

机械碰撞运动中的非光滑动力学

张思进 编著

 湖南大学出版社
图书出版基金资助项目

湖南大学出版社

林業經濟與林地在台灣米農居农村

——

林業經濟與林地在台灣米農居农村



湖南大学出版社
图书出版基金资助项目

机械碰撞运动中的非光滑动力学

张思进 编著

湖南大学出版社

内 容 简 介

本书是一部研究非光滑动力学在机械碰撞运动中的应用的专著,由浅入深地介绍了一系列机械碰撞系统的动力学模型建立、分析方法以及各类复杂运动和分岔特性等.

本书既具有一定的学术价值,又有一定的工程应用价值.

图书在版编目(CIP)数据

机械碰撞运动中的非光滑动力学/张思进编著.

—长沙:湖南大学出版社,2008.11

ISBN 978-7-81113-526-8

I. 机... II. 张... III. 机械—碰撞(力学)—运动(力学)—研究

IV. TH113.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 181778 号

机械碰撞运动中的非光滑动力学

Jixie Pengzhuang Yundongzhong de Feiguanghua Donglixue

作 者:张思进 编著

责任编辑:卢 宇

封面设计:吴颖辉

出版发行:湖南大学出版社

社 址:湖南·长沙·岳麓山

邮 编:410082

电 话:0731-8822559(发行部),8821315(编辑室),8821006(出版部)

传 真:0731-8649312(发行部),8822264(总编室)

电子邮箱:pressluy@hun.cn

网 址: <http://press.hnu.cn>

印 装:长沙瑞和印务有限公司

开本:787×1092 16 开

印张:7.75

字数:180 千

版次:2008 年 12 月第 1 版

印次:2008 年 12 月第 1 次印刷

书号:ISBN 978-7-81113-526-8/0·76

定价:20.00 元

版权所有,盗版必究

湖南大学版图书凡有印装差错,请与发行部联系

前 言

非光滑动力学系统是近年来人们关注较多的领域,其中很多与机械碰撞振动(简称碰振)相关,如大型旋转机械转子与定子系统的碰摩,汽车碰撞事故中的人员伤害以及其他含间隙的运动机械中的冲击都属于这一范畴.多数情形下,碰振会造成机械破坏,经济损失甚至人员伤亡,因而是一类危害性很大的动力学行为.碰振过程发生的时间往往很短,运动一般也比较复杂,除系统结构的非线性因素外,研究表明,即使简单的线性系统发生碰振,运动也常会出现类似非线性系统的分岔行为.一般这类动力学系统的向量场或流在某个切换点处(碰振点)不可微或不连续,而在空间其他各点仍然是光滑的.正是由于非光滑动力学系统向量场或流的特殊性,因而其研究方法通常微分动力系统既有共同点,又有许多特殊的地方.本书由简单到复杂介绍了一系列机械碰振系统的动力学模型建立,分析方法以及运动和分岔特性等,以使读者对非光滑动力学这门新兴而复杂的动力学理论有一个初步的认识.

本书第1章介绍了非光滑动力学的一些概念、研究方法和擦边分岔的理论,是后续章节的理论基础.第2章和第3章分别介绍了单自由度和多自由度碰撞振子的运动模型及分岔分析.第4章和第5章则介绍了碰摩转子系统的各类复杂运动以及擦边分岔分析,这也是一类具有机械工程应用背景的意义重大的非光滑动力学研究课题.第6章以碰摩转子系统为对象,探讨了如何对机械碰撞中的混沌运动进行有效控制.本书读者应具备本科以上力学或机械专业知识,掌握一定的非线性动力学知识有助于理解本书相关内容.

在本书的编写过程中,得到了本人以前的导师陆启韶先生,以及广西师范大学李群宏老师的帮助,部分章节的内容也与他们的研究相关.在此谨向他们表示衷心的感谢.对于书中的疏漏和不足,也恳请广大读者给予批评指正.

张思进

2008年6月于湖南大学

目 次

第 1 章 非光滑动力学基础

1.1 引 言	001
1.2 非光滑动力系统的定义和分类	002
1.3 碰撞力的简化模型	004
1.4 Poincaré 映射及其应用	005
1.5 碰撞运动的擦边理论	006
1.6 胞映射法在非光滑动力系统中的应用	014
参考文献	019

第 2 章 单自由度碰振振子的运动

2.1 单自由度碰振振子的运动模型	021
2.2 线性碰振振子的擦边分岔	022
2.3 单自由度对称约束碰振系统的周期运动	026
2.4 单自由度分段线性振子的运动	034
参考文献	035

第 3 章 多自由度碰振振子的运动

3.1 多自由度碰振振子的周期运动	036
3.2 多自由度碰振振子的粘滞运动	042
参考文献	050

第 4 章 转子系统碰摩运动的动力学

4.1 引 言	051
4.2 转子碰摩运动的一般模型	052
4.3 刚性约束碰摩转子系统的分岔	057

4.4	刚性约束偏移转子系统碰摩的分岔	070
4.5	非线性油膜转子碰摩的数值方法	076
4.6	小 结	084
	参考文献	085

第5章 弹性机壳转子系统的碰摩运动

5.1	引 言	087
5.2	碰摩转子系统的向量场分段光滑模型	088
5.3	弹性机壳转子系统的碰摩运动	092
5.4	弹性极限模型的非光滑分析	095
5.5	小 结	101
	参考文献	101

