NEW Sunshine™

新阳光
金牌奥赛

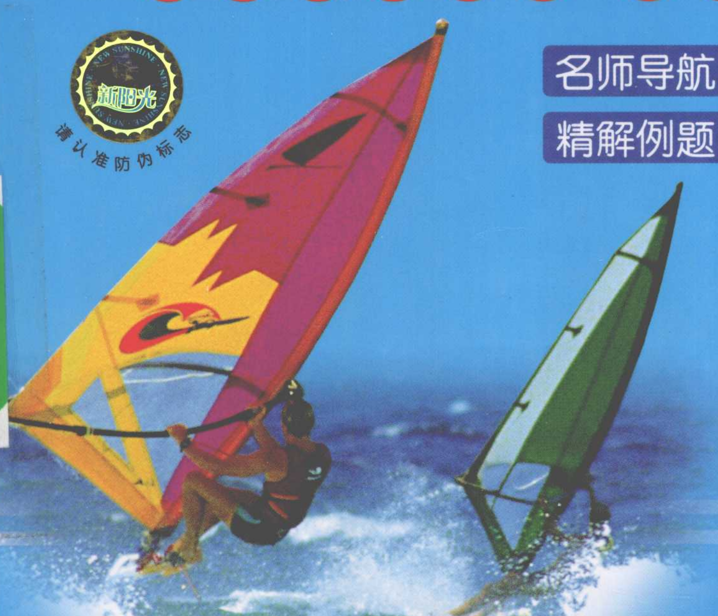
《新阳光金牌奥赛》编委会 编

初中数学奥赛
解题技巧与练习

培养创新能力 拓展科学思维

名师导航 选材新颖 条目清晰
精解例题 举一反三 强化训练

请认准防伪标志



九年级

北京出版社出版集团
北京教育出版社

NEW Sunshine

新阳光
金牌奥赛

本册主编：苏正楷

初中数学奥赛解题技巧与练习

培养创新能力 拓展科学思维

九年级

《新阳光金牌奥赛》编委会 编

总主编：毕淑云 俞晓宏

编 委：（以下名单按姓氏笔画排列）

于志斌 王红娟 尹志梅 王美玲
任延明 孙冬梅 陈天辉 苏正楷
苏孝从 邵 波 苏岫云 李英淑
陈家锐 李海军 辛德辉 周 萌
林 银 郑培敏 施 恩 郭灵恩
梁永久 程晓敏 舒 秀

北京出版社出版集团
北京教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

新阳光金牌奥赛初中数学奥赛解题技巧与练习. 九年级/彩色版/新阳光金牌奥赛编委会 编. —北京：北京教育出版社，2005

（新阳光金牌奥赛）

ISBN 978-7-5303-4750-8

Ⅰ.新… Ⅱ.新… Ⅲ.数学课—初中—解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 101273 号

新阳光金牌奥赛

初中数学奥赛解题技巧与练习(九年级)

CHUZHONG SHUXUE AOSAI JIETI JIQIAO YU LIANXI (JIUNIANJI)

《新阳光金牌奥赛》编委会 编

北 京 出 版 社 出 版 集 团
北 京 教 育 出 版 社 出版

（北京北三环中路 6 号）

邮政编码:100011

网 址:www.bph.com.cn

北京出版社出版集团总发行

新 华 书 店 经 销

北京北苑印刷有限责任公司印刷

*

760×1 000 16 开本 16.5 印张 270 千字

2007 年 4 月第 2 版 2007 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—18 000

ISBN 978-7-5303-4750-8/G·4679

定价:22.00 元

质量投诉电话:010-58572245 58572393

前言

知识经济时代的竞争在于高素质人才的竞争。高素质人才的培养必须从小抓起，培养他们的思维能力、创新精神和解决实际问题的能力。在数学教育中就要体现现代数学思想、富有灵活性和创造性的数学内容以达到培养学生的目的。

学生在课堂上科学地、规范地不断进行系统的数学基础知识和技能培养外，还要课外培养。如何科学合理地开展数学课外活动，如何更好地将数学课外活动与课堂教学结合起来，既引导学生学好课本内容，又使学有余力的学生适应更高要求，是提高教学效益，提高教学质量的基础保证。本丛书以国内外中小学数学竞赛为背景，以全日制九年义务教育数学课程标准为准绳，按年级分册编写。

