，求它的各边所在直线的方程。

【解】 如图，正方形OABC中，OA边所在直线方程为$y = \mathrm{tg}\,\theta \cdot x$，

即　$x\sin\theta - y\cos\theta = 0$；

CO边所在直线方程为



(9题)

$$y=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cdot x,$$

即　$x\cos\theta + y\sin\theta = 0$；

因BC上任一点（x, y）到AO的距离恒等于a,

$$\therefore\quad \frac{|x\sin\theta - y\cos\theta|}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=a,$$

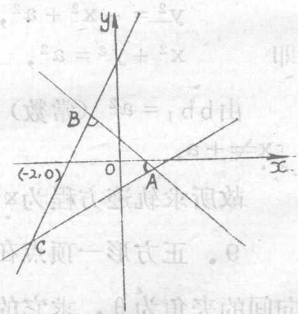
化简得BC所在直线方程为$x\sin\theta - y\cos\theta \pm a=0$；

同理可得AB所在直线方程为

$$x\cos\theta + y\sin\theta \pm a = 0.$$

10. 等腰三角形底边的方程是$x+y-1=0$，一腰的方程是$x-2y-2=0$，点（-2，0）在另一腰上，求此腰的方程。

【解】 如图，设所求腰BC的方程为$y=k_{BC}(x+2)$，



(10题)

$\because$　AB：$x+y-1=0$，

$\therefore$　$k_{AB}=-1$.

$\because$　AC：$x-2y-2=0$，

$\therefore$　$k_{AC}=\dfrac{1}{2}$.

根据题意，由底角相等得出：

$$\frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{AB}k_{BC}}=\frac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AC}k_{AB}},$$

即 $$\frac{-1-k_{BC}}{1-k_{BC}}=\frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}}=3,\qquad \therefore k_{BC}=2.$$

故所求腰BC的方程为 $y=2(x+2)$.

即 $$2x-y+4=0.$$

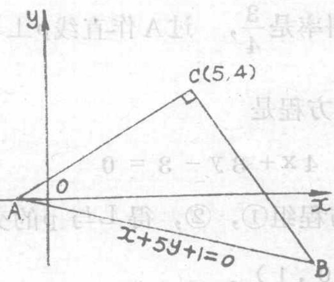
11．等腰直角三角形中，直角顶点的坐标是（5，4），斜边所在直线的方程是$x+5y+1=0$，求两直角边所在直线的方程.

【解】 如图，由$x+5y+1=0$,得AB斜率为$-\frac{1}{5}$,设直线AC斜率为k_1，由于

$\angle CAB=45°$,

$\therefore\ tg45°=1$

$$=\frac{k_1-\left(-\frac{1}{5}\right)}{1+\left(-\frac{1}{5}\right)k_1},$$



（11题）

即 $5-k_1=5k_1+1$,

$\therefore\ k_1=\frac{2}{3}$.

但AC过（5，4）点，

$\therefore$ AC的方程为 $y-4=\frac{2}{3}(x-5)$,

即 $$3y-2x-2=0.$$

同理，直线BC斜率k_2，由于$\angle ABC=45°$,

$$\therefore\ tg45°=1=\frac{\left(-\frac{1}{5}\right)-k_2}{1+\left(-\frac{1}{5}\right)k_2},$$

即 $5-k_2=-1-5k_2$， $\therefore\ k_2=-\dfrac{3}{2}$.

但BC过（5， 4）点，∴BC的方程为$y-4=-\dfrac{3}{2}(x-5)$，

即 $2y+3x-23=0$.

12. 有一光线从点A（－3,5）射到直线L：$3x-4y+4=0$以后，再反射到一点B（2，15），求这条光线从A到B的长度。

【解】 直线l： $3x-4y+4=0$ ①

的斜率是$\dfrac{3}{4}$， 过A作直线p⊥l，

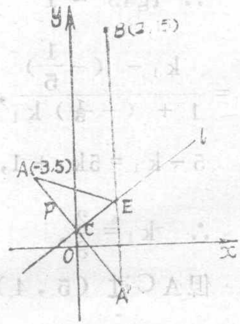
p的方程是

$4x+3y-3=0$ ②

解方程组①，②，得L与p的交点C（0，1）.

设点A′关于L与A对称，则C为AA′，的中点，由中点公式求得点A′的坐标是（3，－3）. 如果光线在L上的反射点是E，那么光线之长＝AE＋EB

$=A'E+EB=A'B=\sqrt{(3-2)^2+(-3-15)^2}=5\sqrt{13}$.



(12题)

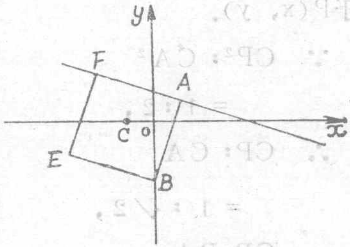
13. 已知：正方形的中心是C（－1，0），一条边所在的直线的方程是：$x+3y-5=0$，求其它三条边的方程.

