



法 兰 西 数 学
精 品 译 丛

拟微分算子和 Nash-Moser 定理

□ S. 阿里纳克 P. 热拉尔 著
□ 姚一隽 译
□ 麻小南 校



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



法兰西数学
精品译丛

数学天元基金资助项目

拟微分算子和 Nash-Moser 定理

□ S. 阿里纳克 P. 热拉尔 著
□ 姚一隽 译
□ 麻小南 校



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图字: 01-2008-4450 号

Serge Alinhac, Patrick Gérard
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
Université Paris Sud-11
F-91405 Orsay Cedex
France

本书译自法文版:

Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser
by Serge Alinhac et Patrick Gérard

© 1991 Editions EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS, Paris, France

图书在版编目 (CIP) 数据

拟微分算子和 Nash - Moser 定理 / (法) 阿里纳克,
(法) 热拉尔著; 姚一隽译. —北京: 高等教育出版社,
2009. 1

(法兰西数学精品译丛/李大潜主编)

ISBN 978 - 7 - 04 - 024619 - 3

I. 拟... II. ①阿... ②热... ③姚... III. ①拟微分算子 -
研究生 - 教材 ②微分几何 - 研究生 - 教材 IV. 0175.3 0181.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 122742 号

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010 - 58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 高等教育出版社印刷厂

开 本 787 × 1092 1/16
印 张 10.75
字 数 220 000

购书热线 010 - 58581118
免费咨询 800 - 810 - 0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2009 年 1 月第 1 版
印 次 2009 年 1 月第 1 次印刷
定 价 29.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 24619 - 00

《法兰西数学精品译丛》编委会

主编：李大潜

编委：(按姓氏拼音次序排列)

Michel Bauderon

Jean-Pierre Bourguignon

Jean-Benoît Bost

Haïm Brezis

Philippe G. Ciarlet

Paul Malliavin

彭实戈

Claire Voisin

文志英

严加安

张伟平

助理：姚一隽

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学,在其发展过程中,一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用,作出了奠基性的贡献.他们像灿烂的星斗发射着耀眼的光辉,在现代数学史上占据着不可替代的地位,在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名.在他们当中,包括笛卡儿、费马、帕斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗华、庞加莱、嘉当、勒贝格、魏伊、勒雷、施瓦兹及利翁斯等等这些耳熟能详的名字,也包括一些现今仍然健在并继续作出重要贡献的著名数学家.由于他们的出色成就和深远影响,法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平,而且具有优秀的传统和独特的风格,一直在国际数学界享有盛誉.

我国的现代数学,在20世纪初通过学习西方及日本才开始起步,并在艰难曲折中发展与成长,终能在2002年成功地在北京举办了国际数学家大会,在一个世纪的时间中基本上跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐,实现了跨越式的发展.这一巨大的成功,源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗,源于我们国家综合国力不断提高所提供的有力支撑,源于改革开放国策所带来的强大推动,也源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助.在这当中,法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响,法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用,无疑也是一个不容忽视的因素.足以证明这一点的是:在我国的数学家中,有不少就曾经留学法国,直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的熏陶与感召,而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了自己的成熟与辉煌.

由于语言方面的障碍,用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的限制.根据一些数学工作者的建议,并取得了部分法国著名数学家的热情支持,高等

教育出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》，将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书，有选择地从法文原文分批翻译出版。这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助，对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就，进一步提升我国数学（包括纯粹数学与应用数学）的教学与研究工作的水平，将是意义重大并影响深远的，特为之序。

李大潜

2008 年 5 月

中文版序言

我们非常高兴地看到我们的著作《拟微分算子和 Nash-Moser 定理》的中文版。我们感谢中译本的译校者和高等教育出版社的辛勤工作。

能够参与法国和中华人民共和国之间有着长久历史的文化和科技交流，我们感到非常荣幸。

Serge Alinhac 和 Patrick Gérard

巴黎, 2008 年 4 月

前言

本书是给具有四年大学数学训练的学生们读的一本初等介绍. 我们假定读者了解泛函分析, Fourier 分析和分布理论 (特别是 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ 的 Fourier 分析) 的基本知识. 第 0 章里对于本书中用到的符号, 概念及主要结果作了一个简单复习 (并给出相应的参考文献). 另一方面, 我们并不要求读者具备偏微分方程的知识, 当然如果学习过这方面内容无疑也是有益的.

