游若云　编

实变函数论

大连工学院出版社

实变函数论

游若云 编

大连工学院出版社

1987年·大连

内容提要

本书系根据1980年部颁高等师范院校教学大纲的精神编写的。全书共有七章，依次是：集合、点集、测度论、可测函数、勒贝格积分、导数与不定积分和斯蒂阶积分。

本书在选材上着眼于基本内容，在方法上尽量使直观性与严谨性相结合，并注意与数学分析的联系，比较容易为初学者所接受。

本书可作为师范院校数学系的教材或教学参考书，也可供其他院校师生参阅，并可作为自学者用书。

实变函数论

Shibian Hanshulun

游若云　编

大连工学院出版社出版（大连凌水桥）
抚顺日报印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32　印张：7.375　字数：160 000
1987年12月第1版　　1987年12月第1次印刷

辽宁师范大学书稿出版编辑室供稿、发行
责任编辑：穆　杰　张亚军　　责任校对：舒　禾
封面设计：达　野

印数：1—1 000
统一书号：13400·13　ISBN 7-5611-0034-5/O·5
定价：1.90元

前　言

实变函数论是高等师范院校数学系的一门必修课.1981年，我们根据部颁教学大纲的精神编写了一份讲义.几年来，这份讲义经多次使用，反复修改，已基本适合教学的要求，在我校有关领导的支持与鼓励下，因而付梓，以应教学之需要.

实变函数论作为一门课程，是以勒贝格测度与积分为主要内容，以集合论与点集论为基础的，这就大体上决定了本书前六章的顺序．最后一章斯蒂阶积分，是作为黎曼积分与勒贝格积分的另一种形式的推广而编写的，其中勒贝格-斯蒂阶积分，虽然超出了大纲的要求，但篇幅很短，花时不多，讲了它体系上显得完整，故亦编入.

考虑到高师院校当前教学的实际情况，我们注意选择实变函数论中最基本的内容，把份量限制在64学时之内；我们努力使直观性与严谨性相结合，对一些具有基础性的定理，都作了严格的证明，如卡氏可测性条件，单调函数的导数定理等．但在一些非基本的地方，则采用直观的叙述，讲明思路，而略去了细节；我们还注意与数学分析的联系，使实变函数论对于数学分析既起到居高临下的作用，又是内容上的自然延伸.

本书大多数章节都是按传统方法编排与讲述的，只是在个别地方依我的想法作了尝试.例如，第三章测度论，我采用

先一维（直线）后多维（限于平面）、先有界后无界逐步展开的方式．并且在有界线性点集阶段，沿用勒贝格内、外测度的办法，直到讲述无界点集测度时，才给出卡拉皆屋铎利方式的定义，把有界可测集与无界可测集统一起来．这种处理方式，似有迂回重叠之感，但是，教学实践表明，知识有层次，认识在深化，似乎更容易被学生所接受．在第五章中，勒贝格积分的建立，我先用纵标集测度的几何定义，然后才给出和数极限的分析定义．这样，一开始就把测度、积分与面积三者联系起来，不仅使积分概念有直观的几何意义，而且积分的性质可归于测度的相应性质，避免一些烦琐的论证过程．特别是，$(R)\int_a^b f(x)dx$存在，则$(L)\int_a^b f(x)dx$也存在且相等的定理，显得非常简单明了．当然，这只是我个人的经验，是否普遍适用，有待于大家来实践．

本书每章之后都有一定数量的，难度不大的习题，它们都是基本题．因此，在使用本书时，可根据教学的实际情况，考虑补充一些适当的练习．

本书在编写过程中，我系俞凡、金永镇、王晶昕等同志给予了多方面的帮助．云南师范大学邱达三同志看过本书初稿，并提出了一些有益的建议．本书承方嘉琳教授仔细审阅，他提出了详尽的修改意见．最后值得提及的是，大连工学院出版社的领导和我校书稿出版编辑室的同志们为本书的出版做了大量的工作．在此我谨向上述各位同志表示诚挚的谢意．

限于编者水平，错误缺点在所难免，望大家批评指正．

编　者

1987年 6 月于辽宁师大

目　　录

第一章 集 合

§1.1 集合概念

集合是数学中的一个原始概念，不予定义，但给予适当的描述.我们说，凡具有某种特定性质的对象(具体的或抽象的)的全体就组成一个集合(或简称集). 例如，自然数的全体；数轴上点的全体；闭区间$[a,b]$上连续函数的全体；等等，它们都是集合.

组成集合的对象，称为该集合的元素. 按习惯集合用大写字母A，B，X，Y等表示；集合的元素用小写字母a，b，x，y等表示.

