硕士研究生入学考试

数学强化500题

精解（理工类）

恩波考研

全国18大城市辅导班内部讲义

2005

ENBOEDUCATION 恩波教育

主　　编　恩　波
分册主编　余　术
陈维新　田根宝

考研数学取得高分的关键在于"好题的训练"！

本书以题型为主线，是国家1992年实行统考以来考研命题规律的归纳、总结与扩展，具有很强的实战意义。

本书选题讲究，20%的试题选自考研数学最具有代表性的真题，80%的试题是作者原创或长期积累的难度与真题相当，并具有较高灵活性、综合性的全真模拟题。

学苑出版社

硕士研究生入学考试
数学强化500题精解

（理工类）

主　　编　恩　波
分册主编　余　术　陈维新　田根宝
编　　者　（以姓氏笔画为序）
田根宝　刘国庆　何　勇
余　术　陈维新　黄柏琴

学苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试数学强化500题精解．理工类/恩波主编．—北京:学苑出版社,2004.7
ISBN 7—5077—2357—7

Ⅰ.硕… Ⅱ.恩… Ⅲ.高等学校—研究生—入学考试—习题 Ⅳ.013—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第068194号

责任编辑:刘 涟
责任校对:姜东平
封面设计:顾小平
出版发行:学苑出版社
社 址:北京市丰台区南方庄2号院1号楼
邮政编码:100078
网 址:www.book001.com
电子信箱:xueyuan@public.bta.net.cn
销售电话:010—67675512、84560465
经 销:新华书店
印 刷 厂:北京宏大印刷有限公司
开本尺寸:787×1092 1/16
印 张:23.5
版 次:2004年7月北京第1版
印 次:2004年7月北京第1次印刷
印 数:0001—5000册
定 价:28.00元

前言

撰写本书的宗旨:考研数学复习从这里再上新台阶!

关于考研数学复习,我们认为最佳的复习安排可以分为三轮。第一轮:基础复习。主要是复习和巩固以前学过的数学基础知识,形成对高等数学、线性代数、概率论与数理统计三门学科的宏观认识,以便为下一阶段的“强化复习”乃至最后阶段的“最后冲刺”作好充分准备;第二轮:强化复习。通过这一轮的复习,考生应当把握考研数学各题型的特点和规律,确定应试方法,初步形成应试技巧,并将复习过的基础知识和解题方法运用到考研的强化训练中去,来锻炼和提高自己运用知识、分析问题的能力;第三轮:最后冲刺。寻找若干(6~8)套与考研数学试题完全接轨的、符合最新考研数学命题特点和规律的、高质量的模拟试卷作实战训练。这步工作很重要,因为若选用的冲刺试卷质量不高,不符合命题特点和规律,就起不到热身训练的作用,不能得到预期的效果。

通过多年的考研辅导,我们认定:考研数学取得高分的关键在于好题的训练。本书正是专门为经过第二轮复习后的广大考生所设计的强化训练平台。其内容以教育部制订的最新考研数学大纲为依据,各单元的编排次序与大纲完全一致。本书具有以下鲜明特点:

1. 选题经典、原创。考研数学题目浩如烟海,随处可见,但是真正的好题却并不多见。为了不让广大考生因做无用题而浪费宝贵的考研复习时间,本书作者一方面在选题上下足工夫,为考生选出了符合大纲要求、接近真题难度、体现命题规律的经典好题近 300 题;另一方面又以其深厚的学术功底和多年的辅导心得为基础,结合近年命题特点与热点,原创了 200 余道灵活性和综合性都较强的题目,其中不乏作者密押多年的看家题,其目的使得考生在做题时达到事半功倍的效果。

2. 体例简明、科学。本书根据“导”与“练”的特点而设置体例。**方法和技巧精要**——根据考试大纲,按单元或节简单明了地列举出核心考点与技巧,重点突出,使考生在做题时有的放矢;**典型题解析**——本书以题型为主线,是国家 1992 年实行统考以来真题的归纳、总结与扩展,具有很强的实战意义;选题讲究,据不完全统计,约有 20%~30%的例题选自考研数学最具有代表性的真题,70%~80%的例题是作者原创或长期积累的难度与考研数学真题相当,具有较高灵活性、综合性的题目。**模拟训练**——每单元配有难度与真题相当的综合练习题,让考生在训练中逐步提高解题能力,掌握解题技巧,而模拟训练的解答或提示可进一步引导考生理顺思路、开拓思维。

