



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学

第三版 下册

◎ 金 路 童裕孙 於崇华 张万国 编



高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学

第三版

下册

金路 童裕孙 於崇华 张万国 编

高等教育出版社

内容提要

本书在第二版的基础上修改而成,根据大量的教学反馈信息和更加深刻的教学体会,对原书作了大量的修改,并增删了部分内容,其目的是使本书更适用于大学教学基础课的实际教学过程,符合实际需要,并且使教学内容更易于学生理解和接受。本书的主要特色是科学组织并简洁处理相对成熟的素材,对分析、代数、几何等方面作了统一的综合处理,揭示数学的本质、联系和发展规律;注重数学概念的实际背景和几何直观的引入,强调数学建模的思想和方法;在适度运用严格数学语言的同时,注意论述方式的自然朴素、易于理解;配有丰富多样的例题和习题,便于学生理解和训练。全书的深度和广度能适应多数专业的数学基础教学需要。

全书分上、下两册。上册包括一元微积分、线性代数、空间解析几何;下册包括多元微积分、级数、常微分方程、概率论与数理统计。

本书可作为高等学校理科、工科和技术学科等非数学类专业的教材,也可供经济、管理等有关专业使用,并可作为上述各专业的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/金路等编. —3版. —北京:高等教育出版社, 2008. 11

ISBN 978-7-04-024902-6

I. 高… II. 金… III. 高等数学-高等学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 151864 号

策划编辑	于丽娜	责任编辑	李华英	封面设计	张申申
责任绘图	郝林	版式设计	余杨	责任校对	王效珍
责任印制	尤静				

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	北京铭成印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2001 年 12 月第 1 版
印 张	28		2008 年 11 月第 3 版
字 数	510 000	印 次	2008 年 11 月第 1 次印刷
		定 价	31.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 24902-00

第三版前言

本书第二版自出版以来被多所学校选用,许多具有丰富教学经验的教师提供了积极、中肯的意见和建议,使用本教材的学生也经常谈及他们的体会。第三版已列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材,为保证修订工作的质量,我们在较大范围内听取了教师们的意见,并认真总结了多年来的教学经验,对教材作了全面地审阅、思考和修改。

在这次修订过程中,我们在原教材编写宗旨和结构框架的基础上作了以下进一步的考虑:

一、由于数学的思想、方法和技术在自然科学、工程技术、社会科学以及日常生活中发挥着越来越重要的作用,对数学的教学提出了更高的要求,因此大学数学的教学要能够在不增加或少增加教学学时的前提下,使学生学到更丰富、更实用的现代数学知识,具有更强的运用数学方法、工具和技术的能力,以适应时代发展的需要。因此,我们对教材内容的取材深度与广度作了反复斟酌,对全书各章节从整体上作了全面梳理,并作了适当的增删。

二、进一步对教材内容的安排作综合考虑和整体优化,致力于以现代数学的观点处理经典的素材,加强了分析、代数、几何之间的有机结合与相互渗透。因此,我们对教材的相关内容,特别是对线性代数部分作了加工和修改,希望使之更加符合现代数学的发展趋势,更贴近于现代科技的要求。

三、注重教材内容的叙述更加符合认知规律,强调数学概念的实际背景和几何直观,致力于把形式逻辑推导所掩盖的背景来源、概念间的内在联系、解决问题的思想方法等生动而又直接地揭示出来,引导学生逐步理解数学的本质和发展规律。同时,更加强调数学建模的思想和方法,注重培养学生的应用能力和创新意识。因此,我们对全书许多部分的叙述和题材作了调整、修改和补充,并重新编写了概率论与数理统计部分。

四、注重数学教学的严密性、系统性和揭示科学的思想性,注意恰当运用严格的数学语言与推理,使学生适度接触精彩的数学抽象,积累逻辑思维的经验,锻炼理性思维和科学辨析能力。因此,我们对全书从整体叙述上作了进一步的加工,使之更确切、科学和规范。

