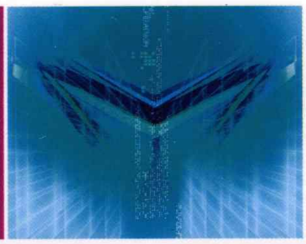
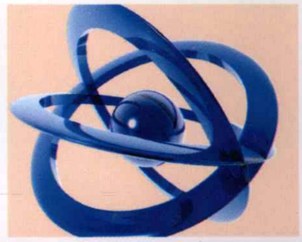
高等教育“十一五”规划教材



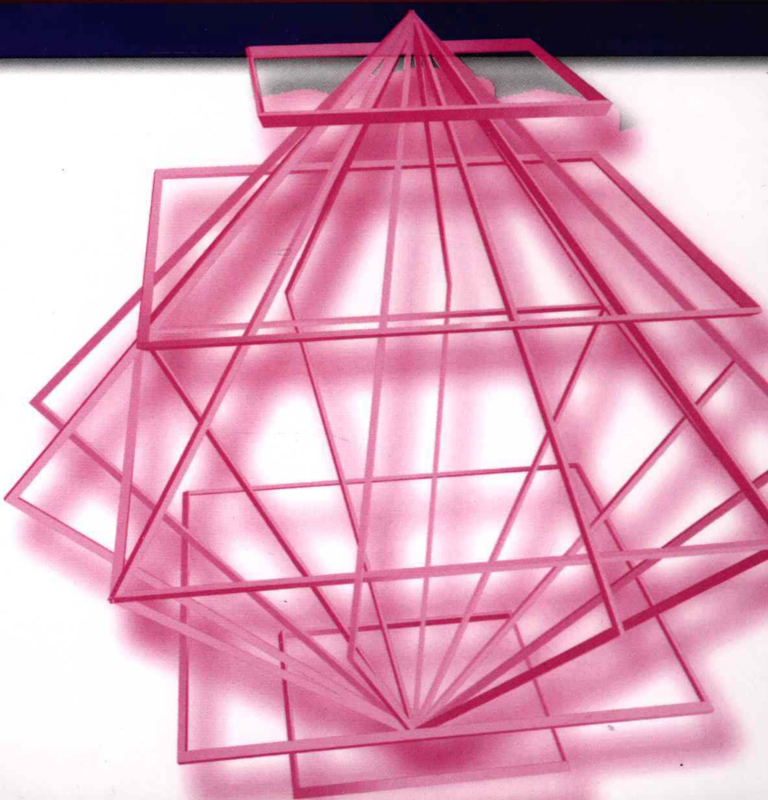


高职高专公共课教材系列

高等数学（下册）

GAODENG SHUXUE（XIAGCE）

刘克敏　黄敬发　黄丽华／主　编



科学出版社
www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材

高职高专公共课教材系列

高等数学

（下册）

刘克敏　黄敬发　黄丽华　主　编
刘艺林　李　鹏　副主编

科学出版社
北　京

目　　录

下面讨论曲边梯形的面积 A 的计算方法.

显然，如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数，则对应的图形就是一个矩形，其面积可以按公式

$$A_{(\text{矩形})}=\text{底}\times\text{高}.$$

当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为一曲线时，对应的曲边梯形的面积不能用矩形的面积公式计算. 然而，由于曲边梯形的高 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续变化的，在很小的一段区间上它的变化很小，近似于不变. 因此，如果把区间 $[a,b]$ 划分为许多小区间，在每个小区间上用其中某一点处的高来近似地代替同一个小区间上的窄曲边梯形的变高，于是，每个窄曲边梯形就可以近似地看成一个窄矩形. 我们就以所有这些窄矩形面积之和作为对应曲边梯形面积的近似值. 当把区间 $[a,b]$ 无限细分下去，使每个小区间的长度都趋于零，这时所有窄矩形面积之和的极限就可以定义为曲边梯形的面积. 因此，可按下面的步骤来计算曲边梯形的面积 A.

第一步：分割.

用任意地 $n-1$ 个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

将区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots,[x_{n-1},x_n],$$

其区间的长度记为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\quad(i=1,2,\cdots,n)$.

经过每个分点作垂直于 x 轴的直线，把曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形. 其面积依次为

$$\Delta A_1,\Delta A_2,\cdots,\Delta A_n.$$

第二步：近似替代.

