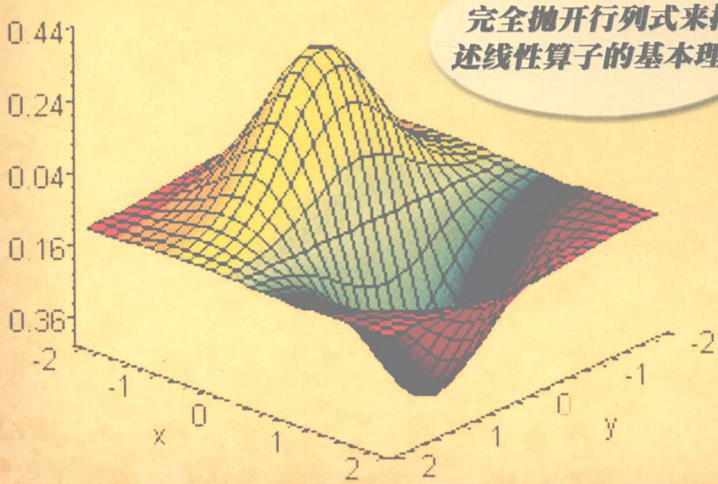
TURING 图灵数学·统计学丛书34

Springer

完全抛开行列式来描述线性算子的基本理论



Linear Algebra Done Right

线性代数应该这样学

（第2版）

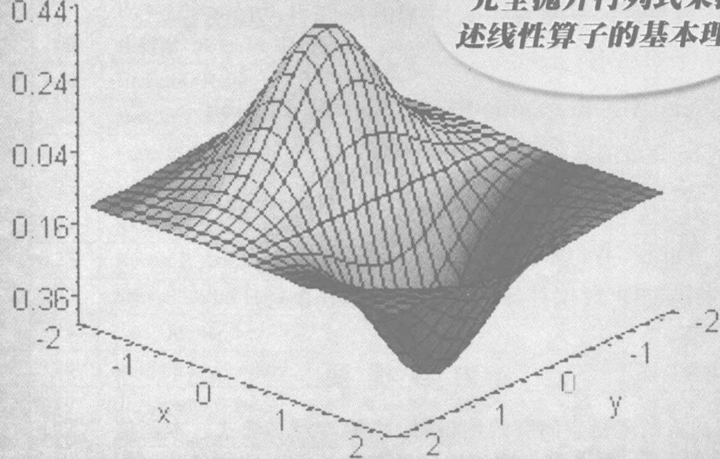
[美] Sheldon Axler 著
杜现昆 马晶 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书34

Springer

完全抛开行列式来描述线性算子的基本理论



Linear Algebra Done Right

线性代数应该这样学

（第2版）

[美] Sheldon Axler 著
杜现昆 马晶 译

人民邮电出版社
北 京

图书在版编目(CIP)数据

线性代数应该这样学：第 2 版 / (美) 阿克斯勒 (Axler, S.) 著; 杜现昆, 马晶译. —北京：人民邮电出版社, 2009. 6

(图灵数学·统计学丛书)

书名原文: Linear Algebra Done Right, Second Edition

ISBN 978-7-115-20614-5

Ⅰ. 线··· Ⅱ. ①阿··· ②杜··· ③马··· Ⅲ. 线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 044160 号

内 容 提 要

本书强调抽象的向量空间和线性映射, 内容涉及多项式、本征值、本征向量、内积空间、迹与行列式等. 本书在内容编排和处理方法上与国内通行的做法大不相同, 它完全抛开行列式, 采用更直接、更简捷的方法阐述了向量空间和线性算子的基本理论. 书中对一些术语、结论、数学家、证明思想和启示等做了注释, 不仅增加了趣味性, 还加强了读者对一些概念和思想方法的理解.

本书起点低, 无需线性代数方面的预备知识即可学习, 非常适合作为教材. 另外, 本书方法新颖, 非常值得相关教师和科研人员参考.