3. 解析权威、详尽。本书的作者均是国内最顶尖大学的资深教授,同时又是国内考研辅导的一线名师,深谙考研数学的命题规律与命题趋势,有着丰富的辅导和写作经验。作者对典型题的解答,剖析了考试重点、热点、难点题型的解题方法与技巧,融汇了作者的相关体会或总结,从而达到启迪考生思维,指导考生串联考点,举一反三,学会解题的目的。

本书由恩波策划,负责组织作者和全书设计。全书的分工情况是:高等数学:理工类由余术执笔,经济类由何勇执笔;线性代数:一、二、四单元由田根宝执笔,三、五、六单元由除维新执笔;概率论与数理统计:理工类由黄柏琴执笔,经济类由刘国庆执笔。此外,余术、陈维新还参与制订大纲及设计体例。

本书在成书前，曾在全国各地的数学考研辅导班试用，获得了良好的效果。在后期修改时，作者还参考了广大学员与恩波教育在线(www. enboedu. com)上众多考生的建议，进行了大量的修订、补充、归纳与提高，其特色明显，希望能够在众多考研数学辅导书中脱颖而出。

我们相信，考生通过本书系统的强化训练，一定能将相关考点的解题方法和解题技巧娴熟于胸，达到举一反三，触类旁通之效。

本书稿承南京大学数学系姜东平教授仔细审阅、润色，作者深表谢意。

限于水平和时间，书中难免有疏漏、不当之处，读者如发现，敬请不吝赐教，以便修正完善。

编著者

2004 年 7 月

目　录

高等数学

第一单元　函数·极限·连续

一、方法和技巧精要 …… 001
二、典型题解析 …… 001
第一单元模拟训练 …… 028
解答或提示 …… 029

第二单元　一元函数微分学

第一节　导数与微分 …… 031
一、方法和技巧精要 …… 031
二、典型题解析 …… 032
第二节　微分中值定理 …… 044
一、方法和技巧精要 …… 044
二、典型题解析 …… 045
第三节　导数的应用 …… 055
一、方法和技巧精要 …… 055
二、典型题解析 …… 056
第二单元模拟训练 …… 066
解答或提示 …… 067

第三单元　一元函数积分学

第一节　不定积分 …… 070
一、方法和技巧精要 …… 070
二、典型题解析 …… 070
第二节　定积分 …… 084
一、方法和技巧精要 …… 084
二、典型题解析 …… 085
第三单元模拟训练 …… 096
解答或提示 …… 098

第四单元　向量代数和空间解析几何

一、方法和技巧精要 …… 100
二、典型题解析 …… 100
第四单元模拟训练 …… 112
解答或提示 …… 113

第五单元　多元函数微分学

一、方法和技巧精要 …… 114
二、典型题解析 …… 114
第五单元模拟训练 …… 126
解答或提示 …… 127

第六单元　多元函数积分学

第一节　重积分 …… 128
一、方法和技巧精要 …… 128
二、典型题解析 …… 128
第二节　曲线积分与曲面积分 …… 142
一、方法和技巧精要 …… 142
二、典型题解析 …… 143
第六单元模拟训练 …… 156
解答或提示 …… 157

第七单元　无穷级数

一、方法和技巧精要 …… 159
二、典型题解析 …… 160
第七单元模拟训练 …… 182
解答或提示 …… 184

第八单元　常微分方程

一、方法和技巧精要 …… 186
二、典型题解析 …… 187
第八单元模拟训练 …… 210
解答或提示 …… 211

线性代数

第一单元　行列式

一、方法和技巧精要 …… 213
二、典型题解析 …… 213
第一单元模拟训练 …… 219
解答或提示 …… 219

第二单元　矩阵

一、方法和技巧精要 …… 220

二、典型题解析 …… 221
第二单元模拟训练 …… 226
解答或提示 …… 227
第三单元 向量
一、方法和技巧精要 …… 229
二、典型题解析 …… 229
第三单元模拟训练 …… 248
解答或提示 …… 249
第四单元 线性方程组
一、方法和技巧精要 …… 254
二、典型题解析 …… 255
第四单元模拟训练 …… 261
解答或提示 …… 262
第五单元 矩阵的特征值与特征向量
一、方法和技巧精要 …… 263
二、典型题解析 …… 265
第五单元模拟训练 …… 284
解答或提示 …… 285
第六单元 二次型
一、方法和技巧精要 …… 289
二、典型题解析 …… 290
第六单元模拟训练 …… 305
解答或提示 …… 306