在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$，以 $f(\xi_i)$ 为高，Δx_i 为底作一窄矩形（图 5-1），以该小矩形的面积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似地表示对应区间上窄曲边梯形的面积，即 $\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i$.

第三步：求和.

将这 n 个小矩形的面积加起来，便得到整个曲边梯形面积的近似值. 即

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

第四步：取极限.

如果记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3,\cdots,\Delta x_n\}$，则当 $\lambda\to 0$ 时，便可以得到曲边梯形面积 A 的精确值，即

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

2. 变速直线运动的路程

设某物体作直线运动，已知速度 $v=v(t)$ 是时间间隔 $[T_1,T_2]$ 上 t 的连续函数，且 $v(t)\geqslant 0$，计算在这段时间内物体所经过的路程 s.

因为物体运动的速度是变量，不能用匀速直线运动的路程公式来计算. 然而，由于物体运动的速度函数 $v(t)$ 是连续变化的，在很小的一个时间段内，速度的变化很小，近似于等速. 因此，如果把时间间隔 $[T_1,T_2]$ 分成许多小段，在这些小段内，以等速运动近似地代替变速运动，那么，就可以算出部分路程的近似值，再求和，便得到整个时间段上路程的近似值. 最后使时间间隔无限缩短，即所有部分路程的近似值之和的极限，就是所求变速直线运动的路程的精确值. 于是，类似于求曲边梯形面积的方法，按下面步骤来计算变速直线运动物体的路程 s.

第一步：分割.

用 $n-1$ 个分点

$$T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_{n-1}<t_n=T_2,$$

将时间间隔 $[T_1,T_2]$ 分成 n 个小区间

$$[t_0,t_1],[t_1,t_2],\cdots,[t_{i-1},t_i],\cdots,[t_{n-1},t_n].$$

各小时间段的长度记为

$$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

相应地，在各时间段内物体经过的路程依次为

$$\Delta s_1,\Delta s_2,\cdots,\Delta s_n.$$

第二步：近似替代.

在时间段 $[t_{i-1},t_i]$ 上任取一时刻 $\xi_i(t_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant t_i)$，以速度 $v(\xi_i)$ 替代 $[t_{i-1},t_i]$ 上各时刻的速度，可得该时间段上路程 Δs_i 的近似值，即

$$\Delta s_i\approx v(\xi_i)\Delta t_i.$$

第三步：求和.

将这 n 段路程的近似值加起来，可得到变速直线运动物体所经过路程 s 的近似值，即

$$s=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i\approx v(\xi_i)\Delta t_1+v(\xi_2)\Delta t_2+\cdots+v(\xi_n)\Delta t_n=\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i.$$

第四步：取极限.

如果记 $\lambda=\max\{\Delta t_1,\Delta t_2,\cdots,\Delta t_n\}$，则当 $\lambda\to 0$ 时，便可得变速直线运动物体所经路程 s 的精确值，即

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i.$$

5.1.2 定积分的定义

上面两个实际问题，从抽象的数量关系看，解决问题的方法都是相同的，它们都是求某一函数在某个区间上具有相同结构的一种特定和式的极限. 如果抛开实际问题的具体意义，将它们在数量关系上共同的本性加以概括，就抽象出一个重要的数学概念——定积分.

定义 5.1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，任取分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$，每个小区间的长度记为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 内任取一点 $\xi_i(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$，作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，并作出和式

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

再记 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$. 如果不论对区间 $[a,b]$ 怎样分割，也不论点 ξ_i 在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上怎样取法，只要当 $\lambda \to 0$ 时，和式 s_n 总趋近于确定的极限 I，则称这个极限值 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I .$$

其中 $f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量，a 称为积分下限，b 称为积分上限，$[a,b]$ 称为积分区间. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分存在，我们就说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

根据该定义，前面的两个实际问题可表述为

曲边梯形的面积 A 等于函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，

即
$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x ,$$

变速直线的路程 s 是速度函数 $v(t)$ 在区间 $[T_1,T_2]$ 上的定积分，

即
$$s = \int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t .$$

以下几个问题必须注意：

（1）若积分和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限存在，则该极限为一确定的常数，它仅与被积函数和积分区间有关，而与积分变量无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u .$$

（2）规定
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x\ ;$$
$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0\ .$$

（3）函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足怎样的条件，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定可积？对于这个问题本节不作深入讨论，而只给出以下两个充分条件：

定理 5.1　设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定理 5.2　设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

根据定积分的定义，可以看到定积分的几何意义：

如果在 $[a,b]$ 上，$f(x)\geqslant 0$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线
$$y=f(x), x=a, x=b\ ,$$
与 x 轴所围成的位于 x 轴上方的曲边梯形面积（图 5-2）.

