控制科学与工程研究生系列教材

线性系统理论与设计(中英文版)

姜长生　吴庆宪
江　驹　陈　谋／编

科学出版社
www.sciencep.com

控制科学与工程研究生系列教材

线性系统理论与设计

（中英文版）

姜长生　吴庆宪
江　驹　陈　谋　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书内容涵盖控制学科各专业所必需的基础知识，以时域中的线性系统理论知识为主要内容，同时兼顾控制的频域知识和几何知识的叙述。其中有系统的数学描述、系统的可控性和可观测性、系统的最小实现、系统的稳定性和系统的反馈控制与设计。本书在内容论述上力求精练，在概念叙述上力求清晰，理论分析上力求严谨，系统设计方法和算法介绍上力求实用，例证说明上力求简明，从而尽力使全书达到好教易学的效果。

本书可作为控制各专业以及与控制相关的各专业的高年级本科生和研究生的教材，也可供相关专业的科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性系统理论与设计：汉英对照 / 姜长生等编. —北京：科学出版社，2008
(控制科学与工程研究生系列教材)
ISBN 978-7-03-022655-6

Ⅰ. 线… Ⅱ. 姜… Ⅲ. 线性系统理论-研究生-教材-汉、英 Ⅳ. O231.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 116436 号

责任编辑：余 江 潘继敏 / 责任校对：宋玲玲
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008 年 12 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2008 年 12 月第一次印刷 印张：27
印数：1—3 000 字数：621 000

定价：50.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换〈长虹〉)

前　言

线性系统理论是控制专业本科生和研究生必须掌握的重要基础理论，也是许多与控制相关专业的学生应该具备的重要知识。不论是对继续深造，还是对今后的工作线性系统理论都是十分重要和影响深远的。编者从事这门研究生课程的教学长达二十余年，深感编写一本适合本科生和研究生学习的教材或教科书是非常必要的，它不仅有利于研究生教学，也有利于渴求进修的广大青年学子。

本书内容涵盖控制学科各专业所必需的基础知识，以时域中的线性系统理论知识为主要内容，同时兼顾控制的频域知识和几何知识的叙述。本书内容力求精练，在概念论述上力求清晰，理论分析上力求严谨，系统设计方法和算法介绍上力求实用，例证说明上力求简明，从而尽力使全书达到好教易学的效果。

本书在编写过程中参考了国内外同行的相关著作和相关文献，并引用了他们的成果和论述，其中特别要感谢清华大学的郑大钟教授、美籍华人陈启宗教授、北京航空航天大学的程鹏教授等，同时感谢书中所引文献的作者们。本书在出版过程中得到了南京航空航天大学研究生院和国家自然科学基金(项目号:90716028)的资助，在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中错误和不当之处一定难免，热忱欢迎来自各方面的批评、指教。编者衷心地感谢每一位提出批评和指教的读者。

编　者

2008 年 6 月

目录

CONTENTS

第1章 线性系统的数学描述

根据系统运动过程的物理或化学规律所写出的，描述系统动态和静态行为的数学表达式，称为系统的数学描述或数学模型。然而，现实系统的数学模型往往是非线性的，为了研究的方便，在系统某个运行点附近将其看成是线性的，也就是说，在该点对系统的非线性数学模型进行线性化处理，这对于解决实际工程问题是足够准确的。称线性化处理以后的数学模型为线性模型，由线性模型描述的一类系统称为线性系统。线性系统理论不研究具体的物理或化学系统，而是在线性数学模型的基础上研究系统的结构性质、系统的分析和设计方法。

系统的描述方法主要分两大类：实变量法和复变量法，实变量法有状态方程描述法和微分算子方程描述法，它以时间 t 为实变元直接研究系统行为随时间变化的情形，又称时域法；复变量法有传递函数矩阵描述法和矩阵分式描述法，它以复变数 s 为变元，与频率有关，并通过系统随其输入量频率的变化所表现出的行为来研究系统的特性。此法又称频域法。

