

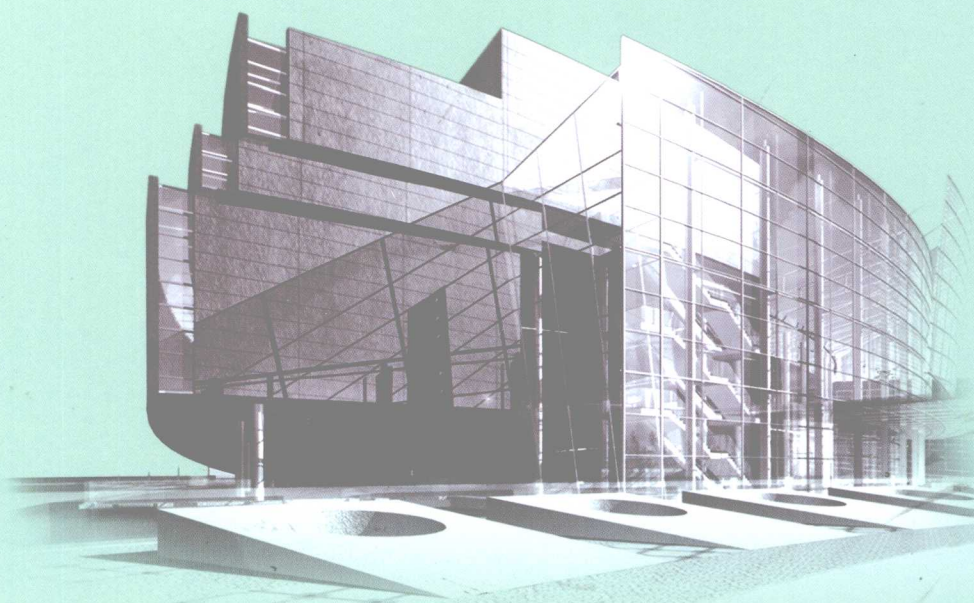
普通高等院校
土木工程专业规划教材

结构力学

教程

刘金春 杜青 刘然慧 刘润星 主编

下



人民交通出版社
China Communications Press

普通高等院校
土木工程专业规划教材

JIEGOU LIXUE JIAOCHENG

结构力学

教 程

刘金春 杜青 刘然慧 刘润星 主编

下

人民交通出版社

内 容 提 要

本教材是根据国家教育部批准试行的《高等工业学校结构力学教学基本要求》和当前课程教学实践及土木工程学科关于教材系列的规划而编写的,可作为工业与民用建筑、土建结构、桥梁与隧道、水工结构、地下建筑、防灾减灾与防护、铁道及公路工程等专业的结构力学教材,也可供土建类其他各专业及有关工程技术人员参考使用。

本教材分上、下两册出版。上册内容包括:绪论、平面体系的几何组成分析、静定结构的内力分析、静定结构的影响线、静定结构的位移计算、力法解超静定结构等。下册内容包括:位移法解超静定结构、渐近法和超静定结构的影响线、结构矩阵位移法、结构动力学、结构的极限荷载、弹性结构的稳定计算等。不同的专业可根据专业的需要各自取舍。每章后附有较丰富的习题及部分习题答案。

本教材在编写过程中,吸取了现有教材的优点并反映当代结构力学的研究成果,阐述原理严密,概念清晰,理论联系实际,说理透彻;体现学科上的科学性、系统性和内容的先进性;能适应我国国情和教学上不同层次的要求,既方便教师教,也方便学生自学。

图书在版编目(CIP)数据

结构力学教程(上、下册)/刘金春,杜青等主编. —北京:人民交通出版社,2008. 8

ISBN 978-7-114-07329-8

I. 结… II. ①刘…②杜… III. 结构力学—教材
IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 127210 号

普通高等院校土木工程专业规划教材

书 名: 结构力学教程(下册)

著 者: 刘金春 杜 青 刘然慧 刘润星

责任编辑: 赵瑞琴

出版发行: 人民交通出版社

地 址: (100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号

网 址: <http://www.ccpres.com.cn>

销售电话: (010)59757969, 59757973

总 经 销: 北京中交盛世书刊有限公司

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京宝莲鸿图科技有限公司

开 本: 787×1092 1/16

印 张: 22.5

字 数: 566 千

版 次: 2008 年 8 月 第 1 版

印 次: 2008 年 8 月 第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-114-07329-8

印 数: 0001~3000 册

定 价: 78.00 元(上、下册)

(如有印刷、装订质量问题的图书由本社负责调换)

前 言

本书是根据教育部批准试行的《高等工业学校结构力学教学基本要求》和当前课程教学实践及土木工程学科关于教材系列的规划而编写的,可作为工业与民用建筑、土建结构、桥梁与隧道、水工结构、地下建筑、防灾减灾与防护、铁道及公路工程等专业的结构力学教材,也可供土建类其他各专业及有关工程技术人员参考使用。

本书分上、下两册出版,上册内容包括:绪论、平面体系的几何组成分析、静定结构的内力分析、静定结构的影响线、静定结构的位移计算、力法解超静定结构等。下册内容包括:位移法解超静定结构、渐近法和超静定结构的影响线、结构矩阵位移法、结构动力学、结构的极限荷载、弹性结构的稳定计算等。不同的专业可根据专业的需要各自取舍。每章后面均附有较丰富的习题和部分习题答案,以活跃思维,启发思考,有助于精解多练,提高对本专业问题的本质的认识。

本书在编写过程中,吸取了现有教材的优点并反映当代结构力学的研究成果,力图体系完整,特色鲜明,阐述原理严密,概念清晰,文字精练、生动,使本教材内容体现现代科学性、系统性、先进性和教学适用性,力图适应我国国情和教学上不同层次的要求,便于因材施教。

本书从“大土木”的专业要求出发,精选内容,抓住关键,突出重点,特别注意了教材内容的更新和吸收各校教学改革的阶段性成果,以适应 21 世纪土木工程人才的培育要求,是一套适应新专业的全新教材。

本书由河北工业大学刘金春担任主编并编写第一、九、十二、十三章,由河北工业大学杜青任主编并编写第三、五、八章,由山东科技大学刘然慧任主编并编写第二、七、十章,由内蒙古大学刘润星任主编并编写第四、十四章。参加本书编写工作的还有:山西师范大学葛吉虹并编写第十一章,内蒙古大学李万龙并编写第六章。全书经刘金春、刘然慧修改定稿。