第6章 碰撞运动的混沌控制

6.1	引 言	102
6.2	动力系统的混沌控制理论	103
6.3	碰摩转子系统的变量延迟反馈控制方法	104
	参考文献	109

附 录

附录1		110
附录2		110
附录3		111

致 谢

第1章 非光滑动力学基础

1.1 引言

在转子机械系统的碰振和摩擦,航天器的机构伸展和相互对接,飞机的起飞和降落等过程中都存在一类被称为非光滑动力学的力学行为.这类特殊动力学系统有着很多不同于通常动力学系统的动力学行为,例如擦边分岔、粘滞-滑移分岔、C-型奇怪吸引子等,因而引起了很多学者的研究兴趣.早在20世纪60年代,Maezawa^[1,2]等人就发现分段线性系统有着某些跟非线性系统相似的动力学行为,如振幅跃迁和超谐响应等.到了80年代,Thompson^[3],Holmes^[4]等人发现冲击振子存在由倍周期分岔到达混沌运动的现象,其中Shaw和Holmes^[5-8]对分段线性振子和冲击振子做了大量的理论分析和实验研究工作,发现这类系统中除存在倍周期分岔外,还存在次谐响应、Smale马蹄集等非线性特征,但产生该类现象的机理却大不同于一般非线性系统^[9,10].在这类非光滑系统中,运动可以直接从周期运动进入混沌运动.另外还发现该类系统中普遍存在一类手掌状(Fingers-like)的奇怪吸引子(C-型吸引子).

Nordmark^[11,12]从相空间中流与边界相互作用的关系出发,首次建立了反映冲击振子碰撞运动的Poincaré-Nordmark映射,发现冲击振子的运动中存在一种被称为擦边碰撞(Grazing impact)的现象,它是振子由周期运动直接进入混沌运动的主要原因.所谓擦边现象是指在相空间中,轨线以零速度与碰撞面接触时导致运动出现不确定性的现象.振子的这种分岔行为被称为擦边分岔.而Shaw等人发现的C-型吸引子不过是擦边分岔行为导致的一种混沌现象.学者们在除机械系统外的一些其他领域,如He-Ne激光器和数值合成电路中也都发现了这种分岔现象.Nusse^[13,14]等人研究了一类更具广泛意义的非光滑系统,发现擦边分岔在这里只是一种被他们称之为边界碰撞分岔(Border-collision Bifurcation)的非光滑分岔行为的一个特例.Chin^[15]等人对Poincaré-Nordmark映射做单参数开折后详细研究了它的性质,发现该映射具有十分丰富的动力学行为,如存在擦边分岔、反向周期递增分岔、多周期解共存等现象,其中许多现象是光滑动力系统所没有的.该文中还给出了最大周期轨道(Maximal Periodic Orbit)碰撞运动的一般分析方法.Lamba和Budd^[16]发现,非光滑系统发生擦边分岔时其最大Lyapunov指数也会随参数发生跳

跃. 胡海岩^[17,18]对分段线性系统的擦边行为及擦边轨道的确定等问题进行了研究,发现轨线与切换面相切时 Poincaré 映射的二阶可微性被破坏是导致该系统产生奇异性的根本原因.

在研究方法上,除 Nordmark 等人提出的将 Poincaré 映射在擦边轨道附近进行局部化的方法外,另一些学者从其他角度做了许多有益的尝试. Ivanov^[19]采用附加变量的方法将具有不连续流的冲击振子问题转化为连续(但不可微)问题,并找到方程的基解矩阵,然后利用线性稳定性理论对解的稳定性进行了讨论. Whiston^[20-22]对碰振线性振子的全局动力学行为做了研究,发现该系统存在一个鞍点和连接该鞍点的同宿轨道,当轨线以低速擦边时,鞍点附近将会出现同宿缠绕(Homoclinic tangles),从而形成 Smale 马蹄. Fredriksson 和 Nordmark^[23]推广了以前的工作,通过引入不连续拉回映射(Discontinuity bypass mapping)建立起了多自由度冲击振子的 Poincaré 映射,这为研究高维不光滑系统提供了重要的理论工具. Bernardo^[24]等人为一般多维分段光滑动力学系统的擦边分岔和滑移分岔分析找到了统一的建立范式映射的方法,这是一个很大的进步.该方法在擦边轨道或滑移轨道(Sliding Motion)附近引入 ZDM(Zero Discontinuity Mapping)映射,通过分段流的局部展开法并利用各段的切换条件,建立起分段映射,最终组装成 ZDM 映射.

对于这类非光滑系统的研究,尽管理论还不十分成熟,但国外已经出现了一些专著.例如,Filippov^[25]专门研究了具有不连续向量场的微分方程问题,导出了十分重要的计算局部映射 Jacobi 矩阵的公式. Moreau^[26]等将各自在分析力学方面涉及接触问题的多篇论文收集在一起出版为专著.在那里,首次使用了非光滑力学(Nonsmooth mechanics)的概念.所有这些表明,非光滑动力系统是一门引起广大学者关注的新兴研究方向.目前用于处理非光滑系统的理论和方法都还十分缺乏,而适用于光滑非线性动力系统的诸多理论和方法,如奇异性理论、中心流形理论、分岔理论等在这里或者完全不适用,或者必须做较大修改.这也是有待于力学家和数学家共同努力加以解决的问题.

1.2 非光滑动力系统的定义和分类

机械系统中的非光滑特性通常是由于突加的约束作用引起的,这类约束可以是单面的,也可以是双面的;可以是弹性的,也可以是刚性的.不同约束情形下的机械系统的动力学特性虽不尽相同,但其相空间的轨线都有着共同的非光滑特征.我们先来看几个简单的带碰撞的机械运动的示例.