设X是一集合，x是X的元素，记为$x\in X$，读作“x属于X”.如果对象x不是集X的元素，则记为$x\bar{\in} X$，读作“x不属于X”.

如果一个集合的元素都能一一列举出来，那末就把它们放在一个花括号内，以此表示该集合. 例如，$\{a,b,c\}$表示由a,b,c三个字母组成的集合.但是，并不是所有的集合都能这样表示. 因此，我们采用一种给定或表示集合的方法. 这个方法是说：如果有一个性质P，使得对每一个对象x，x具有性质P或不具有性质P，有且仅有一种情况出现，那末一切具有性质P的对象x的全体，就组成一个集合，记为

$$X=\{x\,|\,x具有性质P\}\tag{1.1}$$

采用这种方法给定集合是非常方便的. 例如，

$$X=\{x\mid x\text{是大于100的自然数}\},$$

这里性质 P 是"大于100的自然数".对于每一个对象 x，我们都能够判断它是否是大于100的自然数,因此 X 是一个集合.然而"很大的自然数"，"很小的正数"等，虽然也可以说是一种特定的性质，但是，我们无法判断哪些自然数算是"很大"的，哪些正数算是"很小"的. 因此，不能由它们来给定集合.

值得注意的是，形式地使用表示式(1.1)，有时会出现悖论. 例如，A 是集合，据(1.1)式给出

$$X=\{A\mid A\overline{\in}A\}.$$

这里性质 P 是"$A\overline{\in}A$"，即集合 A 不是它自身的元素. 现在，如果 X 是一个集合，则对于性质 P 来说只有两种情况：若 $X\overline{\in}X$，即 X 具有性质 P，故 $X\in X$，矛盾；若 $X\in X$，即 X 不具有性质 P，故 $X\overline{\in}X$，也是矛盾.

为了避免出现悖论，可用一些公理条款规定什么是集合. 这些专门的讨论属于公理化集合论，超出本课程的要求，故省略之. 但是，在一般的情况下，使用上述方法给定集合还是非常有效而方便的. 在本书中，我们将接受表示式(1.1)，并用以给定集合.

如果对于一个性质 P，我们可以判断任何一个对象 x 都不具有性质 P，那末，我们说具有性质 P 的对象全体组成一个空集，记为$\varnothing$. 因此，空集不含有任何元素. 例如

$$X=\{x\mid x\text{是实数且适合}x^2+1=0\}$$

就是一个空集.

定义1.1.1 设 A，B 是两个集合，如果对任意 $x\in A$，都有 $x\in B$，则称 A 包含于 B 或 B 包含 A，记为$A\subset B$ 或B

$\supset A$.

当 A 包含于 B 时，也称 A 是 B 的**子集**. 如果 $A\subset B$ 且存在 $x\in B$ 但 $x\overline{\in}A$，则称 A 是 B 的**真子集**.

例如，全体有理数集是全体实数集的真子集. 空集是任何集的子集.

定义1.1.2 设 A，B是两个集合，如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称 A 与 B **相等**，记为$A=B$.

因此，两个集合相等当且仅当它们的元素完全相同.

定义1.1.2表明集合的包含关系具有反对称性，此外还有如下性质：

定理1.1.1 设 A，B，C 是三个集合，则有

（1）$A\subset A$(自反性)，

（2）若$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$(传递性).

§1.2 集合的运算

对于给定的一些集合，我们常常需要对它们进行并、交、差的运算，而得出新的集合. 关于集合并、交、差运算的定义及性质将逐次分述如下.

定义1.2.1 设 A，B 是两个集合，由 A 与 B 中所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**，简称为**并**，记为$A\cup B$. 用(1.1)的表示式，有

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}.$$

并集的概念可推广于任意多个集的情形，设 D 是一集合，如果对每一个 $\lambda\in D$，都对应一个集合 A_λ，则由所有这样的集 A_λ 组成的集合(也称为集族)，记为

$$\{A_\lambda\mid\lambda\in D\}.$$

这时称 D 为指标集.在不会发生误解时，也可略去指标集D而简记为$\{A_\lambda\}$.当D是全体自然数集时，则得集列$\{A_n\}$.

对于给定的集族$\{A_\lambda\}$，它们的并集就是该集族中一切集A_λ的所有元素组成的集，即

$$\bigcup_{\lambda\in D}A_\lambda=\{x\mid 存在\ \lambda\in D，使\ x\in A_\lambda\}.$$

例1.2.1 设$A=[0,2]$，$B=[1,3]$，则$A\cup B=[0,3]$.