本书的缘起是作者们自 1986 年 10 月起为法国巴黎高等师范学校学习“基础与应用数学及信息科学”硕士课程的二年级学生开设的名为“拟微分算子和 Nash-Moser 定理”的课程.

尽管本书所讨论的课题更多是直接取材于研究文献, 我们还是努力避免任何过于专门化的讨论, 各种无法详细讨论或者没有证明的结论, 以避免读者在阅读时产生困扰. 在每一章中我们都选择了一些课题加以详述; 而每章最后的注释则指出了相应结果的来源, 可能的变体, 当前的进展和各个课题之间的联系.

最后, 我们给出了相当数量的习题. 它们总的来说可以分成两类. 某些简单基本的习题可以帮助读者吸收掌握书中的内容并及时加以检查. 而那些比较复杂带有星号的习题则包含了一些晚近的进展, 有一些只是在研究论文中才能找到: 希望它们的原作者们可以原谅我们在此做的简化! 这些习题和某些名著中的不同, 学生们是的确可以做出来的, 我们在巴黎高等师范学校的教学经验已经证实了这一点^①.

我们同时也希望本书可以作为这一理论一本简单而自足的介绍, 而对那些并不非常熟悉本书所讨论课题的数学研究人员有所帮助.

这本讲义的这种双重目的使我们决定保持行文简明扼要, 这就解释了为什么某些段落写得非常紧凑 (当然我们相信对于那些用功的学生而言, 理解这些段落不会

^①译校者注: 这里必须说明的是巴黎高等师范学校有着全法国乃至全欧洲水平最高的学生.

是很困难的). 我们特别想到那些希望在他们的工作中应用 Nash–Moser 定理或者希望了解微局部分析 (而同时又不打算在专业文献的丛林中打转) 的从事“应用数学”的同行们: 他们可以独立地阅读相应的章节.

对于书中讲述的材料的选择完全取决于作者的研究领域和个人偏好, 实际上, 我们都认为, 某些困难的 (非线性) 问题没有足够的拟微分算子的知识是无法解决的.

作者们受益于 (在注释中列举的) 众多数学家, 正是他们启发激励作者们来写这样一本书. 特别我们要感谢 L. Hörmander, 第 I 章和 III. C 的内容基本上都取自于他的工作. 书后的参考文献给出了我们所资料的来源.^①

在讨论作为众多晚近发展的起点的重要概念的同时, 我们试图能够引进一些货真价实的定理: 微局部椭圆正则性; 奇性的传播; 拟线性双曲方程组解的存在性; 等距嵌入的存在性; Nash–Moser 定理. 本书的结构如下:

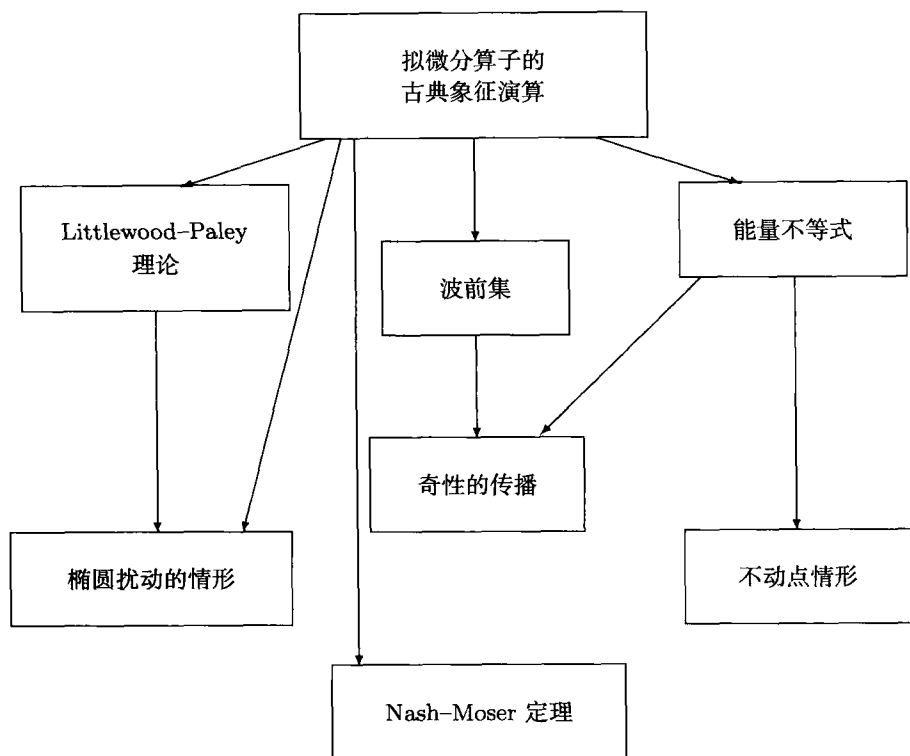
在第 I 章中我们在 $(\mathbb{R}^n)$ 上的整体框架下讨论拟微分算子的“极小”理论, 这在实践中是很有用的. 这里的要点包括象征的概念, 算子的象征演算, Sobolev 空间中的作用和坐标变换下的不变性. 行文中我们只加入了很少的具体应用, 且最具技巧性的证明都放在附录里了, 目的是帮助读者最快地对这一主题有一个整体的了解. 第 I 章有相当数量的习题, 不仅给出了这一理论的若干变体, 也给出了一些应用, 特别是紧流形上的分析.