考虑图 1.1 所示冲击振子的情形,滑框在平衡位置附近以余弦(或正弦)规律振动,滑块 m 在弹簧牵引下在滑框中运动.在未与右侧边界接触前,滑块在水平方向上仅受弹簧拉力和阻尼力作用;当滑块接触右边界后,受力情形发生明显改变,除继续受弹簧拉力和阻尼力作用外,还受到滑框边界施加的碰撞力作用.由于碰撞过程的时间极短(约为零点几微秒),通常可以忽略,这时我们看到的现象是碰撞发生的前一时刻,滑块的运动速度方向向右,而碰撞发生之后,滑块速度方向瞬间变成向左了.如果从相空间中观察滑块的运动轨线 γ ,会发现它们在约束面 Σ 上是断开的,也就是轨线对时间不连续(图 1.2).

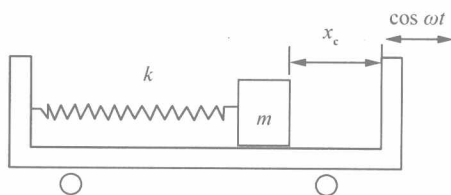


图 1.1 冲击振子示意图

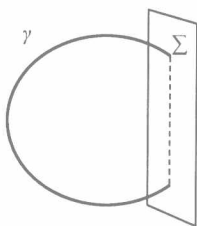


图 1.2 轨线在相空间中发生跳跃的情形

另一实例是转子机械的碰摩运动(见图 1.3),当转子的涡动幅值达到或超过其与定子的间隙值时,高速运行的转子将与定子接触并发生强烈的碰撞和摩擦。在高维相空间中,转子的运动轨线有着类似图 1.2 的跳跃行为。

以上实例说明,机械碰撞运动与一般物体运动的不同在于前者在相空间中的轨线会出现跳跃或尖峰。这类运动由于其轨线的不连续或不光滑(所谓光滑,指轨线处处连续可微)而被称为非光滑运动,而产生该类运动的系统被称为非光滑系统。

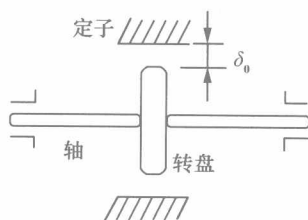


图 1.3 Jeffcott 转子示意图

1.2.1 非光滑动力系统定义

对于动力系统:

$$\dot{x} = F(x), x \in \mathcal{R}, \quad (1.1)$$

设 $\Phi_t(x), x \in \mathcal{R}$ 为该系统的流,其中 t 为时间变量。若向量场或流在某个切换面 Σ 上不满足 C^0 或 C^1 条件,即向量场或流不连续,或连续但不可微,则该系统称为非光滑动力系统。

目前对于非光滑系统的研究主要集中在分段光滑系统中,即动力学系统的运动轨线除在有限个点处不可微(或不连续)之外,其他地方都是足够光滑的(C^r 可微的)。若非特殊说明,本书中所指的非光滑动力系统都是指这个意义上的分段光滑系统。事实上,上面的两个示例都属于这类分段光滑动力学系统,而处处不可微的完全非光滑系统只在数学意义上存在。

1.2.2 非光滑动力系统的分类

按照不同的分类标准,非光滑动力系统的分类结果也各不相同。对于由微分方程描述的连续系统,根据系统向量场的非光滑程度可以将非光滑动力系统分为以下 3 类。

1.2.2.1 第 I 类非光滑动力系统

指向量场含有瞬时脉冲作用的动力系统,其非光滑程度是最高的。可统一表示为:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x), x \in V, H(x) \neq 0; \\ x(t_0^-) = G(x(t_0^+)), x \in \Sigma, H(x) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

式中: $H(x)$ 为约束函数; V 为相空间中的光滑点集; Σ 为约束方程定义的切换面; G 为 t_0 时刻系统对流施加的脉冲作用,使流产生跳跃间断。

1.2.2.2 第Ⅱ类非光滑动力系统

指向量场在某有限时间段内与切换面保持相切的非光滑动力系统,一般称作 Filippov 系统. 可统一表示为:

$$\dot{x}(t)=F(x)=\begin{cases} F_1(x), x\in V_-, H(x)<0; \\ F_s(x), x\in \Sigma, H(x)=0; \\ F_2(x), x\in V_+, H(x)>0. \end{cases} \tag{1.3}$$

这里 $F_s(x)$ 表示取值在 $[F_1, F_2]$ 之间的连续函数, 其与切换面 Σ 始终保持相切.

1.2.2.3 第Ⅲ类非光滑动力系统

指向量场连续但 Jacobi 矩阵非连续的动力系统, 一般称作连续非光滑系统. 可统一表示为:

$$\dot{x}(t)=F(x)=\begin{cases} F_1(x), x\in V_-, H(x)<0; \\ F_1=F_2, x\in \Sigma, H(x)=0; \\ F_2(x), x\in V_+, H(x)>0. \end{cases} \tag{1.4}$$

如表 1.1 所示, 向量场的非光滑程度也可表现为非连续特征出现的位置, 因此在有些文献中又称作非连续动力系统(Discontinuous System).

表 1.1 非光滑动力系统的分类

非光滑动力系统	状态空间 x	向量场 F	Jacobi 矩阵 F_x	典型力学系统
第Ⅰ类	非连续			刚性碰撞
第Ⅱ类	连续	与切换面相切		干摩擦
第Ⅲ类	连续	连续不可导	非连续	弹性碰撞

从所涉及的数学分支来看, 第Ⅰ类非光滑动力系统以脉冲微分方程(Impulsive Differential Equation)作为研究的理论基础; 而一般把第Ⅲ类系统看做第Ⅱ类系统的特例, 统一以微分包含(Differential Inclusion)作为研究的理论基础.

1.3 碰撞力的简化模型

对碰撞过程中相互作用力的合理简化是建立动力学系统模型的关键, 通常有两种不同的简化方式.