五、根据教学需要增删了一些例题,调整了部分习题,以利于提高教学与训练的效果。

本次修订工作由金路和童裕孙完成。修订工作得到了复旦大学教务处、复

旦大学数学科学学院和学院同事的支持，我们在此谨致衷心的感谢。我们深知作为基础课教材“没有最好，只有更好”，因而诚挚地恳请使用本教材的教师和同学们继续提出批评和意见。

编者

2008 年 4 月

第二版前言

本书第一版问世以来，我校理科和技术学科各专业、经济类各专业乃至医学类各专业的高等数学课程均采用了这本教材。在使用过程中，不少教师和学生提出了十分中肯的意见和很好的建议，为我们这次修订提供了充足的依据。

修订后的第二版并不改变原教材的编写宗旨、结构框架和主要内容，因为原书的特色正是通过它们体现出来的。主要修订之处在于：改写了原书中叙述不太确切或由于条理、文字等因素致使效果不佳的段落；对教材中过于简略的部分作了调整和充实；增加了一些必要的或较精彩的例题；删去了若干多次同类重复或易导致歧义的题目，并补充了一些综合性的习题。这些修改散见于全书各篇，其中变动最大的是线性代数各章节。在这一部分中，我们在多处更改了例题，重作了证明，调整了叙述次序，以使条理更清晰，全书风格也更为一致。此外，我们还补充了关于曲率、反常积分等基本内容。对每一部分的修改，我们都反复推敲，再三权衡，目的是使这本教材更适用于大学数学基础课的实际教学过程。

如果说本书第一版因编写时间匆促，略嫌粗糙的话，这一版因有大量教学信息的反馈，使我们能较好地把握修订质量。我们深知一本成熟的教材须久经锤炼，因而仍然热切地期望广大师生一如既往，不吝指正，以期通过共同努力，把这本教材的质量提升到一个新的台阶。

编者

2003年8月

第一版前言

大学数学课程的建设历来受到高等院校教育工作者的广泛关注，适应不同需要的教科书品种繁多。在长期的教学工作中，我们曾接触过一些很有特色的教材，受益匪浅。然而，课堂教学的实践、与各专业老师的共同探讨以及来自学生的信息反馈，仍使我们多年前就萌发了编写一本通用于我校理科和技术学科各专业的高等数学教材的意向。

计划早已列出，大纲亦几经斟酌，年复一年却迟迟未能下笔。这固然缘于诸多客观因素，其实因为我们深知这门课程的分量，所以希望再看一看、想一想，冷静地把编写思路整理得更清晰些。在此期间，教育部组织并启动了高等教育改革研究的计划，理科非数学类高等数学课程的建设被列为其中一项。作为项目参加成员，我们有机会与兄弟院校的同行一起作深入的研讨，从教育观念上达到了一个明确而重要的共识：大学数学教育的目标不仅在于为学生提供学习专业知识的工具，更重要的在于引导学生掌握一种现代科学的语言，学到一种理性思维的模式，接受包括归纳、分析、演绎等各项数学素质的训练。根据这一理解，就有可能较为自觉而准确地把握好知识传授与能力培养的关系、基本技能训练和应用意识熏陶的关系、逻辑体系的继承性与教学内容现代化的关系。

基于对高等数学课程的认识与体验，我们在教材编写过程中特别注意了以下几个方面：

首先，大学数学基础课的教材，无疑应包含分析、代数、几何和随机数学这几部分的内容。作为一部完整的教材，须对全书的内容作统一的综合处理，使其不致沦为零星素材的简单堆砌。在本书中，第二篇线性代数与空间解析几何既是一个相对独立的篇章，又在第一篇一元函数微积分与第三篇多元函数微积分之间架起了一座桥梁。线性代数的语言与方法渗透于多元微积分的展开之中，将有利于学生对这两方面知识的理解与深化。

其次，由于本教材以非数学类学生为对象，取材的深度与广度自有一定限制。我们一方面尽量以学生易于接受的自然形式，展开各章节的数学材料，以帮助学生理解概念提炼的必然性、条件引入的合理性和证明过程的科学性；另一方面也注意恰当地运用严格的数学语言与推理，切实保证教材必要的系统性和严谨性，使学生有机会适度接触精彩的数学抽象，积累理性思维的经验，这是提高学生数学素质的重要环节。