本书在编写过程中,吸收、引用了部分国内优秀结构力学教材的观点、例题和习题。编者在此谨向这些文献的作者们致以衷心的感谢。

在本书的编写和出版过程中,得到了窦远明教授、魏连雨教授、阎西康教授的大力支持,他们对编写大纲及书稿提出了许多宝贵意见,在此,编者向他们深表感谢。

本书在编写过程中,我们虽夙兴夜寐、尽心竭力,但限于水平和经验,加之时间仓促,书中难免存在缺点和错误,诚恳地希望读者提出批评和指正。

编 者

目 录

第九章 位移法	1
§ 9-1 位移法的基本概念	1
§ 9-2 基本未知量数目的确定	4
§ 9-3 等截面直杆的转角位移方程	8
§ 9-4 应用位移法典型方程计算超静定结构	15
§ 9-5 应用结点和截面平衡条件计算超静定结构	30
§ 9-6 用位移法分析具有剪力静定杆的刚架	36
§ 9-7 用位移法计算对称结构	41
§ 9-8 支座位移和温度变化影响下超静定结构的计算	46
§ 9-9 位移法计算变截面结构	50
第十章 渐近法和超静定结构的影响线	74
§ 10-1 力矩分配法的基本原理	74
§ 10-2 力矩分配法计算连续梁和无结点线位移刚架	82
§ 10-3 力矩分配法与位移法的联合应用	94
§ 10-4 无剪力分配法	100
§ 10-5 连续梁的影响线	105
§ 10-6 连续梁的内力包络图	115
§ 10-7 超静定桁架的影响线	117
第十一章 矩阵位移法	128
§ 11-1 概述	128
§ 11-2 局部坐标系的单元刚度矩阵	131
§ 11-3 整体坐标系的单元刚度矩阵	136
§ 11-4 连续梁的整体刚度矩阵	142
§ 11-5 刚架的整体刚度矩阵	150
§ 11-6 非结点荷载的处理	155
§ 11-7 刚度集成法的计算步骤和算例	160
§ 11-8 忽略轴向变形时平面刚架的整体分析	173
§ 11-9 后处理法	177
第十二章 结构动力学	191
§ 12-1 概述	191
§ 12-2 单自由度体系的自由振动	195
§ 12-3 单自由度体系在简谐荷载作用下的强迫振动	206
§ 12-4 单自由度结构在任意荷载作用下的强迫振动	213
§ 12-5 隔振概念	219

§ 12-6	多自由度体系的自由振动	223
§ 12-7	多自由度体系主振型的正交性	243
§ 12-8	多自由度体系在简谐荷载作用下的强迫振动	245
§ 12-9	振型叠加法计算多自由度体系的强迫振动	250
§ 12-10	无限自由度体系的振动	254
§ 12-11	频率的近似计算法	259
第十三章	结构的极限荷载	275
§ 13-1	概述	275
§ 13-2	极限弯矩, 塑性铰和破坏机构	275
§ 13-3	单跨超静定梁的极限荷载	277
§ 13-4	连续梁的极限荷载	281
§ 13-5	比例加载的几个定理	284
§ 13-6	简单刚架的极限荷载	288
§ 13-7	确定梁和刚架极限荷载的增量变刚度法	290
第十四章	结构的稳定计算	305
§ 14-1	稳定计算的概念	305
§ 14-2	用静力法确定临界荷载	309
§ 14-3	用能量法确定临界荷载	315
§ 14-4	等截面直杆的稳定	322
§ 14-5	变截面杆件的稳定计算	328
§ 14-6	剪力对临界荷载的影响	330
§ 14-7	组合压杆的稳定	332
§ 14-8	刚架的稳定计算	336
附录		347

第九章 位 移 法

§9-1 位移法的基本概念

力法和位移法是分析超静定结构的两种基本方法。19 世纪末力法就用来分析各种超静定结构问题。随着结构的日益复杂,钢筋混凝土结构的广泛应用,出现了大量高次超静定刚架结构,若再用力法计算就显得十分繁琐。于是,在 20 世纪初,人们在力法的基础上又建立了位移法。

力法是以结构中的多余未知力作为基本未知量,选取静定结构作为基本结构进行计算,按位移条件求出多余未知力后,再据此进一步算得其他的反力、内力和位移。然而,我们知道,在确定的外因作用下,结构的内力和位移恒具有一定的关系,因此,我们也可遵循另一途径,即把结构的某些位移作为基本未知量,先设法求出它们,再据以求出结构的内力和其他位移。这种方法就是本章将要讨论的位移法。从位移法的基本原理出发,可衍生多种变体的计算方法,例如力矩分配法和迭代法等,这些变体的计算方法在生产实际中应用十分普遍。因此,学习本章的目的,除使初学者掌握位移法的基本原理外,还为以后学习其他各种变体方法打下良好的基础。此外,应用电子计算机计算结构所常用的直接刚度法也是根据位移法而来的,故本章的内容也是学习电算应用的一个基础。

总之,结构在一定的的外因作用下,其内力与位移之间具有一定的函数关系,确定的内力与确定的位移相对应。因此,可以先求内力再求位移,亦可先求位移再求内力。

为了说明位移法的基本概念,我们来研究图 9-1a)所示的连续梁,在荷载 q 作用下,产生的变形如图中虚线所示。其中 AB 杆和 BC 杆在结点 B 处的杆端转角是相等的。杆件 AB 和 BC 在结点 B 是刚性联结,如同在刚架中杆件联结的情况一样,我们称结点 B 为刚结点。为了使问题简化,在受弯杆件中,略去杆件的轴向变形和剪切变形的影响,并认为弯曲变形是很小的,因而假定在变形过程中受弯杆件两端之间的距离保持不变。图 9-1a)所示连续梁的变形情况,相当于图 9-1b)所示。其中 BC 杆相当于左端固定、右端铰支的梁,上面承受荷载 q 的作用,且在左端发生转角 φ_B ; AB 杆则相当于右端固定,左端铰支的梁,在其右端发生转角 φ_B 。因此,如果把结点 B 的转角 φ_B 当作支座位移这一外因来看待,则上述连续梁即可转化为两个单跨超静定梁来计算。只要知道了转角 φ_B 的大小,则按上一章介绍的力法,即可求得这两个单跨超静定梁的全部反力和内力,因而图 9-1a)所示连续梁的计算问题便可解决。由上可知,问题的关键在于确定未知量 φ_B 的大小。下面就以此连续梁为例说明基本未知量 φ_B 的计算方法以及 φ_B 确定之后如何进一步计算梁的内力。