图灵数学·统计学丛书

线性代数应该这样学（第 2 版）

◆ 著　　[美] Sheldon Axler
　译　　杜现昆　马　晶
　责任编辑　明永玲

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编 100061　　电子函件 315@ptpress.com.cn
　网址：http://www.ptpress.com.cn
　北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000　1/16
　印张：16.5
　字数：321 千字　　2009 年 6 月第 1 版
　印数：1–3 000 册　　2009 年 6 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2008-2562 号

ISBN 978-7-115-20614-5/O1

定价：39.00 元

读者服务热线：(010)51095186　印装质量热线：(010) 67129223

反盗版热线：(010)67171154

译者简介

杜现昆 河南省内黄县人, 生于 1961 年 8 月. 1988 年于吉林大学数学所获得博士学位. 现任吉林大学数学学院教授, 博士生导师, 吉林省数学会常务理事,《吉林大学学报理学版》编委. 主要研究环的结构理论及 Jacobi 猜测等. 著有《高等代数》(与牛凤文、原永久合著. 高等教育出版社, 2006).

马晶 辽宁省沈阳市人, 生于 1978 年 12 月. 2005 年于吉林大学数学所获得博士学位. 2005 年 9 月至 2007 年 9 月在山东大学数学与系统科学学院从事博士后研究工作. 现任吉林大学数学学院副教授, 主要从事代数学和数论方面的研究.

译 者 序

线性代数教材非常多, 这本 *Linear Algebra Done Right* 肯定是最具特色、最流行的线性代数教材之一. 原书 1996 年出版了第 1 版, 1997 年出版了第 2 版, 到 2008 年已经印刷了 11 次, 被 30 多个国家的 220 多所高等院校用作教材.

本书的主要内容是向量空间和线性算子. 描述线性算子的结构是线性代数的中心任务之一, 传统的方法多以行列式为工具. 作者认为行列式既难懂, 又不直观, 还缺少动机, 致使思路曲折, 从而掩盖了线性代数的本质. 因此, 本书完全抛开行列式, 采用更直接、更简捷的方法阐述了线性算子的基本理论, 这种独特的方法可以帮助学生更加深刻地理解线性算子的结构. 作者认为这才是恰当的方法.

本书虽然是线性代数的第二课程的教材, 但是它起点低, 由浅入深, 论述详细, 无需线性代数方面的预备知识即可学习, 因此很适合作自学教材和参考书. 本书还对一些术语、结论、数学家、证明思想和启示等做了注释, 这不仅增加了趣味性, 而且加强了读者对一些概念和思想方法的理解.

本书的内容大致相当于我国高校数学院系高等代数课程一个学期的教学内容. 本书在内容编排和处理方法上与国内通行的做法大不相同, 是一本很好的参考书, 对我国高等代数课程的教学、教研、教改都有很好的借鉴作用.

在本书的翻译过程中, 我们得到了作者 Sheldon Axler 教授及吉林大学研究生郭宏博和李建涛的帮助, 特此致谢.

由于译者的中文和英文水平都有限, 因此译文难免有词不达意之处, 欢迎读者指正.

译 者

2008 年 10 月

致 教 师

你可能正准备给学生讲授第二门线性代数课程. 学生在第一次接触线性代数时, 可能只是学习了欧氏空间和矩阵, 而现在本课程强调抽象的向量空间和线性映射.

需要对本书这个大胆的书名 (*Linear Algebra Done Right*) 做一些解释. 几乎所有的线性代数书都使用行列式来证明: 有限维复向量空间上的线性算子都有本征值. 但是, 行列式既难懂又不直观, 而且其定义的引入也往往缺少动机. 为了证明复向量空间上本征值的这个存在性定理, 大部分教科书都必须先定义行列式, 再证明一个线性映射不可逆当且仅当它的行列式等于 0, 然后定义特征多项式. 这种曲折的 (折磨人的?) 思路根本不能让学生领会为什么本征值一定存在.

与此相反, 本书所给出的不使用行列式的简单证明更直观. 本书把行列式放在了最后, 这就开辟了一条通往线性代数的主要目标 —— 理解线性算子结构的新途径.