本书在编写过程中力求遵循两条原则：

1. 课内与课外相结合。在内容安排上力争与课堂教学同步，采用从课内到课外逐步引申扩充的方式形成系统的教程，着重思路的分析和方法技巧的总结，引导学生努力学好现行的中小学课本，进一步深化对现行课本内容的认识，体现“以课堂教学为主，课外活动为辅”的原则。因此学生只要把课内数学知识学好，又善于思考，就可以顺利地学好本书。

2. 普及与提高相结合。随着社会对人才要求的提高，越来越多的学生迫切要求提高自身的数学素质，因此课外活动应面向大多数学生，普遍提高学生的数学素质并促进其全面发展。基于这一想法，本书强调普及，注重基础，是课堂教学内容的加深和拓宽，帮助学生加深对现行课本的理解；强调提高，帮助学生拓展知识视野，介绍课堂教学中没有、竞赛选拔考试要求的内容、方法和技巧。

这套书的特点：

一、一题多解：数学的一题多解是最能体现数学解题基本方法的。所谓

一题多解，就是用不同的思维分析方法，多角度、多途径地解答问题。因此，本套书这一类题的解法极富技巧性、趣味性，有数学兴趣的学生可以从中提高自己的数学素养，并得到美的享受；没有数学兴趣的学生可以从中逐渐培养自己的数学兴趣。认真研读体味本书提供的各种解题技巧和方法，就会居高临下，对数学课堂教学产生极强的指导作用。

二、典型习题：数学练习题浩如烟海，我们从上千道数学试题中精选提炼出具有典型性的试题，按知识点分类，给学生提供极富典型性的练习题，启发引导学生去举一反三、触类旁通，更好地掌握中小学数学的各项内容，跳出茫茫题海，以实现从应试教育向素质教育的转变。

这套新阳光金牌奥赛丛书立足于学生的基础知识，着眼于培养学生的灵活运用知识的能力。以思维训练为核心，以浅显的内容、活泼多样的形式为主旨，覆盖面广、趣味性强。考虑学生的认知规律，例题典范、新颖、独特，解法简炼、灵活、别致，着眼于提高学生的解题能力和数学思维能力，练习有详细解答，便于学生自学自练，也便于教师及家长辅导学生。为了不加重学生负担，本套丛书前后虽有一定的连贯性，但每册又自成体系，每讲篇幅小、内容精。

本书的作者均为中小学数学教学的一线骨干教师及资深奥赛教练，积累了大量、丰富的宝贵经验。书中的例题、练习题都是经过精心挑选的、有代表性的、有特点的，并经过反复实践的名题、好题，有很强的可读性和实用性。建议读者在学习本书的过程中，注意循序渐进，边学边练，以达到巩固提高的目的。

此外，还要指出的是，本书在取材、编写上充分做到知识性与趣味性、理论性与实践性、全面性与针对性、选拔性与适应性的结合，充分体现了数学课程标准的目标和要求。同时本丛书侧重于开拓解题思路和解题技巧，使读者通过本丛书的学习和练习，找到规律性的方法，从而达到举一反三的目的，并进而提高其整体素质。

我们在编写本书时，参阅了国内有关著作，在此对这些著作作者深表谢意。由于编者水平有限，在编辑成书过程中难免存在一些缺陷和遗漏，恳请广大读者和有关专家学者提出宝贵意见，以使再版时修订。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目录

第一篇 方程与函数

第二篇 圆及其性质

第三篇 三角形与不定方程

第四篇 思路与技巧

第五篇 竞赛试卷

第一篇　方程与函数

第一章　一元二次方程

内容精要

1. 形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的方程叫做一元二次方程. 满足方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的实数值叫做一元二次方程的根.

2. 通过求根公式推导可知，一元二次方程的根都可以通过计算 b^2-4ac 来进行判定. 习惯上，我们将 b^2-4ac 称作一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的根的判别式，并用符号 Δ 来表示.

若 $\Delta>0$，则原方程有两个不等实数根.

若 $\Delta=0$，则原方程有两个相等实数根.

若 $\Delta<0$，则原方程无实数根.

上述结论反过来也成立.