概率论与数理统计

第一单元 事件与概率
一、方法和技巧精要 …… 311
二、典型题解析 …… 311
第一单元模拟训练 …… 314
解答或提示 …… 314
第二单元 随机变量及其分布
一、方法和技巧精要 …… 316
二、典型题解析 …… 316
第二单元模拟训练 …… 324
解答或提示 …… 324
第三单元 二元随机变量
一、方法和技巧精要 …… 327
二、典型题解析 …… 327
第三单元模拟训练 …… 336
解答或提示 …… 337
第四单元 数字特征
一、方法和技巧精要 …… 340
二、典型题解析 …… 340
第四单元模拟训练 …… 346
解答或提示 …… 347
第五单元 几个极限定理
一、方法和技巧精要 …… 349
二、典型题解析 …… 349
第五单元模拟训练 …… 352
解答或提示 …… 352
第六单元 抽样分析
一、方法和技巧精要 …… 353
二、典型题解析 …… 353
第六单元模拟训练 …… 356
解答或提示 …… 356
第七单元 参数估计
一、方法和技巧精要 …… 358
二、典型题解析 …… 358
第七单元模拟训练 …… 364
解答或提示 …… 364
第八单元 假设检验
一、方法和技巧精要 …… 366
二、典型题解析 …… 366
第八单元模拟训练 …… 369
解答或提示 …… 370

高等数学

第一单元　函数·极限·连续

一、方法和技巧精要

概　述

函数、极限、连续是整个高等数学的基础，尤其是导数、定积分、级数敛散性等重要概念均是直接建立在极限理论上.本章概念众多，仅函数极限定义就有 24 种之别，故深刻理解、领会极限概念的内涵显得尤为重要，唯有如此，才能真正做到融汇贯通，举一反三.切忌死记硬背.

核心考点

(1) 数列及函数极限的计算及证明.
(2) 无穷小量的比较.
(3) 函数间断点及其分类.
(4) 极限式中参数的确定.
(5) 极限与变限积分、中值定理、级数及曲线性态相结合的综合题.

核心技巧

处理与极限有关问题的核心技巧有
(1) 极限存在两准则：单调有界准则，夹逼准则.
(2) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\quad 或\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

后者的变化类型尤为多样.
(3) 罗毕达法则.
(4) 等价无穷小替换.
(5) Taylor 展开式.
(6) 定积分定义.

二、典型题解析

1. 无穷小量的比较

例 1.1(填空题)　已知当 $x\to 1^{+}$ 时，$\sqrt{3x^{2}-2x-1}\ln x$ 与 $(x-1)^{n}$ 为同阶无穷小，则 n 值为

_________.

详细解答 $$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}\ln x}{(x-1)^n}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{(3x+1)(x-1)}\ln[1+(x-1)]}{(x-1)^n}$$

$$\xlongequal{令 t=x-1}\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{(3t+4)t}\cdot\ln(1+t)}{t^n}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{t^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{3t+4}}{t^n}\quad(当 t\to0 时,\ln(1+t)\sim t)$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{3t+4}}{t^{n-\frac{3}{2}}},$$

当 $x\to1^+$ 时，$\sqrt{3x^2-2x-1}\ln x$ 与 $(x-1)^n$ 为同阶无穷小，即上述极限值为非零常数，取 $n=\frac{3}{2}$ 时，$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}\ln x}{(x-1)^n}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\sqrt{3t+4}}{t^{n-\frac{3}{2}}}=2$. 故填 $n=\frac{3}{2}$.

例 1.2(单项选择题) 当 $x\to0$ 时，对三个无穷小量 $\int_0^{\sin x}\sin(t^3)\mathrm{d}t$，$(1-\cos x)\ln(1+x^3)$，$\mathrm{e}^{x\tan^2x}-1$ 按由低阶到高阶无穷小的顺序排列为(　　).