为了能将图 9-1a)转化为图 9-1b)来计算,我们设想在连续梁的结点 B 处装上一个阻止转动的装置“▽”,称它为附加刚臂约束,如图 9-1c)所示。它的作用是控制结点 B 不发生转动(但不能阻止移动)。因为结点 B 无线位移,故在加入此附加刚臂后, B 就变成了固定端,原结构变成了由 AB 和 BC 这样两根一端固定另一端铰支的单跨超静定梁组成的组合体。这一组合体称为原结构按位移法计算时的基本结构。将外荷载作用于基本结构,并强使基本结构的附加刚臂发生与实际情况相同的转角 φ_B (在计算中以未知量 Z_1 表示),则基本结构的受力和变

形情况[图 9-1c)]就将与图 9-1a)所示原结构的情况完全相同。因此,我们可用基本结构的计算来代替原结构的计算。

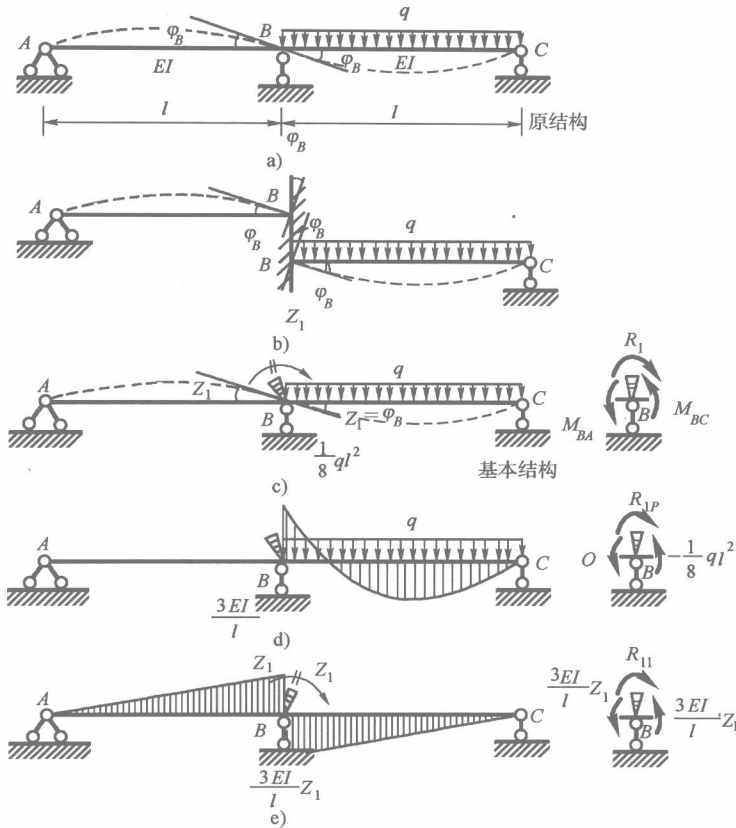


图 9-1 位移法计算连续梁

a)两跨连续梁;b)单跨超静定梁组合体;c)位移法基本结构;d)荷载单独作用下的弯矩图;e)结点位移单独作用下的弯矩图

根据上述概念,可按如下方法导出求解 Z_1 的方程。由叠加原理,可把图 9-1c)所示连续梁分解为图 9-1d)、e)所示两种情况。在图 9-1d)中,只有荷载 q 的作用而无转角 Z_1 的影响,其中 AB 杆无荷载作用,不发生变形,故无内力,而荷载 q 作用下的 BC 杆其弯矩图可按 § 8-3 确定。在图 9-1e)中,杆 AB 和 BC 均相当于一端固定另一端铰支的梁在其固端 B 处发生支座转动(大小为 Z_1)的情况,其弯矩图同样可用力法求得。设以 R_{1P} 表示基本结构由于荷载单独作用时在附加刚臂上产生的反力偶[图 9-1d)], R_{11} 表示基本结构由于发生转角 Z_1 时在附加刚臂上产生的反力偶[图 9-1e)]。则当荷载 q 与转角 Z_1 共同作用时,基本结构的附加刚臂上的反力偶 R_1 自然应等于上述两项之和,即 $R_1 = R_{11} + R_{1P}$ 。但由于此时基本结构的受力变形情况已与原结构相同,故知基本结构结点 B 处附加刚臂上的反力偶 R_1 应等于零。据此,可建立计算转角 Z_1 的方程为

$$R_{11} + R_{1P} = 0$$

如令 r_{11} 表示当 Z_1 为单位转角 $Z_1 = 1$ 时附加刚臂上的反力偶(图 9-2),则有 $R_{11} = r_{11}Z_1$, 故上述方程可写为

$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0$$

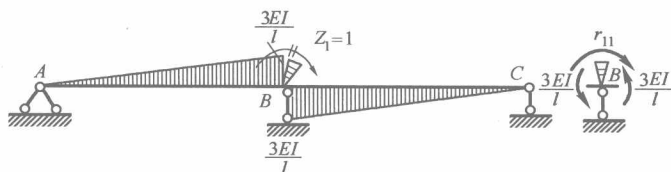


图 9-2 附加刚臂上反力偶的计算

这一方程称为位移法的典型方程。式中系数 r_{11} 和自由项 R_{1P} 的方向都规定与 Z_1 方向相同时为正,反之为负。故知 r_{11} 总是正值。

为求解典型方程,须分别求其系数和自由项,为此,取图 9-2 的结点 B 为隔离体,由力矩平衡条件可得

$$r_{11} = \frac{3EI}{l} + \frac{3EI}{l} = \frac{6EI}{l}$$

再取图 9-1d) 的结点 B 为隔离体,由力矩平衡条件可得

$$R_{1P} = -\frac{ql^2}{8}$$

负号表示 R_{1P} 的方向与 Z_1 的方向相反。

将系数和自由项代入位移法典型方程,得

$$\frac{6EI}{l}Z_1 - \frac{ql^2}{8} = 0$$

故

$$Z_1 = \frac{ql^3}{48EI}$$

求出 Z_1 后,根据叠加原理 $M = M_1 + M_P$ 即可求出原来结构的最后弯矩图,如图 9-3a) 所示。由此弯矩图再按静力平衡条件可作出其剪力图,如图 9-3b) 所示。