本书从线性代数的初步知识讲起, 除了一般的数学基础之外，不再需要更多的预备知识. 本书大部分习题都需要理解书中的证明, 即使学生已经接触过本书前几章中的一些内容, 他们也会不习惯做本书所提供的这种类型的习题.

- 第 1 章给出了向量空间的定义, 并且阐述了它们的基本性质.
- 第 2 章定义了线性相关、张成、基、维数, 并给出了有限维向量空间的基础理论.
- 第 3 章引入了线性映射. 这一章的主要结果是, 线性映射的零空间的维数加上值域的维数等于定义域的维数.
- 第 4 章给出了多项式的部分理论, 这是理解线性算子所必需的. 如果在课堂上把本章的证明都讲一遍 (本章没有线性代数内容), 那么线性代数的某些重要内容可能就没时间讲了. 学生应该已经熟悉本章关于多项式的这些定理, 因此可以要求他们只看结果的陈述而不看证明. 当然, 好奇的学生还是会看其中的一些证明的, 这也正是本书包含这些证明的原因.
- 第 5 章引入了本征向量, 这源自将线性算子限制到更小

的子空间上来研究的思想. 本章的精彩之处是复向量空间上本征值存在性的简洁证明. 我们还利用这个结论, 证明了复向量空间上的线性算子关于某个基有上三角矩阵. 用类似的方法, 证明了实向量空间上的线性算子都具有 1 维或 2 维的不变子空间, 并利用此结果, 证明了奇数维实向量空间上的线性算子都有本征值. 我们的这些证明都不需要定义行列式和特征多项式.

- 第 6 章定义了内积空间, 阐述了它们的基本性质并介绍了一些标准工具, 如规范正交基、格拉姆–施密特正交化过程以及伴随. 本章还介绍了如何利用正交投影来解某些极小化问题.
- 第 7 章的精彩之处是谱定理, 它刻画了本征向量可以组成规范正交基的线性算子. 有了前几章的工作, 本章的证明都特别简单. 这一章还讨论了正定算子、线性等距同构、极分解以及奇异值分解.
- 第 8 章引入了极小多项式、特征多项式以及广义本征向量，主要成果是用广义本征向量来描述复向量空间上的线性算子. 利用这个描述可以证明出几乎所有通常要使用 Jordan 形来证明的结果. 例如, 用这些工具我们证明了复向量空间上的可逆线性算子都有平方根. 本章最后证明了复向量空间上的线性算子都有 Jordan 形.
- 第 9 章的核心是实向量空间上的线性算子. 此类算子可能没有本征值, 而 2 维不变子空间弥补了这一不足, 从而可以得到与复向量空间类似的结果.
- 在第 10 章中, 我们利用特征多项式给出了迹和行列式的定义 (前面定义特征多项式时并未使用行列式). 在复向量空间上, 这些定义还可以用另一种方式来陈述: 迹是所有本征值之和, 行列式是所有本征值之积 (两种情况都计重数). 传统的处理方法是利用行列式来证明本征值的存在性, 这不可能得到这些好记的定义. 我们现在的处理方法也使得行列式的一些标准定理变得更加清楚. 我们利用极分解和自伴算子的刻画导出了多重积分的换元公式, 这就使得行列式在其中的出现看起来非常自然.

通过取 $\mathbf{F}$ 表示实数域或复数域, 本书经常同时发展实向量空间和复向量空间上的线性代数理论. 也可以采用抽象的域, 但

这只会增加抽象性而不会导出线性代数的任何新内容. 只考虑实数和复数的另一个理由是, 可视多项式为真正的函数, 而不必像在有限域上那样把多项式看作更形式化的对象. 最后还有一点, 即使理论的开始部分可以在任意域上展开, 但是内积空间还是会把我们的讨论拉回到实向量空间和复向量空间.