(A) $\int_0^{\sin x}\sin(t^3)\mathrm{d}t$，$(1-\cos x)\ln(1+x^3)$，$\mathrm{e}^{x\tan^2x}-1$

(B) $\int_0^{\sin x}\sin(t^3)\mathrm{d}t$，$\mathrm{e}^{x\tan^2x}-1$，$(1-\cos x)\ln(1+x^3)$

(C) $\mathrm{e}^{x\tan^2x}-1$，$\int_0^{\sin x}\sin(t^3)\mathrm{d}t$，$(1-\cos x)\ln(1+x^3)$

(D) $\mathrm{e}^{x\tan^2x}-1$，$(1-\cos x)\ln(1+x^3)$，$\int_0^{\sin x}\sin(t^3)\mathrm{d}t$

详细解答 当 $x\to0$ 时

$$\left.\begin{array}{l}1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\\ \ln(1+x^3)\sim x^3\end{array}\right\}\Rightarrow(1-\cos x)\ln(1+x^3)\sim\frac{1}{2}x^5,$$

$$\mathrm{e}^{x\tan^2x}-1\sim x\tan^2x\sim x^3,$$

$$\sin(x^3)\sim x^3\Rightarrow\int_0^{\sin x}\sin(t^3)\mathrm{d}t\sim\int_0^{\sin x}t^3\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\sin^4x\sim\frac{1}{4}x^4.$$

故选 C.

友情提醒 要熟练掌握下列常用的等价无穷小量.

当 $x\to0$ 时，

$$\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim\mathrm{e}^x-1\sim x$$

$$a^x-1=\mathrm{e}^{x\ln a}-1\sim x\ln a,$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,$$

$$(1+\alpha x)^\beta-1\sim\alpha\beta x\qquad(\beta>0).$$

并有传递性

$$\frac{1}{2}x^2 \sim \int_0^x \sin t\mathrm{d}t \sim \int_0^x \arcsin t\mathrm{d}t \sim \int_0^x \tan t\mathrm{d}t \sim \int_0^x \arctan t\mathrm{d}t \sim \int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}t.$$

例 1.3(单项选择题) 选择适当的参数 a, b 使当 $x\to 0$ 时,

$$f(x) = \arctan x - \frac{x+ax^3}{1+bx^2}.$$

为 x 的尽可能高阶的无穷小,阶数 N 的最大值为( ).

(A) $N=4$ (B) $N=5$ (C) $N=6$ (D) $N=7$

详细解答 即要求使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^N}$ 存在且不为 0 的最大 N 值. 利用 Taylor 展开式

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^8),$$

得

$$f(x) = \arctan x - \frac{x+ax^3}{1+bx^2}$$

$$= \frac{\left(b-a-\frac{1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5}-\frac{b}{3}\right)x^5 + \left(\frac{b}{5}-\frac{1}{7}\right)x^7 + 0(x^8)}{1+bx^2},$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^N} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(b-a+\frac{1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5}-\frac{b}{3}\right)x^5 + \left(\frac{b}{5}-\frac{1}{7}\right)x^7 + 0(x^8)}{(1+bx^2)x^N}.$$

令

$$\begin{cases} b-a-\dfrac{1}{3} = 0, \\ \dfrac{1}{5}-\dfrac{b}{3} = 0. \end{cases}$$

解得 $a=\dfrac{4}{15}$, $b=\dfrac{3}{5}$. 此时分子 x^7 前的乘数 $\dfrac{b}{5}-\dfrac{1}{7}=-\dfrac{4}{175}\neq 0$, 且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^7} = -\frac{4}{175},$$

故选 D.

友情提醒 当无穷小量阶数较高时,为避免反复使用罗必达法则,可考虑运用 Taylor 展开式.

例 1.4(单项选择题) 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 连续,当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶但非等价无穷小. 令

$$F(x) = \int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t, \quad G(x) = \int_0^1 xg(xt)\,\mathrm{d}t.$$

则当 $x\to 0$ 时, $F(x)$ 是 $G(x)$ 的( ).

(A) 高阶无穷小 (B) 低阶无穷小

(C) 同阶但非等价无穷小 (D) 等价无穷小

详细解答 $F(x)=\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{u=x-t} \int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$,

$$G(x)=\int_0^1 xg(xt)\mathrm{d}t \xlongequal{u=xt} \int_0^x g(u)\mathrm{d}u,$$

所以,

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{\int_0^x g(u)\mathrm{d}u} \xlongequal[\text{罗必达法则}]{\frac{0}{0}\text{型}} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=C\neq 0,1$$

故选 C.

友情提醒 当定积分的被积(隐)函数之变元较复杂时,首先应作变量代换,简化处理.