综上所述,位移法的基本思路是“先固定后放松”。“先固定”是指在原结构产生位移的结点上设置附加约束,使结点固定,从而得到由单跨超静定梁的组合物组成的基本结构,然后加上原有的外荷载;“后放松”是指人为地迫使原先被“固定”的结点恢复到结构原有的位移。通过上述两个步骤,使基本结构与原结构的受力和变形完全相同,从而可以通过基本结构来计算原结构的内力和变形。

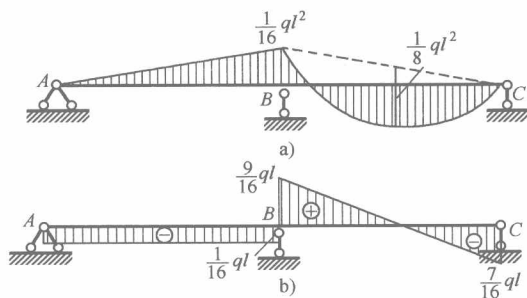


图 9-3 结构的内力图

a) 结构的最后弯矩图; b) 结构的最后剪力图

由上例可知,用位移法计算超静定结构,是把结构的某些位移作为基本未知量,由位移法典型方程求出基本未知量,进而即可解算结构的内力和其他位移。比较力法和位移法可以看出,两者所取途径虽然不同,但它们所遵循的原则却是一致的:利用基本结构的变形和受力情况与原结构相同的条件来解题。其中,力法通常是以静定结构作为其基本结构,利用已知的静定结构的计算方法来解决超静定结构的计算问题;而位移法则是以单跨超静定梁的组合物作为它的基本结构,利用已知的力法作为其计算基础。

对于基本结构与原结构一致的条件,力法是通过去掉多余联系处的约束代之以多余力,并使该多余力的大小能保证基本结构的变形与原结构一致从而达到内力一致;而位移法则是使附加约束处发生与原结构相同的位移,使基本结构与原结构的变形一致从而达到内力一致。值得指出的是:位移法的典型方程虽然是按静力平衡条件建立的,但是这并不意味着解算超静定结构毋需利用位移条件,因为整个计算过程是在符合结构的约束条件的情况下进行的,而且计算位移法方程中的系数和自由项时又需借助力法,所以按位移法求解仍然离不开变形条件。

§9-2 基本未知量数目的确定

在 §9-1 中介绍了位移法的基本概念,用位移法解算超静定结构是以结点位移为基本未知量,由位移法典型方程先将基本未知量求出,然后再计算各杆的内力。因此,在用位移法计算超静定梁和刚架时,必须首先确定基本未知量的数目,亦即确定结点位移的数目。§9-1 例中的两跨连续梁,只有一个结点角位移,这是最简单的情况。在一般情况下,结点位移分为结点角位移和结点线位移两类;前者系指刚结点的角位移,后者指刚结点或铰结点的线位移。下面举几个例子加以说明。

图 9-4 所示的刚架,在荷载作用下,其变形情况如图中虚线所示,其上 A, B 为固定端,既没有结点角位移也没有结点线位移,而刚结点 C 和 D 除发生转角外,还将发生线位移。“受弯直杆两端之间的距离在变形后保持不变”的假定,是我们确定独立结点线位移数目的依据。图 9-4a) 所示的刚架中,根据上述假定,除具有两个结点角位移 φ_C 和 φ_D 外,还有一个结点线位移 $\Delta_C = \Delta_D = \Delta$ 。在结点 C, D 加入控制刚结点转动的附加刚臂,在结点 D (或 C) 处加入一根附加链杆以控制结点的水平线位移,如图 9-4b) 所示。这样, C, D 结点受附加约束的作用就不再发生移动和转动, AC, CD, DB 都转化为单跨超静定梁,与此同时也组成了位移法的基本结构。如果使基本结构承受与原结构相同的荷载并使附加联系(刚臂和链杆)发生与实际情况相同的转角和线位移,则其受力和变形情况便与原结构相同,而在附加联系上即不应有任何反力偶和反力。据此,便可列出位移法典型方程,求解方程即可确定结点的转角和线位移,进而求出各杆的内力。

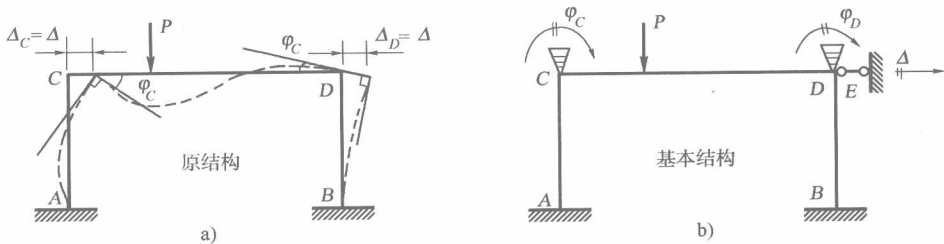


图 9-4 位移法分析刚架结构

a) 刚架在荷载作用下的变形; b) 位移法的基本结构

由上可知,我们可以把确定基本未知量的数目与选定位移法的基本结构结合起来同时进行。因为将原来结构转化为基本结构时,为了使各杆都转化为两端固定或一端固定另一端铰支的单跨超静定梁应在每一刚结点上加入附加刚臂以控制其转动,有几个刚结点就应加入几个附加刚臂,显然,附加刚臂的数目恰好等于结构中刚结点的数目;此外,还需加入一定数量的附加链杆以阻止各结点发生线位移,有几个独立结点线位移就应加入几个附加链杆,显然,附加链杆的数目与原结构各结点的独立线位移数目相等。由此可见,位移法中基本未知量的数

目就等于基本结构上所应具有附加联系的数目。因此,在选定基本结构的同时,基本未知量的数目也就确定。

确定基本结构所需附加刚臂的数目是很容易的,因为在原结构上,凡属各杆互相刚结的结点,都应加入一附加刚臂,故刚结点的数目数就是所需附加刚臂的数目,即为结点角位移的数目。