1.1 系统的输入-输出描述

1.1.1 基本概念

给定 p 个输入，q 个输出的系统如图1-1所示。图中，$\boldsymbol{u}=[u_1,u_2,\cdots,u_p]^{\mathrm{T}}\in \boldsymbol{R}^{p\times 1}$，$\boldsymbol{y}=[y_1,y_2,\cdots,y_q]^{\mathrm{T}}\in \boldsymbol{R}^{q\times 1}$ 分别为系统的输入和输出向量信号。假定，系统的内部信息是未知的，现仅研究系统输入 $\boldsymbol{u}$ 和输出 $\boldsymbol{y}$ 之间的数量关系，建立 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的数学方程式，称为系统的输入-输出描述。若 $p=q=1$，则系统为单输入-单输出系统(single input-single output system)，亦称单变量系统(single variable system)，否则称多变量系统(multivariable system)。系统输入 $\boldsymbol{u}$ 和输出 $\boldsymbol{y}$ 有定义的时间区间为 $(-\infty,\infty)$ 或 $[t_0,t_1]$，记为 $\boldsymbol{u}_{(-\infty,\infty)}$，$\boldsymbol{y}_{(-\infty,\infty)}$ 或记为 $\boldsymbol{u}_{[t_0,t_1]}$，$\boldsymbol{y}_{[t_0,t_1]}$。

图1-1 多输入-多输出系统

1. 松弛性

若系统在 t_0 时刻的输出仅取决于 t_0 时刻的输入，则称该系统为瞬时系统，或无记忆系统。仅由电阻元件组成的网络是这种系统的例子。然而，更普遍、更一般的不是瞬时系统，即系统在 t_1 时刻的输出不仅取决于 t_0 时刻的输入，也取决于 t_0 以前和(或)以后的输入。这对于讨论系统输入和输出之间的关系是不方便的。为此，假定在 $t=t_0$ 时刻，系统的输出 $\boldsymbol{y}(t)(t\geqslant t_0)$ 仅由输入 $\boldsymbol{u}(t)(t\geqslant t_0)$ 唯一确定，系统的这一性质称为松弛性。就物理系统而言，从能量的观点来看，这就意味着若系统在 t_0 时刻是松弛的，就表明系统在 t_0

时刻不储存任何能量。在工程实践中，总可以假定系统在 $t=-\infty$ 时是松弛的或静止的。这时若加入系统的输入为 $\boldsymbol{u}(-\infty,\infty)$，那么由之确定的系统的输出完全由 $\boldsymbol{u}(-\infty,\infty)$ 唯一确定。我们称 $t=-\infty$ 松弛或静止的系统为初始松弛系统。如果系统具有松弛性，那么系统的输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 和输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 间有如下对应关系，即

$$\boldsymbol{H}:\quad \boldsymbol{u}\to\boldsymbol{y};\quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{u} \tag{1-1}$$

式中，$\boldsymbol{H}$ 为算子，它由系统的特性唯一确定。式(1-1)也可以表示成：

对 t_0 时刻松弛的系统

$$\boldsymbol{y}_{[t_0,\infty)}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}_{[t_0,\infty)}$$

对初始松弛的系统

$$\boldsymbol{y}_{(-\infty,\infty)}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}_{(-\infty,\infty)} \tag{1-2}$$

2. 线性性质

定义 1-1 若系统在 $t=t_0$ 时刻具有松弛性，并设 α_1，α_2 为任意两个实数，$\boldsymbol{u}_1(t)$，$\boldsymbol{u}_2(t)$ 是任意两个输入（$t\geqslant t_0$），如果有

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{H}(\alpha_1\boldsymbol{u}_1+\alpha_2\boldsymbol{u}_2)=\alpha_1\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}_1+\alpha_2\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}_2=\alpha_1\boldsymbol{y}_1+\alpha_2\boldsymbol{y}_2 \tag{1-3}$$

式中，$\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$ 为对应于 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ 的输出，则称系统满足线性性质，或称系统为线性系统。