3. 一元二次方程若有实根 x_1, x_2，则

$$x_1, x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

这是一元二次方程的求根公式.

若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（其中 $a\neq0$）的两个根为 x_1, x_2，那么 x_1, x_2 与该一元二次方程的系数 a、b、c 之间的关系为：两根之和 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，两

根之积 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. 数学家韦达最早发现根与系数之间的关系,因此,习惯上也将这一关系称为“韦达定理”.

例题精讲

例 1 若 $a \neq 0$ 且 $b = a + c$,求一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根.

分析

解一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$,一般可用求根公式,然后再用条件 $b = a + c$ 使一般解简化,求出解的特殊形式.

解

因为 $b = a + c$,所以 $b^2 = (a + c)^2$.

因此 $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(a+c)^2 - 4ac} = \sqrt{(a-c)^2} = |a - c|$.

①当 $a - c \geqslant 0$ 时,$|a - c| = a - c$.

代入求根公式 $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,化简可得

$x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$.

②当 $a - c < 0$ 时,$|a - c| = c - a$,代入求根公式化简可得 $x = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$.

综合①②,方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根为 $-1, -\frac{c}{a}$.

技巧点拨

利用公式,将条件 $b = a + c$ 作为化简根式的一个条件,然而条件 $b = a + c$ 变形为 $a + b(-1) + c = 0$ 与 $ax^2 + bx + c = 0$ 相比较,就会发现 -1 是方程的一个根,充分利用题设条件的信息,是寻求巧解的突破口.

例 2 利用直接开平方法解方程:

(1) $(x + a)^2 - \left(2x + \frac{a}{2}\right)^2 = 0 \quad (a > 0)$;

(2) $1 + 2x + x^2 = n^2\left(1 + \frac{2x}{n^2} + \frac{x^2}{n^4}\right)$.

分析

方程(1)可变形为$\left(2x+\frac{a}{2}\right)^2=(x+a)^2$来解方程．方程(2)可变形为$\left[n\left(1+\frac{x}{n^2}\right)\right]^2=(1+x)^2$的形式，由于方程中含有字母系数$n$，故需对字母$n$进行讨论．

解

(1)由原方程得$\left(2x+\frac{a}{2}\right)^2=(x+a)^2$.

于是有$2x+\frac{a}{2}=x+a$，或$2x+\frac{a}{2}=-(x+a)$，故$x=\pm\frac{a}{2}$.

(2)由原方程得$\left[n\left(1+\frac{x}{n^2}\right)\right]^2=(1+x)^2$.

于是有$n\left(1+\frac{x}{n^2}\right)=1+x$，或$n\left(1+\frac{x}{n^2}\right)=-(1+x)$.

一方面，由于$\left(\frac{1}{n}-1\right)x=1-n$，故当$n\neq1$时，$x=n$；当$n=1$时，该方程的根为任意实数.

另一方面，由于$\left(\frac{1}{n}+1\right)x=-(n+1)$，

因此，当$n\neq-1$时，$x=-n$，当$n=-1$时，该方程的根为任意实数.

综上所述，当$n\neq1$且$n\neq-1$时，$x=-n$或$x=n$；当$n=1$或$n=-1$时，x为任意实数.

例3　利用因式分解法解方程：

(1)$(\sqrt{2}+1)x^2-(3+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$；

(2)$m^2(x^2-x+1)-m(x^2-1)=(m^2-1)x$.

分析

(1)中方程左边的二次项$(\sqrt{2}+1)x^2$的系数$\sqrt{2}+1$可以分解成$(\sqrt{2}+1)\times1$，常数项$\sqrt{2}$可以分解成$(-1)\times(-\sqrt{2})$，借助十字相乘法也可以进行因式分解，从而达到求解目的.

(2)中方程直接进行分解比较困难，但是将其整理后，可得到关于x的方程$m(m-1)x^2-(2m^2-1)x+m(m+1)=0$，可以将$x^2$的系数分解成$m$与$m-1$的乘积，将$m(m+1)$项分解成$-(m+1)$与$-m$的乘积，再借助十字相乘法进行因式分解，并可以在此基础上求解.

解

(1)原方程可变形成$[(\sqrt{2}+1)x-1](x-\sqrt{2})=0$,

从而可得$x_1=\sqrt{2}-1, x_2=\sqrt{2}$.