例1.2.2 设$A_n=(n-1,\ n]=\{x\mid n-1<x\leqslant n\}$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=(0,\ +\infty).$$

例1.2.3 设 $A_n=\left[\frac{1}{n+1},\ 1\right]=\left[x\mid\frac{1}{n+1}\leqslant x\leqslant 1\right]$,则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=(0,1].$$

由并集的定义，容易证明并集的运算有如下性质.

定理1.2.1 设A，B，C是集合，则

（1）$A\cup A=A$（幂等律）;

（2）$A\cup B=B\cup A$（交换律）;

（3）$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$（结合律）.

定义1.2.2 设A,B是两个集合,由既属于A又属于B的所有元素组成的集称为A与B的**交集**,简称为**交**,记为$A\cap B$.即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A 且 x\in B\}.$$

如果$A\cap B\neq\varnothing$，我们也说A与B相交，否则，说A与B不相交.

交集的概念也可推广于任意多个的情形. 设$\{A_\lambda\}$是一

集族，则由同时属于该集族中每一个集 A_λ 的所有元素组成的集，称为该集族的**交集或交**，即

$$\bigcap_{\lambda \in D} A_\lambda = \{x \mid \text{对所有 } \lambda \in D,\ x \in A_\lambda\}.$$

例1.2.4 设 $A=(-3,\ 2]$，$B=[0,\ 3)$，则

$$A \cap B = [0,\ 2].$$

例1.2.5 设 $A_n = -\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}$ ，则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}.$$

例1.2.6 设 $A_n = 0, \frac{1}{n}\Big)$ 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$.

据交集的定义，不难证明交集的运算有如下性质：

定理1.2.2 设A，B，C是三个集合，则

（1）$A \cap A = A$（幂等律），

（2）$A \cap B = B \cap A$（交换律），

（3）$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$（结合律）.

关于集合的并与交的运算，还适合下面的分配律。

定理1.2.3 设A，B，C是三个集合，则

（1）$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；

（2）$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

证 我们只证(1).设 $x \in A \cap (B \cup C)$，则 $x \in A$且$x \in B \cup C$，于是 $x \in A$且$x \in B$或 $x \in A$且 $x \in C$，从而 $x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C$，即 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.因此，

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

反之，$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，则 $x \in A \cap B$或 $x \in A \cap$

C，于是$x\in A$且$x\in B$或$x\in A$且$x\in C$. 从而$x\in A$且$x\in B$或$x\in C$，即$x\in A\cap(B\cup C)$. 因此，

$$A\cap(B\cup C)\supset(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

据定义1.1.2，（1）得证. ∎

本定理的结论可推广于任意多个集的情形，即有

系1.2.4 设A是集合，$\{B_\lambda \mid \lambda\in D\}$是一集族，则

（1）$A\cap(\bigcup_{\lambda\in D}B_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in D}(A\cap B_\lambda)$，

（2）$A\cup(\bigcap_{\lambda\in D}B_\lambda)=\bigcap_{\lambda\in D}(A\cup B_\lambda)$.

定义1.2.3 设A，B是两个集合，由属于A而不属于B的所有元素组成的集合，称为A与B的**差集**，简称为**差**，记为$A-B$，即

$$A-B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\overline{\in}B\}.$$

特别，当$B\subset A$时，称差集$A-B$为B关于A的**余集**，记为C_AB.

当我们所讨论的集都是某一个固定的集X的子集时，这时称X为**基本集**. 例如，如果我们所讨论的都是实数集，那末全体实数组成的集就是基本集. 集合B关于基本集X的余集C_XB可简记为CB.

下面假定所讨论的集都是某基本集X的子集，我们给出差集及余集的运算性质.

定理1.2.5 （1）$CX=\varnothing$，$C\varnothing=X$.

（2）$A\cup CA=X$，$A\cap CA=\varnothing$.

（3）$C(CA)=A$.

（4）$A-B=A\cap CB$.

（5）若$A\subset B$，则$CA\supset CB$.

这些性质几乎是一目了然的，我们略去其证明.

定理1.2.6　（1）$C(A\cup B)=CA\cap CB$；

（2）$C(A\cap B)=CA\cup CB$.

证　只证(2)式.设$x\in C(A\cap B)$，则$x\,\overline{\in}\,A\cap B$. 于是$x\,\overline{\in}\,A$或$x\,\overline{\in}\,B$，从而$x\in CA$或$x\in CB$，即$x\in CA\cup CB$.因此，$C(A\cap B)\subset CA\cup CB$.

反之，若$x\in CA\cup CB$，则$x\in CA$或$x\in CB$. 于是$x\,\overline{\in}\,A$或$x\,\overline{\in}\,B$，从而$x\,\overline{\in}\,A\cap B$，即$x\in C(A\cap B)$.因此，$C(A\cap B)\supset CA\cup CB$.