式(1-3)包含可加性和齐次性，可加性和齐次性合称为叠加原理。符合叠加原理的系统就是线性系统。

应当指出，可加性和齐次性是两个不可替代的概念，具有齐次性的系统并不意味着可加性也成立。例如，下式描述的单变量系统输入-输出之间的关系，对所有 t 有

$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{cases}\dfrac{\boldsymbol{u}^2(t)}{\boldsymbol{u}(t-1)}, & \boldsymbol{u}(t-1)\neq 0\\ 0, & \boldsymbol{u}(t-1)=0\end{cases}$$

易证，该系统满足齐次性，但不满足可加性。同样，满足可加性的系统也不意味着齐次性成立。例如，若假定 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 为任意实数，则不可能使 α 为无理数时，下式也成立：

$$\boldsymbol{H}(\alpha_1\boldsymbol{u}+\alpha_2\boldsymbol{u}+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{u})=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}$$

3. 因果性

若系统在 t 时刻的输出，不取决于 t 时刻之后的输入，而仅取决于 t 时刻之前的输入，即 t 时刻(不包括 t 时刻)以后的输入对系统的输出不产生影响，称这样的系统具有因果性。简言之，任何实际物理过程，其结果不可能在引起这种结果的原因发生之前产生。

对于具有因果性的松弛系统，其输入-输出之间的关系可写成

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}_{(-\infty,t)},\quad \forall t>-\infty \tag{1-4}$$

4. 时不变性(或定常性)

系统的时不变性是指系统的输入和输出之间的动态特性不随时间的改变而改变。可以用位移算子 Q_α 来说明时不变性的概念。位移算子 Q_α 的作用效果如图 1-2 所

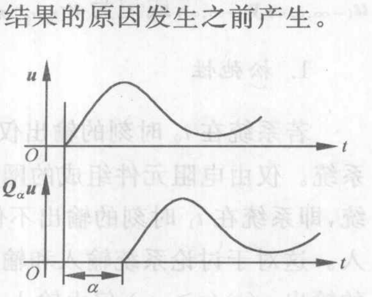

图 1-2　位移算子的作用效果

示。输入信号 $\boldsymbol{u}(t)$ 经 Q_α 作用后，延迟了 α 秒，数学表示为

$$\overline{\boldsymbol{u}}(t) = Q_\alpha \boldsymbol{u}(t), \quad \forall t \tag{1-5}$$

式(1-5)表明，对任意的 t，有 $\overline{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{u}(t-\alpha)$ 或 $\overline{\boldsymbol{u}}(t+\alpha) = \boldsymbol{u}(t)$ 成立。

定义 1-2 一个松弛系统称为时不变的，当且仅当对于任何输入 $\boldsymbol{u}$ 和任何实数 α，均有

$$\boldsymbol{H}Q_\alpha \boldsymbol{u} = Q_\alpha \boldsymbol{H}\boldsymbol{u} \tag{1-6}$$

成立。否则称为时变的。式(1-6)的含义是，若系统的输入信号位移 α 秒，则其输出信号波形除位移 α 秒外保持不变。换言之，不论何时将输入信号加入时不变系统，其输出波形总是相同的。

1.1.2 线性松弛系统的脉冲响应

1. Dirac δ-函数的定义和性质

考虑图 1-3 和下式描述的脉动函数：

$$\delta_\Delta(t-t_1) = \begin{cases} 0, & t < t_1 \\ \dfrac{1}{\Delta}, & t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \Delta \\ 0, & t > t_1 + \Delta \end{cases}$$

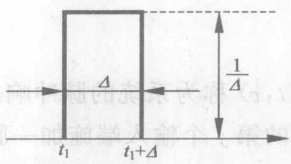

图 1-3 脉动函数 $\delta_\Delta(t-t_1)$

对于所有的 Δ，$\delta_\Delta(t-t_1)$ 的面积总是 1，它表明脉动的强度。当 $\Delta \to 0$ 时，$\delta_\Delta(t-t_1)$ 的极限

$$\delta(t-t_1) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t-t_1)$$

称为脉冲函数，或称 Dirac δ-函数，简称 δ-函数。δ-函数最重要的性质是采样性，即对任何在 t_1 连续的函数 $f(t)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(\tau - t_1)\,\mathrm{d}t = f(t_1) \tag{1-7}$$