(2)原方程经整理可以变形为

$m(m-1)x^2-(2m^2-1)x+m(m+1)=0$,进而可以分解成$[mx-(m+1)]\cdot[(m-1)x-m]=0$,因此有$mx=m+1$或$(m-1)x=m$.

故当$m\neq 0$且$m\neq 1$时,$x_1=\frac{m+1}{m}$;$x_2=\frac{m}{m-1}$. 当$m=0$时,$x=0$. 当$m=1$时,$x=2$.

例 4 解方程$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{2x^2+x+2}{x^2+x+1}=\frac{19}{6}$.

解法 1: $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{2x^2+x+2}{x^2+x+1}=\frac{19}{6}$.

$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x^2+x+1}=\frac{13}{6}$.

令$y=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$,则$y+\frac{1}{y}=\frac{13}{6}$,

即 $6y^2-13y+6=0$.

解得$y_1=\frac{3}{2}, y_2=\frac{2}{3}$.

①$y=\frac{3}{2}$时,$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=\frac{3}{2}$,$x^2-2x+1=0$,$x=1$.

②$y=\frac{3}{2}$时,$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=\frac{2}{3}$,$x^2+3x+1=0$,$x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

经检验,$x=1$,$x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$都是原方程的解.

解法 2: 原方程化为

$\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{6}$.

$\because\ x\neq 0$,$\therefore\ \frac{1}{x+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x+1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{6}$.

令$y=x+\frac{1}{x}$,则$\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}=\frac{1}{6}$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

解得 $y_1=2, y_2=-3$. 分别代入 $y=x+\frac{1}{x}$ 中得

$x=1, x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

例 5 解方程 $\frac{x-7}{\sqrt{x-3}+2}+\frac{x-5}{\sqrt{x-4}+1}=\sqrt{10}$.

分析

认真观察方程左边的特点会发现

$(\sqrt{x-3}+2)(\sqrt{x-3}-2)=x-7$,

$(\sqrt{x-4}+1)(\sqrt{x-4}-1)=x-5$.

因此,可把方程左边的两个分子分别分解因式,通过约分化简,再解方程.

解

原方程可变形为

$$\frac{(\sqrt{x-3}+2)(\sqrt{x-3}-2)}{(\sqrt{x-3}+2)}+\frac{(\sqrt{x-4}+1)(\sqrt{x-4}-1)}{(\sqrt{x-4}+1)}=\sqrt{10}.$$

化简,得 $\sqrt{x-3}-2+\sqrt{x-4}-1=\sqrt{10}$.

即 $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}=\sqrt{10}+3$. ①

$\because (\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4})(\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4})=1$,

$\therefore \frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+4}}{(\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4})(\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4})}=\sqrt{10}+3$.

$\therefore \frac{1}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}}=\sqrt{10}+3$.

即 $\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}=\frac{1}{\sqrt{10}+3}$. ②

①-②,得 $2\sqrt{x-4}=\sqrt{10}+3-\frac{1}{\sqrt{10}+3}$.

即 $2\sqrt{x-4}=6$.

解得 $x=13$. 经检验,$x=13$ 是原方程的根.

$\therefore$ 原方程的根是 $x=13$.

技巧点拨

在将原方程变形、化简后得到方程①时,并未采用两边平方的方法将它转化为有理方程(需两次平方),而是利用有理化因式又得到一个方程②,再通过加减法,便求得了只有一个无理式的无理方程.这种方法是巧解无理方程的重要方法之一.

例6 解方程$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x$

分析

本题有三个根号,一般情况下,去掉三个根号要进行三次平方,此方程若经过三次平方将很复杂,所以必须用特殊解法．观察根号内的式子,x、$x+7$、$x(x+7)$可用辅助元的办法来解.

解

设$u=\sqrt{x}$,$v=\sqrt{x+7}$,则原方程变为

$u+v+2uv=35-2u^2$. ①

$u^2-v^2=x-(x+7)=-7$. ②

①-②得$(u+v)^2+(u+v)-42=0$.

令$u+v=y(y\geqslant0)$,则$y^2+y-42=0$.

解得$y_1=6$,$y_2=-7$(舍去).

则$u+v=6$. ③

由(②÷③+③)$\times\frac{1}{2}$得$u=\frac{29}{12}$,$x=u^2=\frac{841}{144}$.