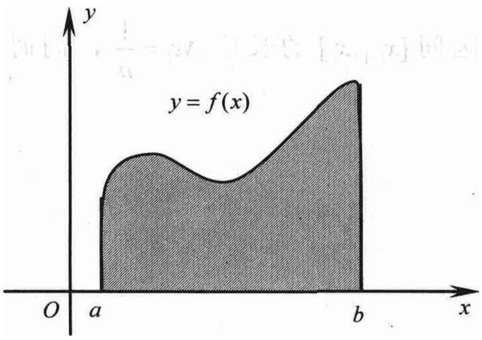


图 5-2

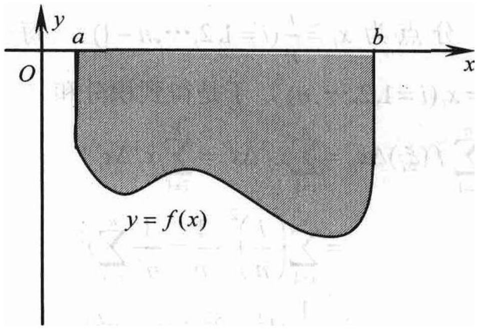


图 5-3

如果在 $[a,b]$ 上，$f(x)<0$ 时，则曲边梯形位于 x 轴下方，这时 $f(\xi_i)<0$，而 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$，所以 $f(\xi_i)\Delta x_i < 0$，从而和式的极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 为负，意即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < 0$，这时 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示对应曲边梯形面积的负值（图 5-3）.

如果在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 的值有正有负，则由 x 轴、曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=a, x=b$ 所围成的图形既有在 x 轴上方的部分，又有在 x 轴下方的部分（图 5-4），此时，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示若干个曲边梯形面积的代数和，其中位于 x 轴上方的前面取“+”号，位于 x 轴下方的前面取“-”号.

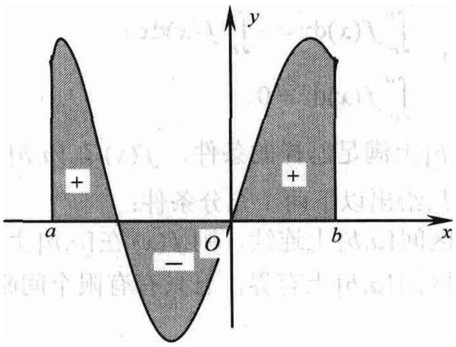


图 5-4

最后，举一个按定义计算定积分的例子.

【例 5.1.1】 应用定义计算积分 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$.

解 为了便于计算，不妨把区间 $[0,1]$ 分成 n 等分，

分点为 $x_i = \frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n-1)$，每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度 $\Delta x_i = \frac{1}{n}$，同时取 $\xi_i = x_i(i=1,2,\cdots,n)$，于是得到积分和

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2) \\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}).
\end{aligned}
$$

因此
$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}[\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})] = \frac{1}{3}.$$

习题 5.1

1．利用定积分定义计算 $\int_a^b x\mathrm{d}x \quad (a<b)$ 的积分.

2．利用定积分几何意义，说明下列不等式：

（1） $\int_0^1 2x\mathrm{d}x = 1$；　　（2） $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$；

（3）$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=0$；　　（4）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$.

5.2　定积分的性质

在下面的讨论中，假定所给函数在对应的区间上是可积的.

性质 5.1　函数的和（差）的定积分等于它们的定积的和（差），即

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x .$$

证明

$$\begin{aligned}\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i\\&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\pm\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i\\&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x .\end{aligned}$$

性质 5.1 对于任意有限个函数的代数和都是成立的.