2. 函数的间断点及其类型判别

例 1.5 求下列函数的间断点并判别其类型

(1) $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x^2+2x-3}$; (2) $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin x}{\sin t}\right)^{\frac{x}{\sin x-\sin t}}$.

详细解答 (1) $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{(x+3)(x-1)}$ 在 $x=-3,0,1$ 处无定义,由于

$$\lim_{x\to -3}f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{\ln(-x)}{(x+3)(x-1)}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{(x+3)(x-1)}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x+3)(x-1)} \xlongequal[\text{罗必达法则}]{\frac{0}{0}\text{型}} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2x+2}=\frac{1}{4},$$

故 $x=-3$, $x=0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点(属第二类间断点),$x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点(属第一类间断点).

$$(2)\ f(x)=\lim_{t\to x}\left(\frac{\sin x}{\sin t}\right)^{\frac{x}{\sin x-\sin t}} \quad (1^{\infty}\text{ 型})$$

$$=\lim_{t\to x}\left[\left(1+\frac{\sin x-\sin t}{\sin t}\right)^{\frac{\sin t}{\sin x-\sin t}}\right]^{\frac{x}{\sin t}}$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}},$$

$x=k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}$ 没有定义.

当 $k=0$ 时,即在 $x=0$ 处

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}}=\mathrm{e}.$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点(属第一类间断点).

当 $k\neq 0$ 时,在 $x=k\pi$ 处

$$\lim_{x\to k\pi}f(x)=\lim_{x\to k\pi}\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}\text{ 不存在},$$

故 $x=k\pi\ (k\neq 0)$ 为 $f(x)$的第二类间断点.

例 1.6 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} & x\neq 0\text{ 时},\\ 1 & x=0\text{ 时},\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性,若不连续请说明它的类型.

详细解答

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=1,$$

即 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 均存在. 但 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, $x=0$ 为其跳跃间断点(属第一类间断点).

友情提醒 极限式中含有 e^x(一般指数函数 a^x)当 $x\to\infty$,或含有 $e^{\frac{1}{x}}$ 当 $x\to 0$ 时,要分 $x\to\pm\infty$或左右极限 $x\to 0^{\pm}$ 来处理.

3. 极限式中参数的确定

例 1.7(填空题) 设 $\alpha>0$, $\beta\neq 0$ 且满足极限式

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x^{2\alpha}+x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-x^2\right]=\beta,$$

则$(\alpha,\beta)=$____________.

详细解答
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left[(x^{2\alpha}+x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-x^2\right]&=\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\left(1+\frac{1}{x^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\alpha}\frac{1}{x^{\alpha}}\quad((1+\alpha t)^{\beta}-1\sim\alpha\beta t,\text{当 } t\to 0\text{ 时})\\&=\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^{\alpha}}\\&=\begin{cases}0, & \alpha>2\text{ 时},\\ \dfrac{1}{2}, & \alpha=2\text{ 时},\\ \infty, & 0<\alpha<2\text{ 时}.\end{cases}\end{aligned}$$

又由题设 $\beta\neq 0$ 故 $(\alpha,\beta)=\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$.

例 1.8(单项选择题) 设 a, b 为两实常数,且有

$$\lim_{x\to+\infty}e^x\left[\int_0^{\sqrt{x}}e^{-t^2}\,dt+a\right]=b,$$

则 a, b 值分别为(　　).

(A) $a=-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, $b=0$　　　(B) $a=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, $b=0$

(C) $a=0,\ b=-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$　　(D) $a=0,\ b=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

详细解答　由 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}\left[\int_0^{\sqrt{x}}e^{-t^2}\,dt+a\right]=b$ 知

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\int_0^{\sqrt{x}}e^{-t^2}\,dt+a\right]=0,$$

即

$$a=-\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\sqrt{x}}e^{-t^2}\,dt=-\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt.$$

借助于二重积分的极坐标形式

$$\left[\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt\right]^2=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx\cdot\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-r^2}\,r\,dr$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_{r=0}^{+\infty}=\frac{\pi}{4},$$

所以　$a=-\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. 而

$$b=\lim_{x\to+\infty}e^{x}\left[\int_0^{\sqrt{x}}e^{-t^2}\,dt+a\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}e^{-t^2}\,dt+a}{e^{-x}}$$

$$\xlongequal{\frac{0}{0}\text{型}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{-x}}{-e^{-x}}=0.$$

故选 A.