再次，我们致力于以现代数学的观点统率经典的内容。在避免人为地提高课程平台的前提下，精心组织并简洁处理相对成熟的材料，在一定程度上缩小教材的篇幅，以适应多数专业的学时分配。

同时，我们在较为广泛的范围内选取了一些应用性的例题和习题，并试图从中体现数学建模的思想与方法，以培养学生的应用意识，提高学生融会贯通地分析问题、解决问题的能力。教学实践证明这是增强高等数学课程活力的有效途径。

此外，我们在注意力求使教材的基本内容准确到位的同时，还先易后难地配置了相当数量的习题。例题和习题的选取兼顾了各类学生的需要，教师可根据学生的不同程度选择使用。

一般说来，大学教材并非教师照本宣科的本。同一本教材可以使用于不同的对象，教出不同的风格。我们把本书的目标定位在一本适用于理工类大部分专业的数学基础课程的教材，其内容经选择也应适用于对数学要求较高的其他各类（如经管、师范）有关专业的高等数学课程。作为本书前身的同名讲义，曾经在我校物理、电子工程、材料、电光源等系的各个大班和理、化、生各理科基地班使用。从2001年秋起，我校物理类、化学类各系和生命学院各系将同时使用这本教材。根据我们的经验，学生在两个学期内能学完前四篇的全部内容，第五篇可作为第三学期数学课程的内容。对于仅开设两学期数学课程的院系，为讲完全书主要内容，可以略去第二篇的“线性空间和线性变换”一章中除特征值问题外的其他各节、第三篇的“多元函数积分学”一章中关于曲线积分、曲面积分和场论等内容以及第五篇的“数理统计”一章中的部分内容。

复旦大学数学系每年都有近二十名教师承担高等数学的教学任务。多年来，我们在与大家的教学交流中获得了大量的启示；朱胜林教授、曹源副教授与翁史伟老师和我们一起试用过这本讲义，提出了许多宝贵的意见；在本书编写过程中，我们还自始至终获得了复旦大学前副校长严绍宗教授、副校长孙莱祥教授的关心与鼓励；教务处方家驹教授多年来一直支持着我们的工作；高等教育出版社的胡乃同同志和徐刚同志以及上海分部的陈建新主任为本书的顺利出版提供了热情的帮助，值此本书面世之际，我们谨向以上诸位致以诚挚的谢意。

限于水平，我们的一些主观设想写成文字后也许走了样，全书中的错误和缺陷也在所难免。殷切地期望广大读者不吝指正，希望通过共同努力，经日后修订，使这本教材日趋成熟。

编者

2001年3月于复旦

目 录

第三篇 多元函数微积分

第七章 多元函数微分学	2
§1 多元函数的极限与连续	2
$\mathbf{R}^n$ 中的点集	2
多元函数	3
多元函数的极限	5
多元函数的连续性	7
有界闭区域上连续函数的性质	8
习题	10
§2 全微分与偏导数	11
全微分	11
偏导数	12
偏导数与全微分的计算	15
空间曲面的切平面(1)	16
高阶偏导数	16
可微映射	19
空间曲线的切线(1)	21
习题	22
§3 链式求导法则	24
多元函数求导的链式法则	24
全微分的形式不变性	28
复合映射的导数	29
坐标变换下的微分表达式	30
习题	32
§4 隐函数微分法及其应用	35
一元函数的隐函数存在定理	35
多元函数的隐函数存在定理	36
多元函数组的隐函数存在定理	37
空间曲面的切平面(2)	41