1.3.1 弹性力模型

第一种简化方式将碰撞力(或摩擦力)以分段描述的形式出现在系统运动方程中, 此时的方程(向量场)是分段光滑的. 这种简化模型的优点是力学意义明确, 但在多自由度系统中该模型的求解过程往往比较复杂, 理论分析较困难, 一般多采用数值方法进行研究.

例如图 1.4 所示的单自由度分段线性振子, 其运动方程可以描述为:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + P(x) = \beta\cos\omega t. \tag{1.5}$$

这里 α 为阻尼, β 为外扰动幅值, ω 为扰动频率. 质量块 m 所受的作用力在到达 x_c 位置前

与到达之后发生了明显改变,作用力 $P(x)$ 可以表示为如下分段光滑的形式:

$$P(x) = \begin{cases} x, & x < x_c; \\ \bar{\omega}^2 x + (1 - \bar{\omega}^2)x_c, & x \geq x_c. \end{cases} \quad (1.6)$$

其中 $\bar{\omega}^2 = (k_1 + k_2)/k_1$ 为碰撞前后的刚度比.

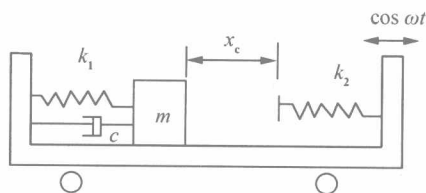


图 1.4 分段线性振子示意图

1.3.2 刚性约束模型

另一种简化方式忽略碰撞过程中的变形和时间,将其看做瞬间过程,碰撞作用作为冲量将会改变系统的动量而不影响它的位置. 此时的描述方程将是带有约束方程的微分方程,称为脉冲微分系统[见式(1.2)].

尽管这两种描述方法的形式完全不同,但却有着深刻的内在联系,在第5章中我们将证明,第二种描述方法实际上是第一种描述方法的特例,亦即在向量场分段光滑模型中令碰撞刚度趋于无穷时,即可得到脉冲微分系统模型. 在第一种情形下,向量场在切换面(发生碰撞接触的曲面)上连续但不可导,属于第Ⅲ类非光滑动力系统;而在第二种情形下,向量场在切换面上发生跳跃(不连续),因而属于第Ⅰ类非光滑动力系统. 由于这两种情形下的动力学方程是向量场分段光滑的或是带约束条件的,因而在相空间中的流一般也是分段光滑或间断的.

1.4 Poincaré 映射及其应用

通常非光滑动力系统的相空间是高维的,在分析过程中往往需要对其进行降维. 对非光滑动力系统有效降维的方法不是很多,而 Poincaré 映射是非光滑动力系统分析的一种常用降维工具. 对于非光滑动力系统,由于其相空间中流的特殊性,在构造 Poincaré 映射时会涉及映射截面的两种不同取法,即分别在相空间中选取由 $\varphi_0 = \varphi \bmod(2\pi)$ 确定的某个定相位面 Φ_{φ_0} 和由 $H(x)=0$ 确定的切换面 Σ 为 Poincaré 截面. 两种不同 Poincaré 截面对应映射的不动点集所代表的含义也不相同. 下面我们分别对这两种 Poincaré 截面以及在它上面定义的映射加以讨论.

(I) 取定相位面 Φ_{φ_0} 为 Poincaré 截面,设相空间中的非光滑流为 $\Phi_t(u)$,由流的轨线穿过截面 Φ_{φ_0} 所构成的映射关系 P 就是一个返回映射:

$$P: \Phi_{\varphi_0} \rightarrow \Phi_{\varphi_0}. \quad (1.7)$$

为了构造映射 P ,我们首先假定在定相位面 Φ_{φ_1} 与 Φ_{φ_2} 之间,轨线与约束面 Σ 至多发生一次接触(或穿透),约束面上的法向“速度” $n \cdot \dot{x} = 0$ 将 Σ 分割为 $\Sigma^+ (n \cdot \dot{x} > 0)$ 和 $\Sigma^- (n \cdot \dot{x} < 0)$ 两个区域. 根据轨线是否与约束面接触定义四类局部映射,即:从一个定相位面 Φ_{φ_1} 不接触约束面直接运动到另一个定相位面 Φ_{φ_2} 的流映射 P_I ;从一个定相位面 Φ_{φ_1} 到约束面 Σ^+ 的映射 P_{II} ;从约束面 Σ^+ 到约束面 Σ^- 的映射 P_{III} ;以及从约束面 Σ^- 到定相位面 Φ_{φ_2} 的映射 P_{IV} . 于是,我们可以得到从定相位面 Φ_{φ_1} 到 Φ_{φ_2} 发生一次碰摩的 Poincaré 映射:

$$P^* \equiv P_{IV} \circ P_{III} \circ P_{II}: \Phi_{\varphi_1} \rightarrow \Phi_{\varphi_2}. \quad (1.8)$$

一般地,映射 P 根据非光滑动力系统的具体运动由多个映射 P_I 和 P^* 复合而成. 于是对于非光滑动力系统的研究就转化为对映射 P 的研究.

我们根据映射 P 的不动点情况可以确定运动是周期、拟周期还是混沌的,以及周期运动的周期数 k 等信息. 然而,这种经典 Poincaré 映射主要是为处理光滑动力系统而建立的,对于非光滑系统,它会遗漏一些重要信息,其中包括每个运动周期内的碰撞次数. 而碰撞次数对于非光滑动力系统同样是十分重要的.