即便是这么薄的一本书, 你也不要指望能把所有内容都讲完. 一学期讲完前八章就已经是一个雄心勃勃的目标了. 如果一定要讲到第 10 章, 我建议快速讲完第 1 章、第 2 章和第 4 章 (学生可能在以前的课程中学过这些内容), 并跳过第 9 章 (在这样的情况下, 你就只能在复向量空间上讨论迹和行列式).

提高学生理解和熟练运用线性代数知识的能力要比讲授任何一套特殊的定理都更重要. 数学只能做着学, 好在线性代数有很多好的作业题. 在教这门课程时, 我通常每次课留两三道习题作为作业, 要求到下次课时交. 讲解作业大概要占用一节课的三分之一甚至一半的时间.

有一份包含全部练习题答案的手册可供 (免费) 使用, 但只提供给使用本书作为教材的教师. 教师可以给我发 E-mail 索取该手册 (也可以和 Springer 出版社联系).

请到我的网站上查看本书的勘误表 (我希望它是空的或者几乎是空的) 和其他信息.

如果你能告知本书中的错误, 哪怕是很小的错误, 我都会十分感激. 欢迎为本书的改进提出建议, 哪怕是细微的改进. 请随时和我联系.

祝你教学愉快!

Sheldon Axler
美国旧金山州立大学数学系
美国旧金山, CA 94132
E-mail: `axler@math.sfsu.edu`

致 学 生

你可能要学习第二门线性代数课程. 在你第一次接触线性代数时, 学习的重点可能是欧氏空间和矩阵. 而本书关注的是向量空间和线性映射. 这些术语以后会定义的, 所以即使你现在不了解这些术语的含义也没关系. 本书从线性代数的初步知识讲起, 不需要线性代数方面的任何基础. 关键是你要潜心于严谨的数学, 尤其要深入地理解定义、定理、证明.

别指望读数学书能像读小说一样. 要是你不到一小时就读完一页的话, 那就可能读得太快了. 当遇到 "你应该验证" 这样的话时, 你的确需要自己动笔来验证一下. 有些证明步骤被省略了, 你要将其补充完整. 对每一个定义都要仔细琢磨, 用心体会. 对每一个定理都要试着举例说明为什么定理中的假设都是必要的.

请到我的网站上查看本书的勘误表 (我希望它是空的或者几乎是空的) 和其他信息.

如果你能告知本书中的错误, 哪怕是很小的错误, 我都会十分感激. 欢迎为本书的改进提出建议, 再小的建议我都欢迎.

祝你学习愉快!

Sheldon Axler
美国旧金山州立大学数学系
美国旧金山, CA 94132
E-mail: axler@math.sfsu.edu

致 谢

万分感谢在过去的两个世纪里为创建线性代数贡献智慧的数学家们. 在撰写本书的过程中，我尽量寻求阐述线性代数理论和证明其定理的最佳方式, 而不去借鉴大多数教科书中所采用的标准方法和证明. 虽然我确实受到了过去所学习过的许多书籍的影响, 但在本书的撰写过程中我并没有参考任何其他的书籍. 本书中大部分结果都属于公共的数学遗产. 定理的某个特殊情况可能在古代 (对线性代数来说这指的是 19 世纪) 被首次证明, 现在我们看到的定理是众多数学家经过数十年不断地加强和完善才得到的. 但要一一列举每一位数学家的确切贡献却是一项很困难的任务, 本书也就没有逐一列出. 无论如何, 读者都不要把本书中的任何定理当成我的原创.

本书在很多人的帮助下才得以完善. 感谢下列人员提出宝贵建议和指正：William Arveson(建议了定理 5.13 的证明), Marilyn Brouwer, William Brown, Robert Burckel, Paul Cohn, James Dudziak, David Feldman (建议了引理 8.40 的证明), Pamela Gorkin, Aram Harrow, Pan Fong Ho, Dan Kalman, Robert Kantrowitz, Ramana Kappagantu, Mizan Khan, Mikael Lindström, Jacob Plotkin, Elena Poletaeva, Mihaela Poplicher, Richard Potter, Wade Ramey, Marian Robbins, Jonathan Rosenberg, Joan Stamm, Thomas Starbird, Jay Valanju, Thomas von Foerster.