类似地可以证明：

性质 5.2　被积函数的常数因子可以提到积分号外面，即

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

性质 5.3　设 c 是 $[a,b]$ 内任意一点，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x .$$

证明　因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，所以不论把 $[a,b]$ 怎样分割，积分和式的极限总是不变的. 因此，在分割区间时，可以使 c 固定是个分点. 那么 $[a,b]$ 上的积分和等于 $[a,c]$ 上的积分和加 $[c,b]$ 上的积分和，即

$$\sum_{[a,b]}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{[a,c]}f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{[c,b]}f(\xi_i)\Delta x_i .$$

令 $\lambda\to 0$，上式两端同时取极限，即得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x .$$

这个性质表明定积分对于积分区间是具有可加性的.

按照上一节的规定，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$，不论 a,b,c 的相对位置如何，性质 5.3 总成立，例如，当 $a<b<c$ 时，由于

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x .$$

于是得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x .$$

性质 5.4 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 1$，则

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a .$$

证明留给读者.

性质 5.5 如果在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)\geqslant 0$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0 .$$

证明 因为 $f(x)\geqslant 0$，所以 $f(\xi_i)\geqslant 0$，又由于 $\Delta x_i > 0$，

因此

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,n) .$$

令 $\lambda = \max\{\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n\} \to 0$，便得要证的不等式.

推论 5.1 如果在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x .$$

证明 因为 $g(x)-f(x)\geqslant 0$，由性质 5.5 得

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]\mathrm{d}x \geqslant 0 .$$

再利用性质 5.1，即可得要证的不等式.

推论 5.2 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x .$

证明 因为 $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant |f(x)|$，

由推论 5.1 及性质 5.2，可得

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x .$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x .$$

性质 5.6 设 M 及 m 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a) .$$

证明 因为 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，由性质 5. 5，得

$$\int_a^b m\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\mathrm{d}x .$$

再由性质 5.2，即可得要证的不等式.

该性质的几何意义是：

由曲线 $y=f(x), x=a, x=b$ 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积，介于以区间 $[a,b]$ 为底，以 $y=m$ 和 $y=M$ 为高的两矩形面积之间（图 5-5）.

【例 5.2.1】 估计定积分 $\int_0^2 e^{x^2-x}dx$ 的值.

解 设 $f(x)=e^{x^2-x}$，

由　　$f'(x)=(2x-1)e^{x^2-x}=0$，

得驻点　　$x=\frac{1}{2}$.

而　　$f(0)=1$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{1}{4}}$，$f(2)=e^2$，

比较得　　$e^{-\frac{1}{4}}\leqslant e^{x^2-x}\leqslant e^2$（$0\leqslant x\leqslant 2$）.

因此　　$2e^{-\frac{1}{4}}\leqslant \int_0^2 e^{x^2-x}dx\leqslant 2e^2$.

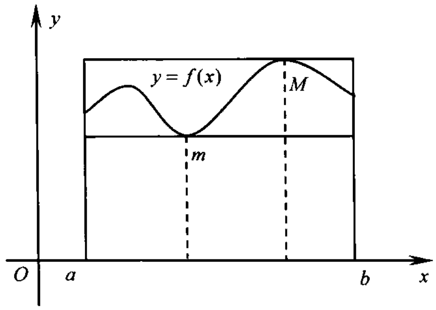


图 5-5

***性质 5.7**（积分中值定理）

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使下式成立：

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)\quad(a\leqslant\xi\leqslant b).$$

证明　由性质 5.6，各式同除以 $b-a$，得

$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leqslant M.$$

于是对于介于最小值 m 和最大值 M 之间的数 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，

由连续函数的介值定理知，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

即　　$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$.

积分中值定理的几何意义是：

在区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得以区间 $[a,b]$ 为底边的曲线梯形的面积等于同一底边而高为 $f(\xi)$ 的矩形的面积（图 5-6）.

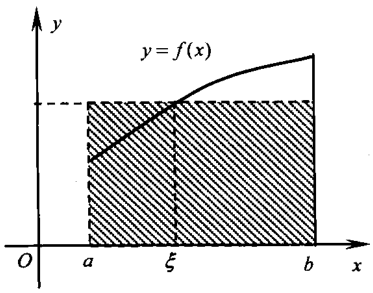


图 5-6

习题 5.2

1．根据定积分的性质，比较下列各对积分的大小：

（1）$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x$；　　（2）$\int_1^2 x^2 \mathrm{d}x$ 与 $\int_1^2 x^3 \mathrm{d}x$；

（3）$\int_3^4 \ln x \mathrm{d}x$ 与 $\int_3^4 \ln^2 x \mathrm{d}x$；　　（4）$\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x$.