空间曲线的切线(2)	43
习题	45
§5 方向导数、梯度	47
方向导数	47
数量场的梯度	49
等值面的法向量	50
势量场	51
习题	52
§6 Taylor 公式	53
二元函数的 Taylor 公式	53
n 元函数的 Taylor 公式	56
习题	57
§7 极值	57
多元函数的无条件极值	57
函数的最值	61
最小二乘法	62
条件极值	67
习题	71
第八章 多元函数积分学	74
§1 重积分的概念及其性质	74
重积分概念的背景	74
重积分的概念	75
重积分的性质	76
习题	77
§2 二重积分的计算	78
直角坐标系下二重积分的计算	78
二重积分的变量代换法	81
极坐标系下二重积分的计算	84
习题	86
§3 三重积分的计算及应用	87
直角坐标系下三重积分的计算	87
三重积分的变量代换	90
柱坐标变换和球坐标变换	90
重积分的应用: 质心与转动惯量	92
重积分的应用: 引力	94

习题	96
§ 4 反常重积分	97
无界区域上的反常重积分	97
无界函数的反常重积分	101
习题	103
§ 5 两类曲线积分	104
曲线的弧长	104
第一类曲线积分的概念及性质	105
第一类曲线积分的计算	106
第二类曲线积分的概念及性质	108
第二类曲线积分的计算	110
两类曲线积分的关系	111
习题	112
§ 6 第一类曲面积分	113
曲面的面积	114
第一类曲面积分的概念	116
第一类曲面积分的计算	117
习题	119
§ 7 第二类曲面积分	119
曲面的侧与有向曲面	119
第二类曲面积分的概念及性质	121
第二类曲面积分的计算	123
习题	127
§ 8 Green 公式和 Stokes 公式	128
Green 公式	129
Stokes 公式	134
习题	137
§ 9 旋度和无旋场	139
环量和旋度	139
无旋场、保守场和势量场	141
原函数	144
习题	147
§ 10 Gauss 公式和散度	147
流场的流出量	148
Gauss 公式	150

散度	153
Hamilton 算符和 Laplace 算符	155
习题	156
第九章 级数	159
§ 1 数项级数	159
级数的概念	159
级数的基本性质	162
级数的 Cauchy 收敛准则	164
正项级数的比较判别法	165
正项级数的 Cauchy 判别法与 d'Alembert 判别法	169
正项级数的积分判别法	171
Leibniz 级数	173
* 更序级数	175
级数的乘法	176
习题	178
§ 2 幂级数	181
函数项级数	181
幂级数	182
幂级数的收敛半径	182
幂级数的性质	185
* 幂级数性质的证明	189
函数的 Taylor 级数	192
初等函数的 Taylor 展开	194
习题	200
§ 3 Fourier 级数	202
周期为 2π 的函数的 Fourier 展开	203
正弦级数和余弦级数	205
任意周期的函数的 Fourier 展开	207
Fourier 级数的收敛性	208
最佳平方逼近	212
习题	214
§ 4 Fourier 变换初步	216
Fourier 变换和 Fourier 逆变换	216
Fourier 变换的性质	219
习题	221

第四篇 常微分方程

第十章 常微分方程	224
§ 1 常微分方程的概念	224
习题	226
§ 2 一阶常微分方程	226
变量可分离方程	227
齐次方程	230
全微分方程	232
线性方程	235
Bernoulli 方程	237
数学建模	239
习题	242
§ 3 二阶线性微分方程	245
二阶线性微分方程	245
线性微分方程的解的结构	246
二阶常系数齐次线性微分方程	249
二阶常系数非齐次线性微分方程	252
Euler 方程	257
习题	259
§ 4 可降阶的高阶微分方程	262
方程形式为 $F(x, y^{(n)}) = 0$	262
方程形式为 $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$	264
方程形式为 $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$	268
习题	270
§ 5 微分方程的幂级数解法	271
习题	276
§ 6 常系数线性微分方程组简介	276
习题	280