例 1.9　设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-1}+\lambda x+\mu)=0$, 试确定 λ,μ 之值.

详细解答　由 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-1}+\lambda x+\mu)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^3}}+\lambda+\dfrac{\mu}{x}\right)=0$,

知　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^3}}+\lambda+\dfrac{\mu}{x}\right)=0$, 即 $1+\lambda=0$, $\lambda=-1$.

而

$$\mu=-\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-1}+\lambda x)$$

$$=-\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}+\lambda\right)$$

$$=-\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}-1\right)$$

$$\xlongequal{(1+\alpha t)^{\beta}-1\sim\alpha\beta t,\text{当 }t\to0\text{ 时}}-\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x^3}\right)$$

$$=0,$$

即有　$\lambda=-1,\ \mu=0$.

例 1.10　设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax+\sin x}{\int_{\beta}^{x}\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=\gamma\quad(\gamma\neq0)$, 试确定 α,β,γ 之值.

详细解答

$$\lim_{x\to0}\int_\beta^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt=\lim_{x\to0}(\alpha x+\sin x)\cdot\frac{\int_\beta^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}{\alpha x+\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}(\alpha x+\sin x)\cdot\lim_{x\to0}\frac{\int_\beta^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}{\alpha x+\sin x}$$

$$=0\cdot\frac{1}{\gamma}=0,$$

注意到被积函数 $\frac{\ln(1+t^3)}{t}>0$，故 $\beta=0$.

$$\gamma=\lim_{x\to0}\frac{\alpha x+\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}\xlongequal{\frac{0}{0}\text{型}}\lim_{x\to0}\frac{\alpha+\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}$$

$$\xlongequal{(\ln(1+x^3)\sim x^3,\ x\to0\text{时})}\lim_{x\to0}\frac{\alpha+\cos x}{x^2},$$

故由 $\lim\limits_{x\to0}(\alpha+\cos x)=\alpha+1=0$ 得 $\alpha=-1$.

$$\gamma=\lim_{x\to0}\frac{-1+\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

综上 $\alpha=-1,\ \beta=0,\ \gamma=-\frac{1}{2}$.

例 1.11　设函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax+b}{1+x^{2n}}$$

处处连续，试确定 $a,\ b$ 之值.

详细解答

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax+b}{1+x^{2n}}=\begin{cases}ax+b, & |x|<1\text{时};\\ \frac{1}{x}, & |x|>1\text{时};\\ -\frac{1}{2}(1+a-b), & x=-1\text{时};\\ \frac{1}{2}(1+a+b), & x=1\text{时}.\end{cases}$$

由 $f(x)$ 处处连续知　$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$. 即

$$\begin{cases}-1=b-a=-\frac{1}{2}(1+a-b),\\ a+b=1=\frac{1}{2}(1+a+b),\end{cases}$$

解得 $a=1,\ b=0$.

例 1.12　试确定常数 b，使极限

$$\lim_{a\to 0}\int_{-a}^{a}\frac{1}{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right)\cos(b-x)\mathrm{d}x$$

存在,并求此极限.

详细解答

$$I=\lim_{a\to 0}\int_{-a}^{a}\frac{1}{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right)\cos(b-x)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{\int_{-a}^{a}(a-|x|)\cos(b-x)\mathrm{d}x}{a^2}$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{a\int_{-a}^{a}\cos(b-x)\mathrm{d}x-\int_{-a}^{a}|x|\cos(b-x)\mathrm{d}x}{a^2}$$

$$\xlongequal{\frac{0}{0}\text{型}}\lim_{a\to 0}\frac{\int_{-a}^{a}\cos(b-x)\mathrm{d}x+a\cos(b-a)+a\cos(b+a)-|a|\cos(b-a)-|a|\cos(b+a)}{2a}$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{\int_{-a}^{a}\cos(b-x)\mathrm{d}x+2(a-|a|)\cos a\cos b}{2a}.$$