需要指出,在结构中有些结点虽然也有结点角位移或结点线位移,由于分析内力时不需要先计算出该位移,因而不必将它列为基本未知量,以减少计算工作量。如图 9-5a) 所示结构中,对联结 CD 与 DE 杆而言, D 结点为刚结点,也有转角位移,但由于 CDE 部分可以转化为 D 端铰支并在端部作用有已知外力(可根据静定外伸段 DE 上的荷载,利用平衡条件求出)的超静定梁,这样,便不需以 D 结点的角位移作为基本未知量,而该结构的基本未知量就只有 C 结点的角位移 φ_C 和水平线位移 Δ_C 了。又如图 9-5b) 所示结构中, EF 部分为一静定简支梁,由其上荷载所致的作用于 BD 杆之 E 处的外力,先利用平衡条件求出后,可径直以 BD 视作基本结构中的一个杆件,所以分析此结构内力时,不需计算 E 结点的角位移及线位移,因而 E 结点的角位移及线位移就不作为基本未知量。同理,图 9-5c) 所示结构中只有 C 结点的角位移及水平线位移共两个基本未知量。

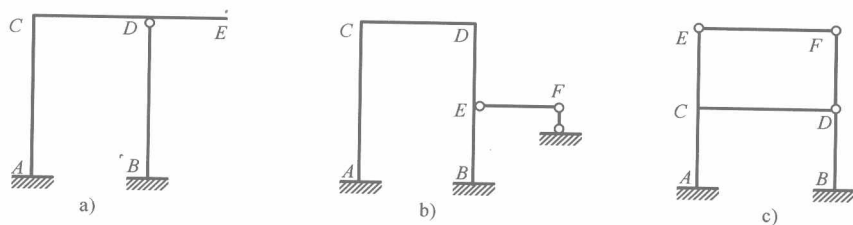


图 9-5 不作为基本未知量的结点位移

a) D 结点的角位移; b) E 结点的角位移及线位移; c) 只有 C 结点的位移作为基本未知量

由于在确定结点线位移数目的过程中,不计及杆件的轴向变形和弯曲变形,因此在计算结点线位移的数目时,可以先把所有的刚性结点和固定支座全部改成铰接,使结构变成一个铰接体系。然后分析该铰接体系的几何组成,如果它是几何不变的,说明结构无结点线位移,相反,如果铰接体系是几何可变的,再看最少需要增设几根附加支杆才能确保体系成为几何不变。或者说使铰接体系上每个结点成为不动点,所增设附加支杆的数目即为结构独立的结点线位移的数目。如图 9-6a) 所示的结构,把其所有的刚性结点和固定支座改成铰接后,则变为如图 9-6b) 所示的铰接体系。由几何组成分析可知,该体系是几何可变的,至少需要在上层横梁联结的结点和下层横梁联结的结点处分别加一支杆(图中虚线所示),才能使体系由几何可变成几何不变(实际上成为一个简单桁架),由此判定原结构有两个独立的结点线位移。结构基本未知量的总数等于结点的角位移数和线位移数之和。如图 9-6a) 所示结构有四个结点角位移和两个结点线位移,总共有六个位移基本未知量。

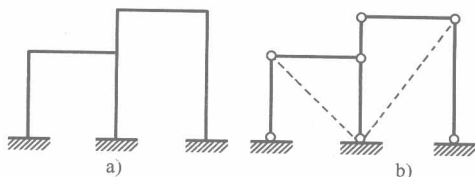


图 9-6 确定独立的结点位移数

a) 原结构; b) 虚线为结点线位移数

图 9-7a) 所示的刚架有 B 、 C 、 D 和 G 四个刚性结点,即有四个角位移。图 9-7b) 为原刚架相应的铰结体系,按几何组成分析,至少要在结点 B 和 G 处加上两根水平支杆后,方可使该体系成为几何不变。所以,原结构有两个独立的结点线位移。总共有六个位移基本未知量。

图 9-7a) 所示的刚架有 B 、 C 、 D 和 G 四个刚性结点,即有四个角位移。图 9-7b) 为原刚架相应的铰结体系,按几何组成分析,至少要在结点 B 和 G 处加上两根水平支杆后,方可使该体系成为几何不变。所以,原结构有两个独立的结点线位移。总共有六个位移基本未知量。

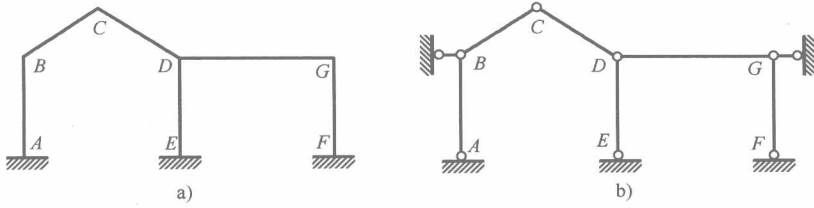


图 9-7 确定独立的结点位移数

a)原刚架有四个角位移;b)两个结点线位移

图 9-8a)所示刚架有两个结点角位移,其相应的铰结体系如图 9-8b)所示,需要在结点 F 和 H 处增设两根支杆后,体系由几何可变才能成为几何不变,所以原刚架有两个独立结点线位移。

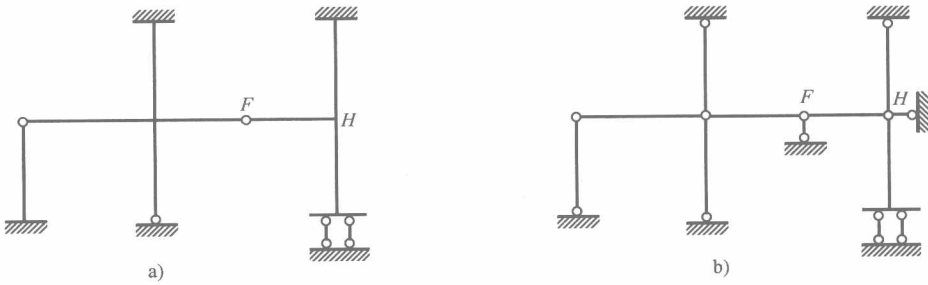


图 9-8 确定独立的结点位移数

a)两个结点角位移;b)两个结点线位移

图 9-9a)所示刚架,横梁 EH 具有无限刚性,在外力作用下只能平移而无转动,所以结点 E 和 H 只作水平移动而转角为零。这样,刚架只有结点 D 和结点 G (因柱 FH 的上段和下段的刚度不同,因而把 G 视为结点)两个未知角位移。刚架的铰结体系如图 9-9b)所示,需要在结点 G 、 H 和 D 处各加上一水平支杆,即可成为几何不变体系。所以原刚架有三个独立结点线位移。