2．根据定积分的性质，估计下列各积分的值：

（1）$\int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x$；　　（2）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1+\sin^2 x)\mathrm{d}x$.

5.3 微积分基本公式

一般地，按照定积分的定义计算定积分是十分困难的，即使是很简单的函数，如果被积函数是一些较复杂的函数，其难度就更大了，因此，有必要寻求一种简单的计算方法. 本节将介绍定积分计算的有力工具——牛顿-莱布尼兹公式.

首先回顾变速直线运动的路程问题. 如果物体以速度 $v(t)$ 作直线运动，那么在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上所经过的路程为
$$s = \int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t .$$

另一方面，如果物体经过的路程 s 是时间 t 的函数，即 $s=s(t)$，那么物体从 $t=T_1$ 到 $t=T_2$ 所经过的路程应该是
$$s = s(T_2) - s(T_1) .$$
于是有
$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t = s(T_2) - s(T_1) .$$

由导数的物理意义可知，$s'(t)=v(t)$，意即 $s(t)$ 是 $v(t)$ 的一个原函数. 上式表示定积分 $\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t$ 的值等于被积函数 $v(t)$ 的一个原函数 $s(t)$ 在积分上、下限 T_2 、T_1 处的增量 $s(T_2)-s(T_1)$.

一般地，可以证明定积分的计算有下面的微积分基本公式：

定理 5.3（牛顿-莱布尼兹（Newton-Leibniz）公式） 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数，则
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) .$$

为了使用方便，可以把 $F(b)-F(a)$ 记作 $[F(x)]_a^b$，即
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b .$$

牛顿-莱布尼兹公式揭示了定积分与被积函数的原函数即不定积分之间的关系，它给定积分提供了有效而简单的计算方法.

【例 5.3.1】 计算 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$.

解　因为 $\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + c$，而 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数，所以

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\times 1^3 - \frac{1}{3}\times 0^3 = \frac{1}{3}.$$

【例 5.3.2】 计算 $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$.

解　因为 $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x| + c$.

所以　$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = [\ln|x|]_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$.

【例 5.3.3】 计算 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{1+x^2} \mathrm{d}x$.

解　因为 $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} \mathrm{d}x = \int \arctan x \cdot \mathrm{d}(\arctan x) = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + c$.

所以

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{1+x^2} \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(\arctan x)^2\right]_{-1}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \left(-\frac{\pi}{4}\right)^2\right] = \frac{7}{288}\pi^2.$$

【例 5.3.4】 计算 $\int_{-1}^{2} |x| \mathrm{d}x$.

解　因为　当 $-1 \leqslant x \leqslant 0$ 时，$|x| = -x$，当 $0 \leqslant x \leqslant 2$ 时，$|x| = x$，

所以

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} |x| \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} (-x)\mathrm{d}x + \int_0^2 x\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-1}^{0} x\mathrm{d}x + \int_0^2 x\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0 = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

【例 5.3.5】 计算正弦曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上与 x 轴所围成的平面图形的面积.

解　这图形是曲边梯形的一个特例，其面积

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi} \\ &= [-(-1)] - (-1)] = 2.\end{aligned}$$

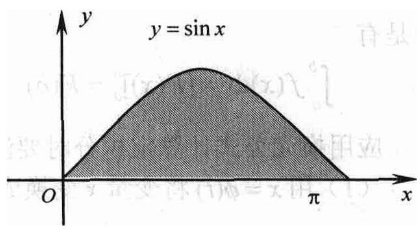


图 5-7

习题 5.3

计算下列定积分：

（1）$\int_0^a (3x^2 - x + 1)\mathrm{d}x$；　（2）$\int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x^4})\mathrm{d}x$；　（3）$\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$；

（4）$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$；　（5）$\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$；　（6）$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$；

（7）$\int_{-e-1}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$；　（8）$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\mathrm{d}x$.

5.4　定积分的换元积分和分部积分法

上一章介绍了求不定积分的换元积分法和分部积分法. 本节将介绍定积分的两种相应的计算方法.