(II) 取切换面 Σ 上 $n \cdot \dot{x} > 0$ 的部分为 Poincaré 截面. 定义如下映射关系:

$$\Pi: \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+. \quad (1.9)$$

与情形(I)相似,映射 Π 可以表示为局部映射的复合形式,例如单次碰撞情形有:

$$\Pi \equiv P_{II} \circ P_I \circ P_N \circ P_{III}: \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+. \quad (1.10)$$

记 Σ 的法向量为 n , 只有当 $n \cdot \dot{x} \neq 0$ 时轨线与截面 Σ 才是横截相交的. 若 $n \cdot \dot{x} = 0$, 轨线将与截面 Σ 擦边, 此时映射 Π 不满足经典 Poincaré 映射定义的要求, 因而不能够反映非光滑动力系统运动的正确信息. 但映射 Π 直接反映了轨线与切换面 Σ 之间的接触关系, 我们根据在每个运转周期内轨线与切换面接触的个数可以确定轨线与切换面 Σ 间的接触次数 m .

1.5 碰撞运动的擦边理论

非光滑动力系统在相空间中的流一般是非光滑的, 经典的非线性动力学理论建立在光滑流的基础上, 因而不适于处理非光滑动力系统的问题. 我们必须采用新的理论和方法来研究这类问题, 擦边理论就是一种新的处理非光滑动力系统的理论, 它包括局部映射的建立, 擦边分岔分析等内容. 在此我们将 Nordmark 等人的工作应用到非光滑动力系统, 并试图用擦边理论解释非光滑动力系统的分岔及混沌运动.

1.5.1 Poincaré 映射在擦边轨道附近的局部表示

在 1.4 节中我们讨论了非光滑动力系统的 Poincaré 映射. 在一般情形下, 该映射的解析形式是无法得到的, 但我们可以将映射在某个周期不动点附近作近似展开. 由于擦边轨线在非光滑动力系统分析中占有重要的地位, 下面我们讨论 Poincaré 映射在擦边轨线附近展开的形式.

1.5.1.1 第 I 类非光滑动力系统 Poincaré 映射的局部表示

考虑由式(1.2)确定的第 I 类非光滑动力系统, 取两个时间间隔很小的定相位面 Σ_1 和 Σ_2 作为 Poincaré 截面, 并假定这两个定相位面间的流与约束面最多只发生一次碰撞, 定义以下局部映射(全局映射可根据多个局部映射复合得到):

$$P: \Sigma_1 \mapsto \Sigma_2. \quad (1.11)$$

设 $\Phi_t(x)$ 为系统(1.2)在无约束时的流, γ 为与约束面 Σ 相切的一条擦边轨线(图 1.5). 所谓擦边点, 是指满足如下条件的点 x_0 :

$$\begin{cases} H(x_0) = 0, \nabla H(x_0) \neq 0; \\ \langle \nabla H(x_0), F(x_0) \rangle = 0, \frac{d^2 H(\Phi_t(x_0))}{dt^2} \Big|_{t=0} \neq 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

这里假定擦边时刻 $t=0$; 包含擦边点的轨线就称为擦边轨线。

下面我们来构造擦边轨线 γ 附近的局部映射 P . 设擦边轨线 γ 与截面 Φ_1 的交点 O_1 (即 x_1) 到 O 点 (即 x_0) 的运行时间为 t_1 , 从 O 点到 O_2 点 (γ 与截面 Φ_2 的交点, 即 x_2) 的运行时间为 t_2 , 亦即 $\Phi_{t_1}(x_1) = x_0, \Phi_{t_2}(x_0) = x_2$.

对于截面 Φ_1 上的邻域 $B(O_1)$ 内的任意点 O'_1 , 假如保持流映射 Φ_{t_1} 作用, 轨线将穿透约束面到达 O' 点 (设位置矢量为 x^*). 设 t_c 为约束面 Σ 到 O' 点的时间, 则轨线到达约束面 Σ 的实际时间只需要 $t_1 - t_c$, 显然 t_c 满足 $H(\Phi_{-t_c}(x^*)) = 0$. 所以映射 P 中首先应包含

$$\Phi_{t_1 - t_c}: B(O_1) \mapsto \Sigma. \quad (1.13a)$$

轨线与约束面 Σ 接触后将发生跳跃, 并从 Σ 面上另一点处离开, 此时状态向量满足跳跃关系式:

$$G: \Sigma \mapsto \Sigma, x^- = Gx^+. \quad (1.13b)$$

这里 G 为常数矩阵; 就机械碰撞运动来说, 它与物体间碰撞回复系数及滑动摩擦因数有关.

轨线从 Σ 面上离开后经过时间 t'_2 到达定相位面 Σ_2 , 考虑到映射 P 为等相位面映射, 所有从 Σ_1 出发的轨线最终到达 Σ_2 的时间应是相同的, 即 $t_1 + t_2$. 因而从 Σ 到 Σ_2 的时间应为 $t'_2 = t_1 + t_2 - (t_1 - t_c) = t_2 + t_c$. 从 Σ 到邻域 $B(O_2)$ 的映射可表示为:

$$\Phi_{t_2 + t_c}: \Sigma \mapsto B(O_2). \quad (1.13c)$$

将局部映射 [式 (1.13a) ~ 式 (1.13c)] 按先后顺序进行复合, 即可得到映射 P 的最终形式:

$$P = \Phi_{t_2 + t_c} \circ G \circ \Phi_{t_1 - t_c}: B(O_1) \mapsto B(O_2). \quad (1.14)$$

令 $C = \Phi_{t_c} \circ G \circ \Phi_{-t_c}$, 则映射 P 可以表示为:

$$P = \Phi_{t_2} \circ C \circ \Phi_{t_1}: B(O_1) \mapsto B(O_2). \quad (1.15)$$

映射 $C: \Sigma \mapsto \Sigma$ 称为不连续拉回映射 (ZDM 映射), 其耗时为 0, 为一瞬间映射; 对于非碰撞情形, $C = I$ 为恒等映射.