因此，据集合相等的定义，（2）式成立. ▮

用同样的方法，可以证明本定理的结论对于任意多个集的情形也是成立的. 即有

系1.2.7　设$\{A_\lambda \mid \lambda\in D\}$是一集族，则

（1）$C(\bigcup\limits_{\lambda\in D}A_\lambda)=\bigcap\limits_{\lambda\in D}CA_\lambda$.

（2）$C(\bigcap\limits_{\lambda\in D}A_\lambda)=\bigcup\limits_{\lambda\in D}CA_\lambda$.

上述等式称为笛摩根(De·Morgan)公式.通过它可把并集转化为交集，或把交集转化为并集. 这种转化在集合的运算及论证中是很有用的.

定理1.2.8　设A_1，A_2，A_3是三个集合，则

$$A_1\cap(A_2-A_3)=(A_1\cap A_2)-(A_1\cap A_3).$$

证　利用笛摩根公式，有

$$(A_1\cap A_2)-(A_1\cap A_3)$$
$$=(A_1\cap A_2)\cap C(A_1\cap A_3)$$

$$=(A_1\cap A_2)\cap(CA_1\cup CA_3)$$
$$=\left[(A_1\cap A_2)\cap CA_1\right]\cup\left[(A_1\cap A_2)\cap CA_3\right]$$
$$=\varnothing\cup(A_1\cap A_2\cap CA_3)$$
$$=A_1\cap(A_2\cap CA_3)$$
$$=A_1\cap(A_2-A_3).\ \blacksquare$$

定理1.2.8 表明交关于差的运算有分配律，但是并关于差的运算，差关于并或交的运算都没有分配律．此外还应该注意，差的运算与算术中减法运算有很大区别．例如

（1）$A-B=\varnothing$，但A与B未必相等；

（2）$A-B=A$，但B不必是空集；

（3）$(A-B)\cup B=A$未必成立，当且仅当 $A\supset B$ 时等式才能成立。

建议读者举出适合（1）—（3）的具体例子．

§1.3 集列的极限

本节讨论集列的上限集、下限集与极限集．

定义1.3.1 设$\{A_n\}$是一列集合，由属于该集列中无限多个集的那种元素的全体所组成的集合，称为该集列的**上限集**，记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 或$\overline{A}$．它可表示为

$$\overline{A}=\{x\mid 有无限多个\ n，使\ x\in A_n\}$$
$$=\{x\mid 对任意自然N，存在\ n\geqslant N，使x\in A_n\}.$$

定义1.3.2 设$\{A_n\}$是一列集合，由至多只不属于该集列中有限个集的那种元素全体所组成的集合，称为该集列的**下限集**，记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 或$\underline{A}$．它可表示为

$\underline{A}=\{x \mid$ 至多除去有限多个 n，有 $x\in A_n\}$

$=\{x \mid$ 存在自然数 N，使 $n\geqslant N$ 时，有 $x\in A_n\}$.

显然，$\underline{A}\subset\overline{A}$.

定义1.3.3 如果 $\underline{A}=\overline{A}$，则称集列 $\{A_n\}$ **有极限**（或**收敛**），而集 $A=\underline{A}=\overline{A}$ 称为集列 $\{A_n\}$ 的**极限集**，记为

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n$$

例1.3.1 设 $A_n=\left[0,\ 1+\frac{1}{n}\right]$，我们来确定集列 $\{A_n\}$ 的上限集与下限集.

解 容易看出，$[0,1]\subset A_n\subset[0,2]$，因此，有

$$[0,1]\subset\underline{A}\subset\overline{A}\subset[0,2].$$

现在证明：$\overline{A}\subset[0,1]$.

实际上，对任意 $x\in[0,2]-[0,1]=(1,2]$，存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $x>1+\frac{1}{n}$. 于是当 $n\geqslant n_0$ 时，$x\overline{\in}\left[0,1+\frac{1}{n}\right]=A_n$，即 $x\overline{\in}\overline{A}$. 因此，$\overline{A}\subset[0,1]$.

由此可知，$\underline{A}=\overline{A}=[0,1]$，即

$$\lim A_n=[0,1].$$

例1.3.2 设 A_n 是如下的集列：

$$\begin{aligned}&\text{奇项}\quad A_{2m-1}=\left[0,\frac{1}{m}\right],\\&\text{偶项}\quad A_{2m}=[0,m],\end{aligned}\qquad m=1,2,\cdots.$$

我们来确定 $\{A_n\}$ 的上限集与下限集.