5.4.1　定积分的换元法

定理 5.4　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\phi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 满足条件

（1）$\phi(\alpha)=a$，$\phi(\beta)=b$；

（2）$\phi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数，同时其值不超过 $[a,b]$，

则有
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)\mathrm{d}t.$$

该公式称为定积分的换元积分公式.

证明　设 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+c$.

由不定积分的换元法有
$$\int f[\phi(t)]\phi'(t)\mathrm{d}t = F[\phi(t)]+c.$$

于是有
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a) = F[\phi(\beta)]-F[\phi(\alpha)] = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)\mathrm{d}t.$$

应用换元公式计算定积分时要注意以下两点：

（1）用 $x=\phi(t)$ 将变量 x 变换成 t 时，积分限也要换成新变量 t 的积分限，即“换元需换限”；

（2）求出 $f[\phi(t)]\phi'(t)$ 的一个原函数 $F[\phi(t)]$ 后，不必再将其还原成原来变量的函数，而只要把新变量 t 的上、下限分别代入 $F[\phi(t)]$ 中相减即可.

【例 5.4.1】 求 $\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

解 令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$， $dx=2tdt$，

且 当 $x=1$ 时， $t=1$，当 $x=4$ 时， $t=2$，

于是
$$\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int_1^2 \frac{2tdt}{1+t}=2\int_1^2\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$=2[t-\ln(1+t)]_1^2$$
$$=2[(2-\ln 3)-(1-\ln 2)]$$
$$=2(1+\ln\frac{2}{3}).$$

【例 5.4.2】 求 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx\ (a>0)$.

解 设 $x=a\sin t$，则 $dx=a\cos tdt$，

且当 $x=0$ 时， $t=0$，当 $x=a$ 时， $t=\frac{\pi}{2}$，

于是
$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt$$
$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt$$
$$=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

【例 5.4.3】 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\cdot\sin xdx$.

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\cdot\sin xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 xd(\cos x)=-\left[\frac{1}{6}\cos^6 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{6}.$

注意到本例没有明显地写出新变量，那么积分上、下限也就不要变更，简言之即“不换元则不换限”.

【例 5.4.4】 试证

（1）若 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续且为偶函数，则 $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$；

（2）若 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续且为奇函数，则 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$.

证明 因为
$$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx.$$

对于积分 $\int_{-a}^0 f(x)dx$ 作代换 $x=-t$，则有
$$\int_{-a}^0 f(x)dx=-\int_a^0 f(-t)dt=\int_0^a f(-t)dt=\int_0^a f(-x)dx.$$

于是 $$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x .$$

（1）若 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续且为偶函数，即 $f(-x)=f(x)$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x .$$

（2）若 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续且为奇函数，即 $f(-x)=-f(x)$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=-\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0 .$$

应用此结论，可以简化奇、偶函数在对称区间上的定积分.

5.4.2 定积分的分部积分法

定理 5.5 设 $u'(x)$、$v'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则有

$$\int_{a}^{b} u\mathrm{d}v=[u\cdot v]_{a}^{b}-\int_{a}^{b} v\mathrm{d}u .$$

证明 由于函数 $u(x)$、$v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数 $u'(x)$、$v'(x)$，

则有 $$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v' ,$$

对于等式两边分别在区间 $[a,b]$ 上求定积分，

$$\int_{a}^{b}(u\cdot v)'\mathrm{d}x=\int_{a}^{b} u'\cdot v\mathrm{d}x+\int_{a}^{b} u\cdot v'\mathrm{d}x ;$$

化简得 $$[u\cdot v]_{a}^{b}=\int_{a}^{b} v\mathrm{d}u+\int_{a}^{b} u\mathrm{d}v ;$$

移项，就有 $$\int_{a}^{b} u\mathrm{d}v=[u\cdot v]_{a}^{b}-\int_{a}^{b} v\mathrm{d}u .$$

【例 5.4.5】 求 $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\arcsin x\mathrm{d}x$.

解 设 $u=\arcsin x$ ，$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$ ，

则 $$\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} ,\quad v=x .$$

于是
$$\begin{aligned}\int_{0}^{\frac{1}{2}}\arcsin x\mathrm{d}x &=[x\cdot\arcsin x]_{0}^{\frac{1}{2}}-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)\\ &=\frac{\pi}{12}+[\sqrt{1-x^2}]_{0}^{\frac{1}{2}}\\ &=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1 .\end{aligned}$$