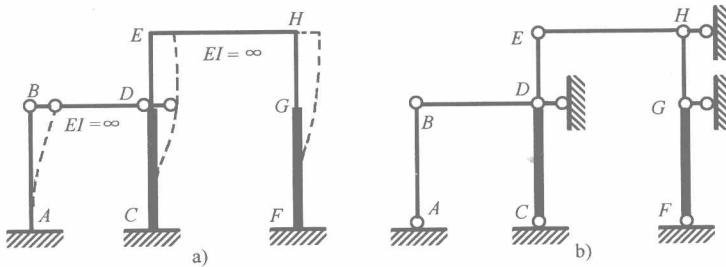


图 9-9 确定独立的结点位移数

a)确定角位移;b)确定线位移

图 9-10a)所示刚架,阴影部分的刚度为无限刚性,它只能平动而不能转动,故结点 E 、 F 和 H 的角位移均为零,于是刚架只有 B 、 C 两个刚结点的角位移。图 9-10b)为刚架的铰结体系,

只要在结点 B 处加上一支杆,体系即成为几何不变。所以原刚架只有一个线位移。

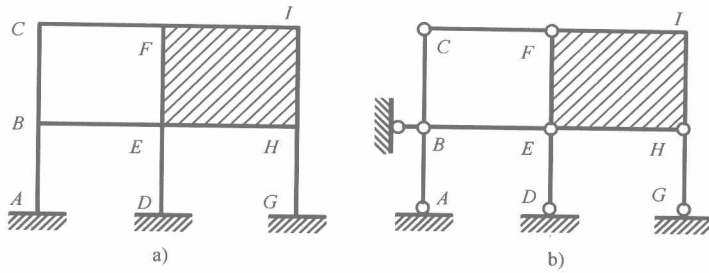


图 9-10 确定独立的结点位移数
a)确定角位移;b)确定线位移

应当指示,上述确定结点线位移数目的方法,前提是不考虑受弯直杆的轴向变形。对于二力杆(即链杆)必须考虑轴向变形。因此,当确定图 9-11a)所示刚架的线位移数目时,在其相应的铰结体系[图 9-11b)]上, DF 和 GH 为二力杆,因而要加上三根支杆后,才能使每个结点成为不动点(即几何不变),所以原刚架具有三个线位移。

在刚架中,如果具有弹簧支承,确定位移未知量数目时,需要计及弹簧支承的位移。如图 9-12a)所示刚架,支座 A 为铰弹簧、支座 D 为线弹簧,在外力作用下,铰弹簧要发生转动,是一个未知的角位移。因此,原刚架共有两个角位移。图 9-12b)为刚架的铰结体系,需要在 D 处加上一支杆,才能使每个结点成为不动点,所以刚架只有一个线位移。

对于桁架结构而言,每个结点具有两个线位移,每一支杆为一个约束,相当于减少一个位移。若以 j 表示桁架的结点数,以 S 表示支杆数,于是在考虑杆件轴向变形的情况下,桁架的结点位移总数为

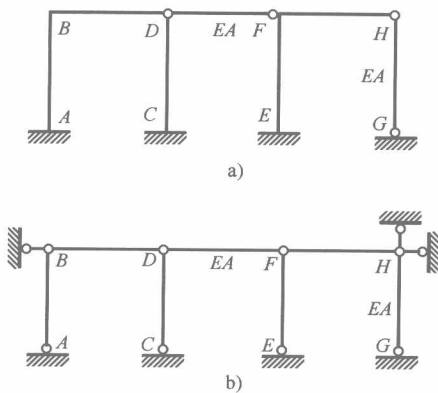


图 9-11 考虑链杆轴向变形的结点线位移
a)刚架结构;b)确定线位移

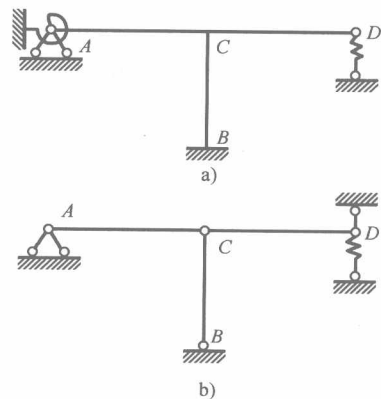


图 9-12 具有弹簧支承的结点位移数
a)确定角位移;b)确定线位移

$$n = 2j - S$$

如图 9-13 所示桁架, $j=5, S=4$,由此可得 $n=2 \times 5 - 4=6$ 。该桁架共有六个位移未知量。

如果考虑受弯直杆的轴向变形,在刚架中每个刚性结点将有三个独立的位移未知量(其中一个结点角位移,两个独立结点线位移)。这样刚架的总位移数将大为增加。如图 9-14 所示刚架,当不计各杆的轴向变形时,总位移数是三个,当计及各杆的轴向变形时,刚性结点 B, D 各有三个独立位移,于是刚架的总位移数增至六个。

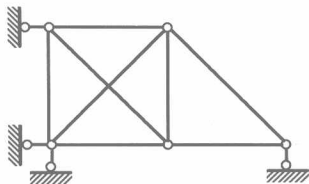


图 9-13 计算桁架结点位移数

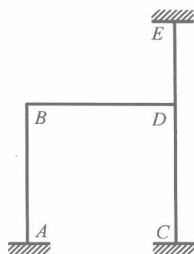


图 9-14 计算刚架结点位移数

§ 9-3 等截面直杆的转角位移方程

以上讨论可知,位移法是以单跨超静定梁的组合物作为它的基本结构。在计算位移法典型方程中的系数和自由项时,需要用到单跨超静定梁在荷载、支座位移(包括结点角位移和独立的结点线位移)情况下的杆端弯矩和剪力。例如在图 9-2 中,当求系数 r_{11} 时需要知道单位结点位移影响下 AB 杆和 BC 杆的杆端弯矩;而在计算 R_{1P} 时[图 9-1d],又需知道单跨超静定梁 BC 在荷载作用下的杆端弯矩。而有了杆端弯矩后,则杆端剪力即可利用平衡条件求出。因此,我们先讨论单跨超静定梁的杆端弯矩与荷载和杆端位移(转角和线位移)之间的关系。说明这种关系的表达式即称为转角位移方程。以下我们来推导等截面直杆的转角位移方程。