经检验$x=\frac{841}{144}$是原方程的解.

例7 已知三个二次方程$ax^2+bx+c=0$,$bx^2+cx+a=0$,$cx^2+ax+b=0$有公共根,

求证:$a+b+c=0$.

分析

由于a、b、c恰是三个方程二次项系数,故可设公共根为x_0.

证明

设x_0为其公共共根,将x_0代入后相加,整理,得

$(a+b+c)(x_0^2+x_0+1)=0$.

$\because x_0^2+x_0+1=\left(x_0+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\neq0$,

$\therefore a+b+c=0$.

技巧点拨

通过寻找系数间的关系,由a、b、c在三个方程中具有的位置特点,利用其转换形式,相加得出结论．这也是解决很多对等式或对称问题的常用方法.

例8 解方程 $x^2-|2x-1|-4=0$.

分析

这是含绝对值符号的方程，找 $2x-1$ 的零点，加以讨论.

解

由 $2x-1=0$，得 $x=\frac{1}{2}$.

当 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$x^2-(2x-1)-4=0$，即

$x^2-2x-3=0$.

$(x-3)(x+1)=0$.

$\therefore x_1=3, x_2=-1$（舍）.

当 $x<\frac{1}{2}$ 时，$x^2+(2x-1)-4=0$，即

$x^2+2x-5=0$.

$\therefore x_3=-1-\sqrt{6}, x_4=-1+\sqrt{6}$（舍）.

$\therefore$ 原方程的解为 $x=3$ 或 $x=-1-\sqrt{6}$.

技巧点拨

方程中含有绝对值，往往要去掉绝对值，而去绝对值的方法一般有两种：一是平方法；二是根据零点分类讨论.

例9 解关于 x 的方程

$(m-1)x^2+(2m-1)x+m-3=0$.

分析

对于 m 讨论，要分 $m-1=0$ 与 $m-1\neq0$ 两种情况（不能认为方程一定是二次方程）. 当 $m-1\neq0$ 时，是二次方程的情况下，因为 $\Delta=12m-11$，故要分成 $m>\frac{11}{12}$，$m=\frac{11}{12}$，$m<\frac{11}{12}$ 三种情况讨论其根的情况.

解

①当 $m=1$ 时，方程为 $x-2=0$，

$\therefore x=2$.

②当 $m\neq1$ 时，方程是二次方程，

$\Delta=(2m-1)^2-4(m-1)(m-3)=12m-11$.

ⅰ）当 $m>\frac{11}{12}(m\neq1)$ 时，$\Delta>0$，方程有两个不等实根

技巧点拨

1. 对含字母系数的方程要进行讨论，讨论时要注意两个方面：第一，二次项系数能否为零；第二，判别式 Δ 的取值是判断方程有无实根的依据.

2. 对一元二

$$x_1, x_2 = \frac{1-2m \pm \sqrt{12m-11}}{2(m-1)}.$$

ⅱ）当 $m=\frac{11}{12}$ 时，$\Delta=0$，方程有两个相等实根

$x_1 = x_2 = 5.$

ⅲ）当 $m<\frac{11}{12}$ 时，$\Delta<0$，故方程无实根.

次方程中有关讨论的问题无外乎三类：绝对值、字母系数、含有根号的情况. 每类情况各有其讨论的特点.

练　习　题

1 解下列整式方程：

(1) $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6.$

(2) $x^2+2a|-x|-3a^2=0.$

(3) $4(2x^2-3x-1)(x^2-x+2)-(3x^2-4x+1)^2=0.$

(4) $x^4-10x^3-2(a-11)x^2+2(5a+6)x+2a+a^2=0.$

(5) $x^2+|x+3|+|3-x|=\frac{9}{2}x+6.$

2 解下列分式方程：

(1) $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=1.$

(2) $\frac{(x^2+x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{49}{45}.$

(3) $\frac{x}{x+a}=\frac{y}{y+b}=\frac{z}{z+c}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}.$

(4) $\frac{x^2+x-1}{x^2-x+1}=\frac{2x^2+1}{2x^2-1}.$

3 解下列无理方程：

(1) $\sqrt{x+5}+\frac{3}{\sqrt{x+5}}=2\sqrt{3}.$

(2) $\sqrt[5]{(x-2)(x-32)}-\sqrt[5]{(x-1)(x-33)}=1.$

3 $\sqrt{2x+\frac{9}{x}}-\sqrt{\frac{x}{2x^2+9}}=\frac{8}{3}$.