最后, 感谢 Springer 出版社在我需要时所给予的帮助，并允许我最终决定本书的内容和版式.

目　　录

第1章　向量空间

线性代数主要研究有限维向量空间上的线性映射. 这些术语的含义我们以后会搞清楚的. 本章将给出向量空间的定义, 并讨论向量空间的基本性质.

在某些数学领域, 包括线性代数, 如果在研究实数的同时也研究复数, 就会得到更好的定理, 而且理解也会更深刻. 因此, 我们先介绍复数及其基本性质.

§1.1 复 数

瑞士数学家欧拉 (Leonhard Euler) 于 1777 年最先使用符号 i 来表示 $\sqrt{-1}$.

你应该已经熟悉实数集 $\mathbf{R}$ 的基本性质. 复数的发明使得我们可以对负数取平方根. 关键思想是假定 -1 有平方根, 记为 i, 并按照通常的算术法则对 i 进行运算. 形式上, 一个**复数 (complex number)** 就是一个有序的数对 (a, b), 其中 $a, b \in \mathbf{R}$, 但是我们把它写成 $a + bi$. 把所有复数构成的集合记为 $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbf{R}\}.$$

若 $a \in \mathbf{R}$, 则将 $a + 0i$ 和 a 看成是一样的. 于是可以将 $\mathbf{R}$ 看作 $\mathbf{C}$ 的一个子集.

$\mathbf{C}$ 上的加法和乘法定义如下:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

其中 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. 在这样的乘法下, 你应该验证 $i^2 = -1$. 不要去背上面的复数乘法公式, 只要记住 $i^2 = -1$ 并利用通常的运算法则就可以推导出这个公式.

利用熟知的实数的性质, 你应该验证, $\mathbf{C}$ 上的加法和乘法满足以下性质:

交换性 (commutativity)

对所有 $w, z \in \mathbf{C}$, 都有 $w + z = z + w$, $wz = zw$;

结合性 (associativity)

对所有 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$, 都有

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$;

单位元 (identities)

对所有 $z \in \mathbf{C}$, 都有 $z + 0 = z$, $z1 = z$;

加法逆 (additive inverse)

对每个 $z \in \mathbf{C}$, 都存在唯一一个 $w \in \mathbf{C}$, 使得 $z + w = 0$;

乘法逆 (multiplicative inverse)

对每个 $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$, 都存在唯一一个 $w \in \mathbf{C}$, 使得 $zw = 1$;

分配性质 (distributive property)

对所有 $\lambda, w, z \in \mathbf{C}$, 都有 $\lambda(w+z)=\lambda w+\lambda z$.

对 $z \in \mathbf{C}$, 以 $-z$ 表示 z 的加法逆. 因而, $-z$ 是使得

$$z+(-z)=0$$

的唯一复数. $\mathbf{C}$ 上的减法定义为

$$w-z=w+(-z),$$

其中 $w, z \in \mathbf{C}$.

对 $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$, 以 $1/z$ 表示 z 的乘法逆. 因而, $1/z$ 是使得

$$z(1/z)=1$$

的唯一复数. $\mathbf{C}$ 上的除法定义为

$$w/z=w(1/z),$$

其中 $w, z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$.

为了使给出的定义和证明的定理对于实数和复数都适用, 我们将采用如下记号:

$$\boxed{\text{本节中 } \mathbf{F} \text{ 总表示 } \mathbf{R} \text{ 或 } \mathbf{C}.}$$

于是, 如果我们在 $\mathbf{F}$ 上证明了一个定理, 那么将其中的 $\mathbf{F}$ 换成 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$, 定理照样成立. $\mathbf{F}$ 中的元素称为**标量 (scalar)**. “标量”就是数的意思. 通常用标量来强调一个对象是数, 而不是向量 (马上就给出向量的定义).