那么, 如何区分 O 点的邻域 $B(O)$ 中的任一点 x 是属于碰撞区还是非碰撞区呢? 首先我们将 $\Phi_t(x)$ 代入约束面函数 $H(x)$ 中, 可以得到一个新函数 $h(x, t)$:

$$h(x, t) = H(\Phi_t(x)). \quad (1.16)$$

该函数表示从 x 点出发的轨线在 t 时刻到约束面 Σ 的距离. 因前面假定擦边时刻 $t=0$, 故从点 x 出发到达轨线顶点 (非擦边轨线的极值点) 的时刻也应为 0, 即 $\left. \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$. 此外我们定义一个轨线顶点的系数

$$A_g = \left. \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \right|_{t=0}. \quad (1.17)$$

一般 $A_g < 0$. 对于机械碰振系统而言, A_g 代表轨线顶点处的加速度.

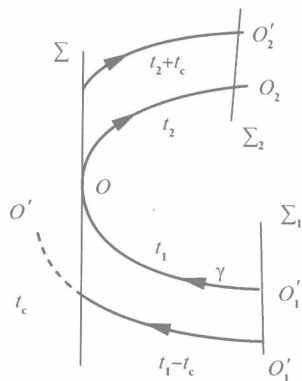


图 1.5 擦边轨线附近的流

再引入一个函数 $\phi(x) = h(x, 0)$, 它表示过 x 点的轨线顶点到 Σ 的距离. 显然, 擦边轨线满足 $\phi(x) = 0$, 而擦边点 x_0 满足 $h(x_0, 0) = 0, \frac{\partial h}{\partial t}(x_0, 0) = 0$. 根据该函数的正负号, 我们可以区分邻域 $B(O)$ 内的点是属于碰撞区还是非碰撞区. 若 $\phi(x) > 0$, 则表明轨线是穿透的, 对应于碰撞情形; 若 $\phi(x) \leq 0$, 则轨线不与约束面接触, 为非碰撞情形.

因此, 不连续拉回映射 C 的完整形式为:

$$C = \begin{cases} \Phi_{t_c} \circ G \circ \Phi_{-t_c}, \phi(x) > 0; \\ I, \phi(x) \leq 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

下面我们来确定轨线与约束面碰撞时该映射的近似表达式. 对于碰撞区中的任一点 x , 将 $\Phi_t(x)$ 在擦边点 $(x_0, 0)$ 处做 Taylor 级数展开, 得到:

$$\Phi_t(x) = x - x_0 + tF(x_0) + O(x - x_0, t). \quad (1.19)$$

将式(1.19)代入式(1.18)中的第一式, 得到:

$$C(x) = G \cdot x - (G + I) \cdot x_0 - t_c(G - I) \cdot F(x_0) + O(x - x_0). \quad (1.20)$$

另一方面, 将 $h(x, t)$ 对时间 t 在 0 时刻附近展开, 得到:

$$h(x, t) = \phi(x) + t^2 A_g / 2 + O(\phi(x), t). \quad (1.21)$$

当轨线与约束面发生碰撞时有 $\phi(x) > 0$, 此时引入新变量 χ 替换 x , 其分量除 $\chi_1 = \sqrt{\phi(x)}$ 外, 其他的保持不变. 将式(1.21)改写为:

$$h(\chi, t) = \chi_1^2 + t^2 A_g / 2 + O(\chi, t). \quad (1.22)$$

由于 t_c 满足 $h(\chi, -t_c) = 0$, 因而由式(1.22)有:

$$t_c = \sqrt{-2/A_g} \chi_1 + O(\chi). \quad (1.23)$$

将 t_c 的表达式代入式(1.20)中, 得到不连续拉回映射 C 的形式:

$$C(x) = G \cdot x - (G + I) \cdot x_0 - \sqrt{-2/A_g} \chi_1 (G - I) \cdot F(x_0) + O(x - x_0). \quad (1.24)$$

将式(1.24)中的 χ 变换回 x , 得到映射 C 的最终形式:

$$C(x) = G \cdot x - (G + I) \cdot x_0 - \sqrt{-2\phi(x)/A_g} (G - I) \cdot F(x_0) + O(x - x_0). \quad (1.25)$$

该映射中的平方根项 $\sqrt{-2\phi(x)/A_g} (G - I) \cdot F(x_0)$ 的导数在 $\phi(x) = 0$ 处不存在, 这是第 I 类非光滑动力系统产生擦边分岔的奇异性根源.

有了 $C(x)$ 表达式(1.25)后, 只需将 t_1, t_2 代入 $\Phi_t(x)$ 的近似表达式(1.19), 然后一起代入复合关系式(1.15)中便可得到映射 P 的形式.

1.5.1.2 第 III 类非光滑动力系统 Poincaré 映射的局部表示

对于向量场分段光滑的第 III 类非光滑动力系统, 设向量场为以下形式:

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), H(x) < 0 \\ F_2(x), H(x) > 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}^n, F_i: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, H: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, \quad (1.26)$$

其中 $i=1, 2$. 由 $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid H(x) = 0\}$ 确定的切换流形将相空间分为两部分, 即:

$$S^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid H(x) < 0\}, S^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid H(x) > 0\}. \quad (1.27)$$

在 S^- 空间, 运动由向量场 $F_1(x)$ 产生的流 $\Phi_t(x)$ 确定; 在 S^+ 空间, 运动由向量场 $F_2(x)$ 产生的流 $\Psi_t(x)$ 确定. 设系统(1.26)在 $(x, t) = (0, 0)$ 处与切换流形擦边 (如图 1.6 所

示), 则其需满足以下擦边条件:

$$\begin{aligned} H(0) = 0, \nabla H(0) \neq 0, \langle \nabla H(0), \mathbf{F}_i(0) \rangle = 0, \\ \frac{d^2 H(\Phi_t(0))}{dt^2} \Big|_{t=0} > 0, \frac{d^2 H(\Psi_t(0))}{dt^2} \Big|_{t=0} > 0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