在推导转角位移方程之前,我们首先说明杆端弯矩的表示方法和正、负号的规定。在位移法中,对于杆端弯矩,用符号 M_{ik} 表示,下标 ik 表示该弯矩所属的杆件,并规定前一个下标表示该弯矩所属的杆端,后一个下标表示同一杆件的另一端(或称为远端)。例如,对于图 9-15a)所示的 AB 梁,其 A 端的弯矩以 M_{AB} 表示,而 B 端的弯矩则以 M_{BA} 表示。至于它们的正负号则采用如下规定:对杆端而言,弯矩以顺时针方向为正;对支座或结点而言,则以逆时针方向为正。在图 9-15a)中, A 端的弯矩 M_{AB} 为负,而 B 端的弯矩 M_{BA} 则为正。其次,我们给出杆端位移的表示方法和正负号规定。图 9-15b)所示一刚架或连续梁中的杆件 AB ,它承受任意荷载且其两端发生了位移,因为不考虑剪切变形的影响,杆轴挠曲线上某点之切线的倾角 φ 便等于该点横截面的转角。设以 φ_A 、 φ_B 分别表示 A 、 B 端的转角,以顺时针转动为正。又因挠度、转角是微小的,可认为直杆两端间的距离在变形前后保持不变,故杆件两端的水平位移必然相等,即 $u_A = u_B$ 。 v_A 、 v_B 分别表示 A 、 B 端的竖向位移。 $\Delta_{AB} = v_B - v_A$ 称为 A 、 B 两端的相对线位移,以使杆件顺时针转动时为正。可以看出,杆端弯矩 M_{AB} 、 M_{BA} 是由 φ_A 、 φ_B 、 Δ_{AB} 和作用于杆上的原有荷载所决定的。在转角位移方程中,也常用 $\beta_{AB} = \frac{\Delta_{AB}}{l}$ 表示杆端的相对位移[图 9-15b)], β 称为弦转角,以使杆顺时针转动时为正。

为了导出等截面直杆的转角位移方程,首先讨论各种因素单独作用的特殊情况,然后加以综合。

一、两端固定单跨超静定梁的杆端内力与杆端位移及荷载的关系

1. 梁的一端发生角位移

设以 φ_A 、 φ_B 分别表示梁的 A 端和 B 端的转角,以顺时针转动为正。图 9-16a)所示为两端固定梁,已知 A 端发生角位移 φ_A ,而 B 端固定不动,应用力法计算出其杆端弯矩为

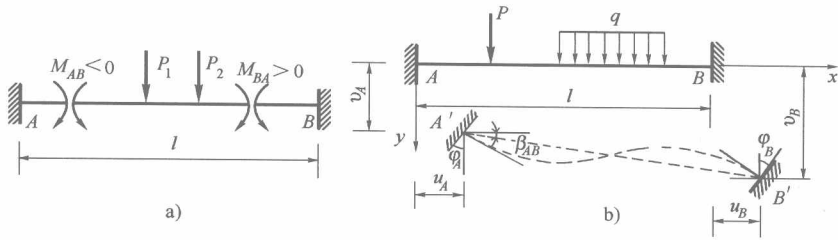


图 9-15 杆端内力及位移的表示

a) 杆端弯矩; b) 杆端位移

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{4EI}{l} \varphi_A \\ M_{BA} &= \frac{2EI}{l} \varphi_A \end{aligned} \right\} \quad (9-1)$$

由静平衡条件可求出杆端剪力(正负号规定同前)

$$Q_{AB} = Q_{BA} = -\frac{6EI}{l^2} \varphi_A \quad (9-2)$$

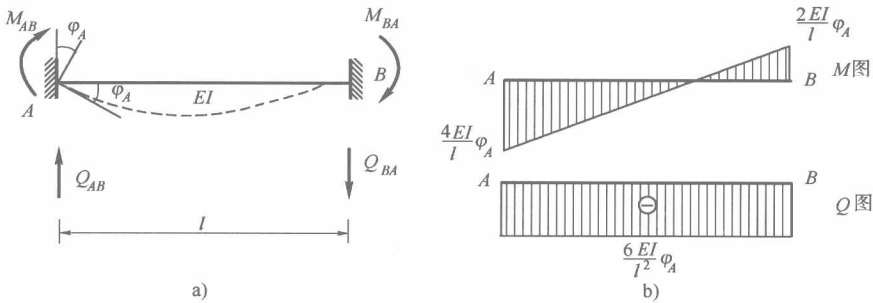


图 9-16 两端固定单跨超静定梁

a) A 端发生角位移 φ_A ; b) 弯矩图和剪力图

绘出弯矩图和剪力图如图 9-16b) 所示。

同理, 当 A 端固定不动, 仅 B 端发生角位移 φ_B 时, 可求得该梁的杆端弯矩和杆端剪力分别为

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{2EI}{l} \varphi_B \\ M_{BA} &= \frac{4EI}{l} \varphi_B \end{aligned} \right\} \quad (9-3)$$

$$Q_{AB} = Q_{BA} = -\frac{6EI}{l^2} \varphi_B \quad (9-4)$$

2. 梁的两端发生相对线位移

图 9-17 所示两端固定梁, A、B 两端均发生水平和竖向位移。根据变形假定, A、B 两端距离保持不变, 故 A、B 两端水平位移相等, 即 $\Delta_{AH} = \Delta_{BH}$ 。B、A 两端的竖向位移之差称为 A、B