选用字母 $\mathbf{F}$ 是因为 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 都是所谓**域** (field) 的例子. 本书并不讨论 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 之外的域. 线性代数中很多对 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 成立的定义、定理、证明对任意域都照样成立.

对 $z \in \mathbf{F}$ 及正整数 m, 我们把 z^m 定义为 m 个 z 的乘积:

$$z^m=\underbrace{z \cdots\cdots z}_{m\text{个}}.$$

显然, 对所有 $w, z \in \mathbf{F}$ 及正整数 m, n, 都有 $(z^m)^n=z^{mn}$, $(wz)^m=w^m z^m$.

§1.2 向量空间的定义

在给出向量空间的定义之前先来看两个重要的例子. 向量空间 $\mathbf{R}^2$ 可以看作一个平面, 它由所有有序实数对构成:

$$\mathbf{R}^2=\{(x,y):x,y\in\mathbf{R}\}.$$

向量空间 $\mathbf{R}^3$ 可以看作通常的空间, 它由所有有序三元实数组构成:

$$\mathbf{R}^3=\{(x,y,z):x,y,z\in\mathbf{R}\}.$$

为了把 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$ 推广到更高维, 需要先讨论组的概念. 设 n 是一个非负整数. **长度 (length)** 为 n 的**组 (list)** 是按序排列、用逗号隔开并且两端用括弧括起来的 n 个对象 (可以是数、其他组或者更抽象的东西). 一个长度为 n 的组具有如下形式:

很多数学家称长度为 n 的组为 n **元组 (tuple)**.

$$(x_1,\cdots,x_n).$$

于是, 长度为 2 的组是有序对, 而长度为 3 的组是有序 3 元组. 对于 $j\in\{1,\cdots,n\}$, 称 x_j 是上述组的第 j 个**坐标 (coordinate)**. 因此, x_1 称为第一个坐标, x_2 称为第二个坐标, 依此类推.

有时候我们只说**组 (list)** 而不指明其长度. 但要记住, 根据定义, 每个组的长度都是有限的, 这个长度是一个非负整数. 因此, 形如

$$(x_1,x_2,\cdots)$$

的对象不是组, 或许可以称其具有无限长度. 长度为 0 的组形如: (); 将其视为组, 可使一些定理避免平凡的例外.

两个组相等当且仅当它们长度相同并且对应的坐标相等. 也就是说, $(x_1,\cdots,x_m)$ 等于 $(y_1,\cdots,y_n)$ 当且仅当 $m=n$ 并且 $x_1=y_1,\cdots,x_m=y_m$.

组与集合有两点不同: 组是有顺序并且允许重复的, 而对于集合来说, 顺序和重复都无关紧要. 例如, 组 $(3,5)$ 和 $(5,3)$ 是不相等的, 但是集合 $\{3,5\}$ 和 $\{5,3\}$ 是相等的. 组 $(4,4)$ 和 $(4,4,4)$ 是不相等的 (它们的长度不同), 而集合 $\{4,4\}$ 和 $\{4,4,4\}$ 都等于集合 $\{4\}$.

要定义 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$ 的高维相似物, 只要用 $\mathbf{F}$ (等于 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$) 代替 $\mathbf{R}$, 并且用任意正整数代替 2 或 3 即可. 特别地, 在本节的其余部分, 我们将固定一个正整数 n. 定义 $\mathbf{F}^n$ 为 $\mathbf{F}$ 中元素组成的长度为 n 的组的集合:

$$\mathbf{F}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_j \in \mathbf{F}, j = 1, \cdots, n\}.$$

例如, 若 $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ 并且 n 等于 2 或 3, 则 $\mathbf{F}^n$ 的这个定义与前面 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$ 的定义是一致的. 又如, $\mathbf{C}^4$ 是所有含 4 个复数的组所构成的集合:

$$\mathbf{C}^4 = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) : z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}\}.$$