在擦边轨线附近考虑系统的固定相位面映射 $P: \Sigma_1 \mapsto \Sigma_2$, 所有从 Σ_1 出发的轨线最终到达 Σ_2 的时间应是相同的, 设为 $T = t_1 + t_2$, 则从 Σ_1 出发穿过切换流形 Σ 的轨线到达其顶点 O^* 的时间也应为 t_1 ; 而从 Σ_1 出发到达切换流形 Σ 的时间应为 $t_1 - \delta$, 即:

$$\Phi_{t_1 - \delta}: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma, x_2 = \Phi_{t_1 - \delta}(x_1). \quad (1.29a)$$

在 S^+ 区域内, 设轨线运行时间为 Δ , 则有以下映射关系:

$$\Psi_\Delta: \Sigma \rightarrow \Sigma, x_3 = \Psi_\Delta(x_2). \quad (1.29b)$$

最后轨线再次穿过切换流形 Σ 进入 S^- 区域中, 其到达 Σ_2 的时间为 $T - (t_1 - \delta) - \Delta = t_2 + \delta - \Delta$, 从而该段映射为:

$$\Phi_{t_2 + \delta - \Delta}: \Sigma \rightarrow \Sigma_2, x_4 = \Phi_{t_2 + \delta - \Delta}(x_3). \quad (1.29c)$$

将局部映射式(1.29a)~式(1.29c)按先后顺序复合, 得到映射 $P: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ 的表达式:

$$P = \Phi_{t_2 + \delta - \Delta} \circ \Psi_\Delta \circ \Phi_{t_1 - \delta}. \quad (1.30)$$

该映射与擦边轨线的光滑流映射 $\Phi_{t_2} \circ \Phi_{t_1}$ 相差一个耗时为 0 的映射(称为 ZDM):

$$Z = \Phi_{\delta - \Delta} \circ \Psi_\Delta \circ \Phi_{-\delta}. \quad (1.31)$$

通过比较图 1.6 中无切换面时的轨线($x_2 O^*$ 间的虚线)和有切换面的轨线($x_2 x_3$ 间的实线), 可以看出 ZDM 映射是将穿透轨线(Σ 右侧实线)的顶点 O^* 沿虚线逆向映射到切换面上, 然后按有切换面的轨线再次映射到切换面, 最后沿无切换面轨线逆向返回到 O' 点的映射(图示轨线 $O^* \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow O'$). 因而该映射的作用结果相当于在瞬间将穿透轨线顶点 O^* 变换到附近的另一个位置 O' (设其为 x_f).

为确定 ZDM 映射, 需在擦边点 O 附近将映射 $\Phi_{-\delta}$, Ψ_Δ 和 $\Phi_{\delta - \Delta}$ 依次展开为级数(流的偏导数可用向量场表示), 并将 δ, Δ 分别展开为 $\epsilon^{1/2}$ 的级数代入其中, 而后分别利用各关键切换点与切换流形相交的关系来确定 δ, Δ 级数的系数.

(1) 首先考虑局部映射 $\Phi_{-\delta}: O^* \rightarrow x_2$, 由于 O^* 在擦边点 O 的邻域内, 可令其为 ϵx_0 , 从而有 $x_2 = \Phi_{-\delta}(\epsilon x_0)$. 将该式右边在擦边点 $(0, 0)$ 处作 Taylor 级数展开, 有

$$\begin{aligned} x_2 = \epsilon x_0 - \delta \mathbf{F}_1 + \delta^2 \mathbf{a}_1 - \epsilon \delta \mathbf{b}_1 x_0 - \delta^3 \mathbf{c}_1 - \epsilon^2 \delta \mathbf{d}_1 x_0^2 + \epsilon \delta^2 \mathbf{e}_1 x_0 \\ + \delta^4 \mathbf{f}_1 - \epsilon^3 \delta \mathbf{g}_1 x_0^3 + \epsilon^2 \delta^2 \mathbf{h}_1 x_0^2 - \epsilon \delta^3 \mathbf{j}_1 x_0 + O(5). \end{aligned} \quad (1.32)$$

这里 $\mathbf{a}_1 \sim \mathbf{j}_1$ 为各展开项系数矩阵或矢量, 由向量场 $\mathbf{F}_1(x)$ 对 x 的各阶偏导数表示(见附录 1).

由于 x_2 位于切换面 Σ 上, 故满足 $H(x_2) = 0$. 为简化分析, 我们假定 $H(x)$ 是近似线性函数, 即不包含 x 的 2 至 4 次幂项. 则将式 $H(x_2) = 0$ 展开后可得以下正交条件

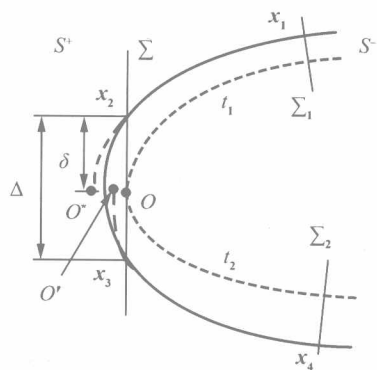


图 1.6 第Ⅲ类非光滑动力系统轨线擦边示意图

$$\langle \nabla H, \mathbf{x}_2 \rangle = O(5). \quad (1.33)$$

将式(1.32)代入式(1.33)中,有

$$\begin{aligned} \epsilon \mathbf{x}_{0H} - \delta \mathbf{F}_{1H} + \delta^2 \mathbf{a}_{1H} - \epsilon \delta (\mathbf{b}_1 \mathbf{x}_0)_H - \delta^3 \mathbf{c}_{1H} - \epsilon^2 \delta (\mathbf{d}_1 \mathbf{x}_0^2)_H + \epsilon \delta^2 (\mathbf{e}_1 \mathbf{x}_0)_H \\ + \delta^4 \mathbf{f}_{1H} - \epsilon^3 \delta (\mathbf{g}_1 \mathbf{x}_0^3)_H + \epsilon^2 \delta^2 (\mathbf{h}_1 \mathbf{x}_0^2)_H - \epsilon \delta^3 (\mathbf{j}_1 \mathbf{x}_0)_H + O(5) = 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

这里下标 H 表示矢量沿 ∇H 方向投影, 即: $\mathbf{y}_H = \langle \nabla H, \mathbf{y} \rangle$. 由擦边条件(1.28)可知式(1.34)第2项为0, 该式确定了时间 δ 的值.