两端的相对线位移,用 Δ_{AB} 表示,即 $\Delta_{AB} = \Delta_{BV} - \Delta_{AV}$ 。变形后杆两端连线 $A'B'$ 与变形前轴线的夹角 β_{AB} 称为弦转角, $\beta_{AB} = \frac{\Delta_{AB}}{l}$,以使杆件顺时针转动为正。而相对线位移的正负号与弦转角相符合,即弦转角为正时,对应的相对线位移也为正。由于杆件平行移动(图 9-17 中杆 AB 移动到 $A'B''$ 位置)时,不引起杆端弯矩。因此,只需考虑两端在垂直杆轴方向发生相对线位移 Δ_{AB} 的情形,如图 9-18a)所示。

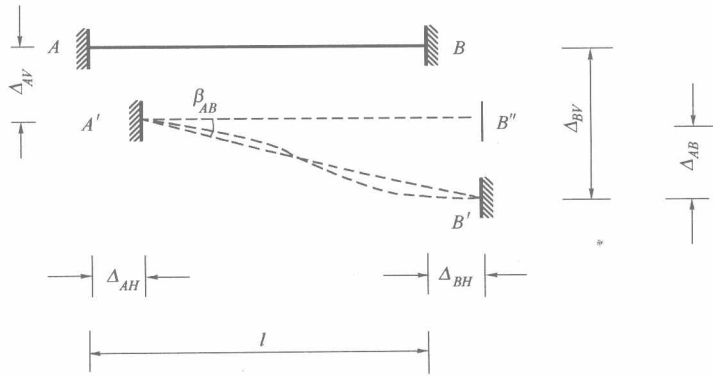


图 9-17 两端固定梁的两端发生相对线位移

图 9-18a)所示两端固定梁,两端发生相对线位移 Δ_{AB} 。用力法计算出杆端弯矩为

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= -\frac{6EI}{l} \cdot \frac{\Delta_{AB}}{l} \\ M_{BA} &= -\frac{6EI}{l} \cdot \frac{\Delta_{AB}}{l} \end{aligned} \right\} \quad (9-5)$$

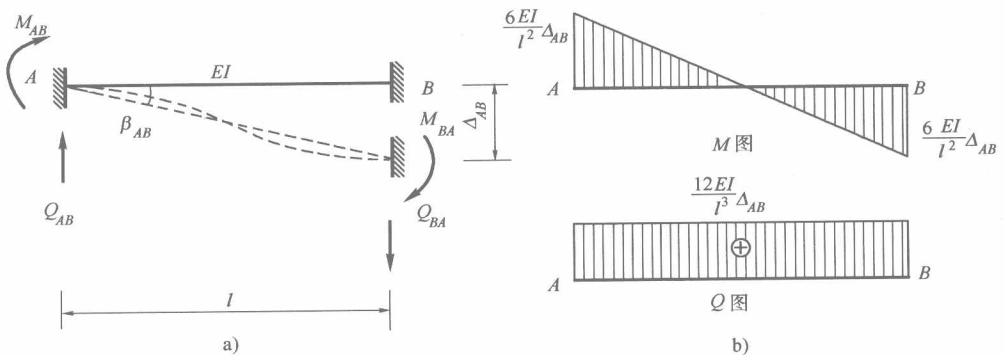


图 9-18 两端固定单跨超静定梁
a)两端发生相对线位移;b)弯矩图和剪力图

利用静平衡条件可以求得杆端剪力为

$$Q_{AB} = Q_{BA} = \frac{12EI}{l^2} \cdot \frac{\Delta_{AB}}{l} \quad (9-6)$$

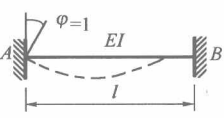
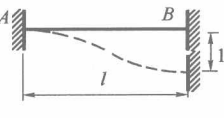
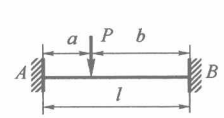
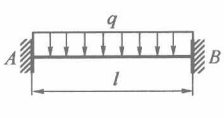
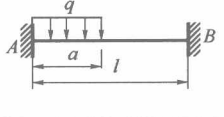
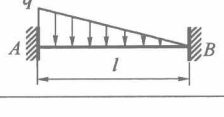
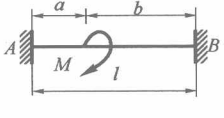
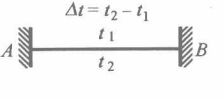
绘出弯矩图和剪力图如图 9-18b) 所示。

3. 梁上只有荷载作用

由荷载引起的杆端弯矩和杆端剪力分别称为固端弯矩和固端剪力。它们的表示方法是在端弯矩和端剪力的符号上加右上标“F”。例如杆 AB 的 A 端固端弯矩用 M_{AB}^F 表示，固端剪力用 Q_{AB}^F 表示。固端弯矩和固端剪力也可以按力法计算得出，现将不同荷载作用下的固端弯矩值和固端剪力值列于表 9-1 中。

不同荷载作用下固端弯矩和剪力值

表 9-1

编号	梁的简图	弯 矩		剪 力	
		M_{AB}	M_{BA}	Q_{AB}	Q_{BA}
1		$4i \left(i = \frac{EI}{l}, \text{下同} \right)$	$2i$	$-\frac{6i}{l}$	$-\frac{6i}{l}$
2		$-\frac{6i}{l}$	$-\frac{6i}{l}$	$-\frac{12i}{l^2}$	$\frac{12i}{l^2}$
3		$-\frac{Pab^2}{l^2}$	$\frac{Pa^2b}{l^2}$	$\frac{Pb^2(l+2a)}{l^3}$	$-\frac{Pa^2(l+2b)}{l^3}$
		当 $a=b=l/2$ 时, $-\frac{Pl}{8}$	$\frac{Pl}{8}$	$\frac{P}{2}$	$-\frac{P}{2}$
4		$-\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql}{12}$
5		$-\frac{qa^2}{12l^2}(6l^2-8la+3a^2)$	$\frac{qa^3}{12l^3}(4l-3a)$	$\frac{qa}{2l^3}(2l^3-2la^2+a^3)$	$-\frac{qa^3}{2l^3}(2l-a)$
6		$-\frac{ql^2}{20}$	$\frac{ql^2}{30}$	$\frac{7ql}{20}$	$-\frac{3ql}{20}$
7		$M \frac{b(3a-l)}{l^2}$	$M \frac{a(3b-l)}{l^2}$	$-M \frac{6ab}{l^3}$	$-M \frac{6ab}{l^3}$
8		$-\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$	$\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$	0	0