若 $n \geqslant 4$, 则将 $\mathbf{R}^n$ 想象成一个物理对象并非易事. 如果我们讨论复数, 也会有同样的问题: $\mathbf{C}^1$ 可以看成一个平面, 但是对于 $n \geqslant 2$, 人类的大脑不能产生 $\mathbf{C}^n$ 的几何模型. 不过即使 n 很大, 我们仍可以在 $\mathbf{F}^n$ 上进行代数运算, 而且就像在 $\mathbf{R}^2$ 或者 $\mathbf{R}^3$ 上一样地容易. 例如, $\mathbf{F}^n$ 上的加法可以通过相应坐标相加来定义:

关于生活在 $\mathbf{R}^2$ 中的生物如何感知 $\mathbf{R}^3$ 的有趣描述, 可读一读 Edwin A. Abbott 所著的 ***Flatland: A Romance of Many Dimensions***. 这部 1884 年出版的小说可以帮助像我们一样生活在三维空间中的生物想象四维和更高维的物理空间.

1.1 $$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n).$$

如果我们采用单个字母来表示含有 n 个数的组, 而不明确地写出每一个坐标, 那么 $\mathbf{F}^n$ 上的数学通常会变得更简洁. 因此, $\mathbf{F}^n$ 上的加法交换性可以表述成: 对所有 $x, y \in \mathbf{F}^n$ 都有

$$x + y = y + x,$$

而不必更繁琐地写成 (即使在证明交换性时需要下面这个公式): 对所有 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in \mathbf{F}$ 都有

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (y_1, \cdots, y_n) + (x_1, \cdots, x_n).$$

如果用单个字母来表示 $\mathbf{F}^n$ 中的一个元素, 那么在必须列出坐标时, 通常用带有适当下标的同一字母来表示其中的坐标. 例如, 若 $x \in \mathbf{F}^n$, 则令 x 等于 $(x_1, \cdots, x_n)$ 就是很好的记法. 如果可能的话, 只讨论 x 而省略具体的坐标会更好.

用 0 表示长度为 n 且所有坐标都为 0 的组：

$$0=(0,\cdots,0).$$

注意，我们用两种不同的方式使用符号 0 —— 在上式的左边，0 表示一个长度为 n 的组，而在右边，每个 0 都表示一个数. 这种有可能引起混乱的做法实际上不会产生任何问题，因为上下文会表明 0 指的是什么. 例如，考虑陈述：对于 $\mathbf{F}^n$ 的加法单位元 0 有，

$$x+0=x,\quad x\in\mathbf{F}^n,$$

这里 0 必然是一个组，因为我们从未定义过 $\mathbf{F}^n$ 中元素 (即 x) 与数 0 的和.

图形往往有助于直观. 因为我们很容易把 $\mathbf{R}^2$ 勾画在如纸或黑板这样的二维表面上，所以我们可以通过画图来描绘这个空间. $\mathbf{R}^2$ 上的典型元素是点 $x=(x_1,x_2)$. 有时候我们不把 x 看作一个点，而是看作一个始于原点终于 (x_1,x_2) 的箭头，如图 1-1 所示. 当把 x 看作一个箭头时，则称之为**向量 (vector)**.

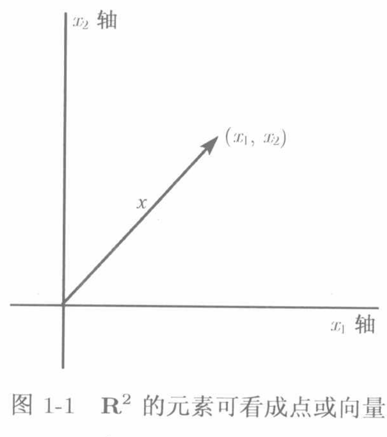


图 1-1 $\mathbf{R}^2$ 的元素可看成点或向量

这些坐标轴和具体的坐标使得图 1-1 有点乱，省略它们而只考虑向量往往更好理解，如图 1-2.

每当我们使用 $\mathbf{R}^2$ 中的图形或者关于点和向量的有些含糊的语言时，要记住，这只是为了帮助理解，而不是要取代将要发展的真正的数学. 虽然我们画不好高维空间中的图，但是高维空间