为从式(1.34)中求解 δ , 我们将 δ 也展开为 ϵ 的级数形式:

$$\delta = \gamma_1 \epsilon^{\frac{1}{2}} + \gamma_2 \epsilon + \gamma_3 \epsilon^{\frac{3}{2}} + O(\epsilon^2). \quad (1.35a)$$

将式(1.35a)代入式(1.34)中, 并令 ϵ 的各阶项系数为0, 即可得到式(1.35a)中的各项系数 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \sqrt{-\frac{\mathbf{x}_{0H}}{\mathbf{a}_{1H}}} = \sqrt{-2 \frac{\langle \nabla H, \mathbf{x}_0 \rangle}{\langle \nabla H, \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}_1 \rangle}}, \\ \gamma_2 = \frac{(\mathbf{b}_1 \mathbf{x}_0)_H + \gamma_1^2 \mathbf{c}_{1H}}{2\mathbf{a}_{1H}}, \\ \gamma_3 = -\frac{\gamma_2^2 \mathbf{a}_{1H} + \gamma_1^2 (\mathbf{e}_1 \mathbf{x}_0)_H - \gamma_2 (\mathbf{b}_1 \mathbf{x}_0)_H - 3\gamma_1^2 \gamma_2 \mathbf{c}_{1H} + \gamma_1^4 \mathbf{f}_{1H}}{2\gamma_1 \mathbf{a}_{1H}}. \end{cases} \quad (1.35b)$$

将式(1.35)代入式(1.32), 可以得到 $\mathbf{x}_2$ 的近似解表达式:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 \epsilon^{\frac{1}{2}} + \mathbf{x}_2 \epsilon + \mathbf{x}_3 \epsilon^{\frac{3}{2}} + O(\epsilon^2). \quad (1.36a)$$

这里

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = -\gamma_1 \mathbf{F}_1, \\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0 - \gamma_2 \mathbf{F}_1 + \gamma_1^2 \mathbf{a}_1, \\ \mathbf{x}_3 = -\gamma_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{x}_0 + 2\gamma_1 \gamma_2 \mathbf{a}_1 - \gamma_3 \mathbf{F}_1 - \gamma_1^3 \mathbf{c}_1. \end{cases} \quad (1.36b)$$

(2) 接着我们考虑映射 $\Psi_\Delta: \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3$, 即: $\mathbf{x}_3 = \Psi_\Delta(\mathbf{x}_2)$. 同样地将该式右边在擦边点附近展开, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 + \Delta \mathbf{F}_2 + \Delta^2 \mathbf{a}_2 + \Delta \mathbf{b}_2 \mathbf{x}_2 + \Delta^3 \mathbf{c}_2 + \Delta \mathbf{d}_2 \mathbf{x}_2^2 + \Delta^2 \mathbf{e}_2 \mathbf{x}_2 \\ + \Delta^4 \mathbf{f}_2 + \Delta \mathbf{g}_2 \mathbf{x}_2^3 + \Delta^2 \mathbf{h}_2 \mathbf{x}_2^2 + \Delta^3 \mathbf{j}_2 \mathbf{x}_2 + O(5), \end{aligned} \quad (1.37)$$

并利用 $\mathbf{x}_3$ 位于切换面 Σ 上的条件 $\langle \nabla H, \mathbf{x}_3 \rangle = O(5)$, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{2H} + \Delta \mathbf{F}_{2H} + \Delta^2 \mathbf{a}_{2H} + \Delta (\mathbf{b}_2 \mathbf{x}_2)_H + \Delta^3 \mathbf{c}_{2H} + \Delta (\mathbf{d}_2 \mathbf{x}_2^2)_H + \Delta^2 (\mathbf{e}_2 \mathbf{x}_2)_H \\ + \Delta^4 \mathbf{f}_{2H} + \Delta (\mathbf{g}_2 \mathbf{x}_2^3)_H + \Delta^2 (\mathbf{h}_2 \mathbf{x}_2^2)_H + \Delta^3 (\mathbf{j}_2 \mathbf{x}_2)_H = O(5). \end{aligned} \quad (1.38)$$

这里 $\mathbf{a}_2 \sim \mathbf{j}_2$ 为各展开项系数矩阵或矢量, 由向量场 $\mathbf{F}_2(\mathbf{x})$ 对 $\mathbf{x}$ 的各阶偏导数表示(见附录1). 由擦边条件, 式(1.38)中第2项为0, 由该式可确定时间 Δ 的值.

为求解 Δ , 将 Δ 也展开为 ϵ 的级数形式:

$$\Delta = v_1 \epsilon^{\frac{1}{2}} + v_2 \epsilon + v_3 \epsilon^{\frac{3}{2}} + O(\epsilon^2). \quad (1.39a)$$

将其代入式(1.38)中, 并利用式(1.36), 而后令 ϵ 的各阶项系数为0, 可得式(1.39a)中的各项系数 v_1, v_2, v_3 ,