2. 单变量线性松弛系统的输入-输出描述

利用脉冲函数的概念和性质，很容易导出单变量线性松弛系统的输入-输出描述。因为任何分段连续的输入 $u(\cdot)$ 均可用一系列脉冲函数来近似，如图 1-4 所示。即

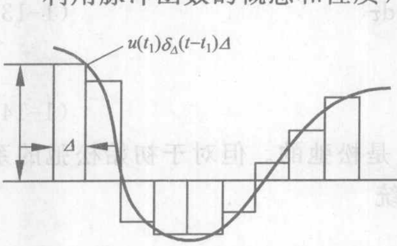

图 1-4 用脉冲函数逼近输入信号

$$u_1 \approx \sum_i u(t_i)\delta_\Delta(t-t_i)\Delta$$

因为系统为初始松弛的线性系统，故系统输出为

$$y = \boldsymbol{H}u_1 \approx \sum_i [\boldsymbol{H}\delta_\Delta(t-t_i)]u(t_i)\Delta$$

当 $\Delta \to 0$ 时，上式成为

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} [\boldsymbol{H}\delta(t-\tau)]u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{1-8}$$

若对所有的 τ，$\boldsymbol{H}\delta(t-\tau)$ 为已知，则对任何输入，系统的输出可由式(1-8)求出。$\boldsymbol{H}\delta(t-\tau)$ 称为系统的脉冲响应函数，其物理意义是，在 τ 时刻对线性松弛系统施加一脉冲函数而得到的系统输出。$\boldsymbol{H}\delta(t-\tau)$ 又可表示为

$$\boldsymbol{H}\delta(t-\tau)=g(t,\tau) \tag{1-9}$$

式中 $g(t,\tau)$ 的变量 τ 表示 δ 函数加于系统的时刻，而变量 t 则为观测输出的时刻。利用式(1-9)，可将式(1-8)写成

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-10}$$

由式(1-10)可见，单变量线性松弛系统的输入-输出关系完全由式(1-10)的卷积积分确定。

3．多变量线性松弛系统的输入-输出描述

若一个初始松弛的线性系统，具有 p 个输入、q 个输出，则式(1-10)可推广为

$$\boldsymbol{y}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{G}(t,\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-11}$$

式中，$\boldsymbol{y}(t)\in\boldsymbol{R}^{q\times 1}$，$\boldsymbol{u}(t)\in\boldsymbol{R}^{p\times 1}$，而 $\boldsymbol{G}(t,\tau)$ 为

$$\boldsymbol{G}(t,\tau)=\begin{bmatrix} g_{11}(t,\tau)\cdots g_{1p}(t,\tau) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ g_{q1}(t,\tau)\cdots g_{qp}(t,\tau)\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{G}(t,\tau)$ 称为系统的脉冲响应矩阵。$\boldsymbol{G}(t,\tau)$ 的元 $g_{ij}(t,\tau)$ 的物理意义是：在 τ 时刻，仅对系统的第 j 个输入端施加一脉冲函数，而在系统的第 i 个输出端引起的 t 时刻响应。简言之，$g_{ij}(t,\tau)$ 是第 i 个输出端对第 j 个输入端的脉冲响应。

1.1.3　具有因果性线性松弛系统的输入-输出描述

1．时变情形

根据式(1-2)和式(1-4)，对具有因果性的初始松弛系统，其输入-输出关系可写成

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}_{(-\infty,t]},\quad \forall t\in(-\infty,\infty) \tag{1-12}$$

对具有因果性的线性松弛系统，根据 $\boldsymbol{G}(t,\tau)$ 的定义，有

$$\boldsymbol{G}(t,\tau)=0,\quad \forall t<\tau,\quad \tau\in(-\infty,\infty)$$

故具有因果性的线性松弛系统的输入-输出描述为

$$\boldsymbol{y}(t)=\int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{G}(t,\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-13}$$