考虑左右极限

$$\lim_{a\to 0^+}\frac{\int_{-a}^{a}\cos(b-x)\mathrm{d}x+2(a-|a|)\cos a\cos b}{2a}$$

$$=\lim_{a\to 0^+}\frac{\int_{-a}^{a}\cos(b-x)\mathrm{d}x}{2a}\xlongequal{\frac{0}{0}\text{型}}\lim_{a\to 0^+}\frac{\cos(b-a)+\cos(b+a)}{2}=\cos b;$$

$$\lim_{a\to 0^-}\frac{\int_{-a}^{a}\cos(b-x)\mathrm{d}x+2(a-|a|)\cos a\cos b}{2a}$$

$$=\lim_{a\to 0^-}\frac{\int_{-a}^{a}\cos(b-x)\mathrm{d}x+4a\cos a\cos b}{2a}$$

$$=\lim_{a\to 0^-}\frac{\int_{-a}^{a}\cos(b-x)\mathrm{d}x}{2a}+\lim_{a\to 0^-}2\cos a\cos b$$

$$=\cos b+2\cos b=3\cos b.$$

要使极限I存在,其充要条件是 $3\cos b=\cos b$,故 $\cos b=0$,即 $b=k\pi+\frac{\pi}{2}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,且此时 $I=\lim\limits_{a\to 0}\int_{-a}^{a}\frac{1}{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right)\cos(b-x)\mathrm{d}x=0.$

4. 不定式的定值法

例 1.13 求下列函数极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\arctan\dfrac{1}{x}+e^{\frac{1}{x^2}}}{\dfrac{1}{x}\int_0^{\frac{1}{x}}e^{t^2}\,dt}$;

(5) $\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{1-\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\sqrt[3]{\cos 3\varphi}\cdots\sqrt[n]{\cos n\varphi}}{\ln(1+\varphi)-\varphi}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$.

详细解答

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}\xlongequal{t=\frac{1}{x^2}}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^{50}}{e^t}\xlongequal[\text{罗必达法则}]{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50t^{49}}{e^t}$

$\xlongequal[\text{罗必达法则}]{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}\cdots=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50!}{e^t}=0.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{x}$ ($e^x-1\sim x$,当 $x\to 0$ 时)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan x}{x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}$ (分子有理化)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}}$ ($\tan x\sim x$,当 $x\to 0$ 时)

$=1.$

(3) **法 1** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}$ (分母有理化)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{x\sin x+2\sin^2\dfrac{x}{2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}}$

$=\dfrac{1+1}{1+\dfrac{2}{4}\cdot 1^2}=\dfrac{4}{3}.$

法 2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

$$\xlongequal[\text{罗必达法则}]{\frac{0}{0}\text{型}} \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\dfrac{\sin x+x\cos x}{2\sqrt{1+x\sin x}}-\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4}{\dfrac{1}{\sqrt{1+x\sin x}}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\right)+\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}\dfrac{\sin x}{x}}$$

$$=\frac{4}{3}.$$

法 3 利用等价无穷小替换. 当 $x\to 0$ 时,

$$\sqrt{1+x\sin x}-1\sim\frac{1}{2}x\sin x\sim\frac{1}{2}x^2,$$

$$\sqrt{\cos x}-1=\sqrt{1+(\cos x-1)}-1\sim\frac{1}{2}(\cos x-1)\sim-\frac{1}{4}x^2,$$

即有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}=-\dfrac{1}{4}$, 从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(\sqrt{1+x\sin x}-1)-(\sqrt{\cos x}-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}-\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{4}\right)}=\frac{4}{3}.$$

友情提醒 等价无穷小替换仅适合于乘积中的因子,加减运算中的项不宜使用.

(4) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan\dfrac{1}{x}+e^{\frac{1}{x^2}}}{\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}}e^{t^2}\,dt}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to+\infty}\frac{\arctan u+e^{u^2}}{u\displaystyle\int_0^u e^{t^2}\,dt}$$

$$\xlongequal[\text{罗必达法则}]{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}\lim_{u\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+u^2}+2ue^{u^2}}{\displaystyle\int_0^u e^{t^2}\,dt+ue^{u^2}}$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+u^2}}{\displaystyle\int_0^u e^{u^2}\,dt+ue^{u^2}}+\lim_{u\to+\infty}\frac{2ue^{u^2}}{\displaystyle\int_0^u e^{t^2}\,dt+ue^{u^2}}$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\frac{2ue^{u^2}}{\displaystyle\int_0^u e^{t^2}\,dt+ue^{u^2}}\xlongequal[\text{罗必达法则}]{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}\lim_{u\to+\infty}\frac{2e^{u^2}+4u^2e^{u^2}}{2e^{u^2}+2u^2e^{u^2}}$$