【解】 如图：中心C到已知直线AF的距离

$$d=\left|\frac{1\cdot(-1)+3\cdot0-5}{\sqrt{1^2+3^2}}\right|=\frac{6}{\sqrt{10}},$$

∵ 直线AB和EF都垂直于AF，

$\therefore\ k_{AB}=k_{EF}=-\frac{1}{k_{AF}}=3.$



（13题）

它们的方程为：

$y=3x+b,$

即 $3x-y+b=0$

又∵ 正方形中心到各边的距离都相等，

∴ C到AB和EF的距离也都是$\frac{6}{\sqrt{10}}$，

$$\therefore\ \frac{3\cdot(-1)-1\cdot0+b}{\sqrt{10}}=\pm\frac{6}{\sqrt{10}},$$

求得 $b=9$或$b=-3$.

∴ AB的方程为： $3x-y-3=0$；

EF的方程为： $3x-y+9=0$.

又∵ BE∥AF，BE的方程为： $x+3y-b=0$，

中心C到BE的距离也是$\frac{6}{\sqrt{10}}$，

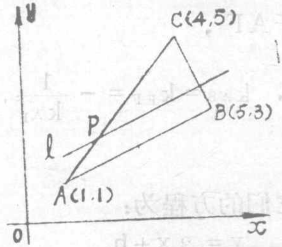
$$\frac{1\cdot(-1)+3\cdot0-b}{\sqrt{10}}=\pm\frac{6}{\sqrt{10}},$$

求得 $b=-7$ 或 $b=5$，

$\therefore$ BE的方程为: $x+3y+7=0$.

14. 已知A(1, 1), B(5, 3), C(4, 5), 直线l平分△ABC的面积, 且l∥AB, 求l的方程.

【解】 设l与AC相交于P(x, y).



(14题)

$\because$ $CP^2 : CA^2 = 1:2$,

$\therefore$ $CP : CA = 1:\sqrt{2}$,

$CP:PA = 1:(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}+1$.

于是, 得 $x = \dfrac{4+(\sqrt{2}+1)}{1+(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{5+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$,

$$y = \frac{5+(\sqrt{2}+1)}{1+(\sqrt{2}+1)} = \frac{6+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}.$$

故l的方程为

$$y-\frac{6+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{3-1}{5-1}\left(x-\frac{5+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right),$$

即 $2x-4y+12-5\sqrt{2}=0$.

15. 设三角形三个顶点坐标分别是$(a\cos\theta_1, b\sin\theta_1)$, $(a\cos\theta_2, b\sin\theta_2)$, $(a\cos\theta_3, b\sin\theta_3)$, 求证它的面积是

$$\left| 2ab\sin\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2} \right|.$$

【证】 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a\cos\theta_1 & b\sin\theta_1 & 1 \\ a\cos\theta_2 & b\sin\theta_2 & 1 \\ a\cos\theta_3 & b\sin\theta_3 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \tfrac{1}{2}ab(\cos\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_2\sin\theta_3+\cos\theta_3\sin\theta_1 - \cos\theta_3\sin\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_3-\cos\theta_2\sin\theta_1)$$

$$=\frac{ab}{2}[\sin(\theta_2-\theta_1)+\sin(\theta_3-\theta_2)+\sin(\theta_1-\theta_3)]$$

$$=\frac{ab}{2}\left[2\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\cos\frac{(\theta_2-\theta_1)-(\theta_3-\theta_2)}{2} + 2\sin\frac{\theta_1-\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_3}{2}\right]$$

$$=ab\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\left[\cos\frac{(\theta_2-\theta_1)-(\theta_3-\theta_2)}{2} - \cos\frac{\theta_1-\theta_3}{2}\right]$$

$$=2ab\sin\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}.$$

若三个顶点按反时针方向计算结果为正，若按顺时针方向计算结果为负，所以要加上绝对值符号.

$$\therefore\ S=\left| 2ab\sin\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\right.$$

$\cdot\left|\sin\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\right|.$

16.设过原点与x轴的正方向相交成定角θ（$0<\theta<\frac{\pi}{2}$）的直线在第一象限的部分为l，x轴正方向上有动点P，P与在l上的动点Q组成△OPQ的面积为8.

（1）求线段PQ中点R的轨迹的方程，

（2）求OR的长最小时的R的坐标．再证明这时R在∠POQ的平分线上.

【解】（1）设P、Q、R的坐标分别是

$$P(x_1,\ 0)、Q(x_2,\ y_2)、R(x,\ y),$$

由题设

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_2}{2},$$

$$y_2=x_2\,tg\,\theta,\quad \tfrac{1}{2}x_1y_2=8,$$

由上面四式，消去x_1，x_2，y_2，求x，y的关系式。

由$y_2=2y$，

$$x_2=\frac{y_2}{tg\,\theta}=\frac{2y\cos\theta}{\sin\theta},$$

$$\therefore\quad x_1=2x-x_2=2x-\frac{2y\cos\theta}{\sin\theta}.$$

因而$\frac{1}{2}\times2\left(x-\frac{y\cos\theta}{\sin\theta}\right)\times2y=8$，

故所求方程为

$$xy\sin\theta-y^2\cos\theta=4\sin\theta,\quad x>0,\ y>0.$$

（2）由上式