第五篇 概率论与数理统计

第十一章 概率论	282
§ 1 概率	282
随机事件	282
事件之间的关系与运算	284

概率的概念.....	285
古典概率.....	286
几何概率.....	288
概率的公理化定义与概率的性质.....	289
习题	293
§ 2 条件概率与事件的独立性	295
条件概率.....	295
全概率公式和 Bayes 公式	297
事件的独立性.....	300
Bernoulli 概型	303
习题	304
§ 3 一维随机变量	306
随机变量的概念.....	306
离散型随机变量.....	308
连续型随机变量.....	313
习题	322
§ 4 二维随机变量	324
二维随机变量.....	324
二维离散型随机变量.....	325
二维连续型随机变量.....	328
随机变量的相互独立性.....	331
随机变量函数的分布.....	333
习题	339
§ 5 随机变量的数字特征	342
数学期望.....	342
随机变量的函数的数学期望.....	345
方差和标准差.....	346
协方差与相关系数.....	352
习题	358
§ 6 大数定律和中心极限定理	361
Чебышев 不等式	362
大数定律.....	362
中心极限定理.....	365
习题	369
第十二章 数理统计	371

§ 1 样本与抽样分布	371
总体与样本	371
统计量	373
三个重要分布	375
抽样分布	378
习题	381
§ 2 参数估计	382
点估计	382
矩估计法	383
极大似然估计法	385
估计量优劣的评判标准	388
区间估计	392
习题	398
§ 3 假设检验	401
假设检验的基本概念	401
单个正态总体均值与方差的假设检验	403
两个正态总体的均值差与方差比的假设检验	407
总体分布的假设检验	409
习题	412
附表 1 Poisson 分布表	415
附表 2 标准正态分布数值表	418
附表 3 χ^2 分布的上临界值表	420
附表 4 t 分布的上临界值表	422
附表 5 F 分布的上临界值表	423

第三篇 多元函数微积分

在丰富多彩的现实世界中，各类客观事物的发展过程一般都受到众多因素的制约，其中，有些因素的作用基本上是独立的，更多的因素却相互关联，相互影响，彼此交织地作用着，远比单一因素的效应复杂。为了定量地刻画由多个因素决定的客观对象的变化规律，经常需要作多元分析。多元函数微积分就是多元分析的重要基础。在多元微积分中，有关极限、连续、导数、微分和积分的概念虽然与一元微积分中的相应概念源于同类问题的思考，并遵循类似的分析途径，但是，它们具有一系列新的特点，同时，面对多元情况下形态各异的种种对象，还出现了许多更为复杂的问题，需要引入更为深刻的方法和技巧，作出本质上比较一般的讨论。本篇的前两章就来建立多元函数的微分学与积分学。

本篇还将介绍有着广泛应用的级数理论。如果把数列看作自然数集上的函数，那么函数列便可视为一类特殊的多元函数。由于与之相应的函数项级数是表示函数和研究函数性质的重要工具，因而级数理论也是微积分的一个重要组成部分。

第七章

多元函数微分学

本章讨论的问题类同于一元函数微分学, 主要是以极限为工具研究有关增量、变化率、极值等函数的局部性质, 并由此进而分析函数的最值等某些整体性质. 由于多元函数定义于 n 维线性空间, 而微分学基本思想之一又是局部线性化, 因而线性代数的理论和方法在多元函数微分学中起着重要的作用.

§ 1 多元函数的极限与连续

$\mathbf{R}^n$ 中的点集

下面要展开讨论的 n 元函数定义于 $\mathbf{R}^n$ 的子集上. 为了讨论 n 元函数的变化性态, 首先需要介绍一些 $\mathbf{R}^n$ 中与距离有关的点集的基本概念与性质.

上一篇已经在 $\mathbf{R}^n$ 中引入范数: 对 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, 称

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

为 $\mathbf{x}$ 的范数. 利用范数, 可以自然地引入 $\mathbf{R}^n$ 中两点的距离, 即对于 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, 规定 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的距离

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

显然, 这样规定的距离具有以下性质:

- (1) 非负性: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$; $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- (2) 对称性: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$.
- (3) 三点不等式: $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$.

设 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$. 记

$$O(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \mid d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) < r\},$$

称 $O(\mathbf{x}, r)$ 为 $\mathbf{x}$ 的 r 邻域.

定义 7.1.1 设 $S \subset \mathbf{R}^n$, 如果存在 $r > 0$, 使得

$$O(\mathbf{x}, r) \subset S,$$

则称 $\mathbf{x}$ 为 S 的内点; 如果对于任何 $r > 0$, 均有