如果系统在 t_0 时刻松弛，则其输入-输出关系可写成

$$\boldsymbol{y}_{[t_0,\infty)}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}_{[t_0,\infty)} \tag{1-14}$$

显然，若系统初始松弛，且 $\boldsymbol{u}_{(-\infty,t_0)}\equiv 0$，则该系统在 t_0 是松弛的。但对于初始松弛的系统，并非系统在 t_0 时刻松弛的必要条件。例如，设有系统

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{u}(t-1)$$

虽然 $\boldsymbol{u}_{(-\infty,t_0)}\neq 0$，但只要 $\boldsymbol{u}_{(t_0-1,t_0)}\equiv 0$，则该系统在 t_0 时刻是松弛的。对于线性系统而言，不难证明，系统在 t_0 时刻松弛的充要条件是，对于所有的 $t\geq t_0$，有 $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}_{(-\infty,t_0)}=0$。

对于具有因果性且 t_0 时刻松弛的线性系统，其输入-输出描述为

$$\boldsymbol{y}(t)=\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{G}(t,\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-15}$$

应当指出，对于相当广泛的一类系统，其中包括有理传递函数矩阵和线性时不变方程所描

述的系统，若系统在 t_0 时刻松弛，必要且只要存在某个正数 ε，由 $\boldsymbol{u}_{[t_0,t_0+\varepsilon)}\equiv 0$ 隐含着 $\boldsymbol{y}_{[t_0,t_0+\varepsilon)}\equiv 0$。

2. 时不变情形

若线性松弛系统是时不变的，在 τ 时刻施加系统一个脉冲，那么系统在观测时刻 t 的输出为 $g(t,\tau)$；若将脉冲加入系统的时刻改为 $\tau+\alpha$（α 为任意实数），则系统在观测时刻 $\tau+\alpha$ 的输出将和 $g(t,\tau)$ 相等，即

$$g(t+\alpha,\tau+\alpha)=g(t,\tau)$$

上式对任何 t,τ,α 均成立。若取 $\alpha=-\tau$，则上式写成

$$g(t,\tau)=g(t-\tau,0)=g(t-\tau)$$

这一结论推广到多变量系统就是，对于任何 t,τ，有

$$\boldsymbol{G}(t,\tau)=\boldsymbol{G}(t-\tau,0)=\boldsymbol{G}(t-\tau)$$

因此，线性、时不变、t_0 时刻松弛的因果系统，其输入-输出描述为

$$\boldsymbol{y}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{G}(t-\tau)\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}\tau \tag{1-16}$$

对于时不变情形。不失一般性，总可以假定 $t_0=0$ 时才对系统施加输入信号，这时式(1-16)化为如下积分形式：

$$\boldsymbol{y}(t)=\int_{0}^{t}\boldsymbol{G}(t-\tau)\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}\tau \tag{1-17}$$

或

$$\boldsymbol{y}(t)=\int_{0}^{t}\boldsymbol{G}(\tau)\boldsymbol{u}(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

1.1.4 系统的传递函数矩阵

经典理论中，关于传递函数的概念，也可以推广到时不变多变量系统中。将式(1-17)取拉普拉斯变换，并记

$$\boldsymbol{y}(s)=\boldsymbol{L}[\boldsymbol{y}(t)]=\int_{0}^{\infty}\boldsymbol{y}(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

由拉普拉斯变换的卷积定理，可得

$$\boldsymbol{y}(s)=\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{u}(s) \tag{1-18}$$

式中

$$\boldsymbol{G}(s)=\int_{0}^{\infty}\boldsymbol{G}(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{1-19}$$

一般地，可表示为

$$\boldsymbol{G}(t,\tau)=\begin{bmatrix} g_{11}(s)\cdots g_{1p}(s) \\ \vdots \qquad \vdots \\ g_{q1}(s)\cdots g_{qp}(s)\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{G}(s)$ 中的 $g_{ij}(s)$ 表示系统第 i 个输出与第 j 个输入之间的传递函数，它等于初始条件为零的情况下，系统第 i 个输出与第 j 个输入拉普拉斯变换之比。系统的传递函数也是系统输入-输出描述的一种形式。