4 $2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0$.

5 $5\sqrt{x}+5\sqrt{2x+3}+2\sqrt{2x^2+3x}=11-3x$.

4 解关于 x 的方程：

1 $(2x^2-3x-2)n^2+(1-x^2)m^2=mn(1+x^2)$.

2 $a^4\cdot\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^4\cdot\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^4\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^4$.

3 $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$.

4 $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{4x-1}{2}$.

5 $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{3x}{x^2-8x+15}$.

5 试求满足方程 $x^2-kx-7=0$ 与 $x^2-6x-(k-1)=0$ 有公共根的所有 k 值和其所有公共根、所有相异根.

6 求所有正实数 a，使得方程 $x^2-ax+4a=0$ 仅有正整数根.

7 方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根都是正整数，并且 $p+q=1\,996$，试问方程较大根与较小根的比等于多少？

8 已知方程 $(x-19)(x-83)=p$ 有实数根 r_1 和 r_2（其中 p 为实数），求方程 $(x-r_1)(x-r_2)=-p$ 的实数根.

9 已知两个二次方程 $x^2+ax+b=0$，$x^2+cx+d=0$ 有一个公共根是 1，求证：二次方程 $x^2+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}=0$ 也有一个根为 1.

10 若关于 x 的方程 $x^2-ax+4=0$ $(a<0)$ 的实根是 x_1,x_2，求 $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$.

答案与提示

1 1 方程两边同乘 12，可得

$$(6x+7)^2(6x+8)(6x+6)=72.$$

设 $y=6x+7$，则 $y^4-y^2-72=0$，

解得 $y^2=9, y=\pm 3$.

所以 $x_1=-\dfrac{2}{3}, x_2=-\dfrac{5}{3}$.

2 原方程为 $|x|^2+2a|x|-3a^2=0$.

$(|x|-a)(|x|+3a)=0$.

所以 $|x|=a$ 或 $|x|=-3a$.

①当 $a>0$ 时，原方程的解为 $x=\pm a$；②当 $a=0$ 时，原方程的解为 $x=0$；③当 $a<0$ 时，原方程的解为 $x=\pm 3a$.

3 设 $2x^2-3x-1=a, x^2-x+2=b$，则

$4ab-(a+b)^2=0$，

$\therefore (a-b)^2=0$.

$\therefore a=b$.

即 $2x^2-3x-1=x^2-x+2$.

解得 $x=-1$ 或 $x=3$.

$\therefore$ 原方程的解为 $x_1=x_2=-1, x_3=x_4=3$.

4 原方程化为关于 a 的方程，即

$a^2-2(x^2-5x-1)a+(x^4-10x^3+22x^2+12x)=0$，

则 $a=x^2-6x$，或 $a=x^2-4x-2$.

①当 $a\geqslant -6$ 时，解得 $x_{1,2}=3\pm\sqrt{9+a}, x_{3,4}=2\pm\sqrt{6+a}$.

②当 $-9\leqslant a<-6$ 时，解得 $x_{1,2}=3\pm\sqrt{9+a}$.

③当 $a<-9$ 时，原方程无实根.

5 当 $x\geqslant 3$ 时，方程为 $2x^2-5x-12=0$.

方程的解为 $x=4$.

当 $-3<x<3$ 时，方程为 $x^2-\dfrac{9}{2}x=0$.

方程的解为 $x=0$.

当 $x\leqslant -3$ 时，方程为 $x^2-\dfrac{13}{2}x-6=0$.

方程的解为 $x=\dfrac{-13-\sqrt{265}}{4}$.

2 1 令 $x+\dfrac{1}{x}=y$，得 $x_1=\dfrac{1}{2}, x_2=2$.

2 设 $x^2+x+1=y$，则 $\dfrac{y^2}{(y+x)(y-x)}=\dfrac{49}{45}$.

$\therefore 45y^2=49(y^2-x^2)$. $\therefore 4y^2=49x^2$，$\therefore \dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{49}{4}$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com