第 II 章有三个主题. II. A 部分讨论对分布作“二进分解”的 Littlewood–Paley 理论: 这就把 (与第 I 章中的经典象征演算相关联的) 频率 ξ 空间根据范数 $|\xi|$ 的大小做切割的做法系统化了. 这一非常简单的理论让我们可以非常快速地得到 Sobolev 和 Hölder 空间中的复合函数的有趣性质. II. B 部分讨论波前集的概念及其与拟微分算子之间的联系: 这一回是 (与古典象征的齐次性相关联的) 将频率 ξ 空间根据方向 $\xi \in S^{n-1}$ 作锥形分割. 最后, II. C 部分处理一类双曲能量不等式, 拟微分算子在这里被证明是非常有效的工具. 这样, 第 II 章的作用就是给出第 I 章中的“核心理论”的一些非常有价值的应用, 并同时准备第 III 章中将要用到的材料和概念.

最后一章讨论几何与分析中出现的一些可以简化为扰动问题的非线性问题. 本章的结构反映了我们可能碰到的各种不同情形: “椭圆”情形, 这时只需用到通常的 Banach 空间上的隐函数定理就够了; “不动点”情形, 我们在非线性双曲问题或者等距嵌入问题中会遇到; 最后是“导数缺失”非常大的情形, 我们必须使用一种 Nash–Moser 技巧. Nash–Moser 定理完全建立在先验“柔性”不等式上; 已经熟悉 (第 I 章和 III. C 节中介绍的) 先验不等式的读者可以很快通过其与 Littlewood–Paley 理论和 J.-M. Bony 的仿微分演算 (II. A 节) 的显而易见的联系来理解“柔性”估计.

这就给出了本书内容非常深刻的统一性, 总结在下述示意图中.

^① 译校者还增加了若干中文参考文献.



在这种精神指引下, 我们最近很高兴地了解到 L. Hörmander 的工作 [H9], 它解释了拟微分算子, 伪微分算子, 不动点方法和 Nash-Moser 定理之间的联系.

最后, 我们非常感谢 G. Ben Arous^① 和 J.-B. Bost^② (法国巴黎高等师范学校) 所给出的非常宝贵的意见和建议.

^①Gérard Ben Arous, 日内瓦大学教授, Bourbaki 学派成员.

^②Jean-Benoît Bost, 巴黎第十一大学教授, 2006 年国际数学家大会邀请报告人, Bourbaki 学派成员.

目录

《法兰西数学精品译丛》编委会

《法兰西数学精品译丛》序

中文版序言

前言

0	记号和分布论的复习	1
0.1	可微函数空间和微分算子	1
0.2	$\mathbb{R}^n$ 中一个开集上的分布	2
0.3	卷积	4
0.4	核函数	5
0.5	$\mathbb{R}^n$ 上的 Fourier 分析	6
I	拟微分算子	10
I.1	导论	10
I.1.1	Fourier 变换的运用	10
I.1.2	变系数算子	12
I.1.3	调和两个方面 (坐标空间 x 和相位空间 ξ)	13

I.2	象征	14
I.2.1	定义和例子	14
I.2.2	象征的逼近	15
I.2.3	渐近和式, $\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{S}'$ 中的古典拟微分象征	16
I.3	$\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ 中的拟微分算子	18
I.3.1	$\mathcal{S}$ 上的作用	18
I.3.2	算子的核函数与共轭	20
I.4	算子的复合	22
I.5	拟微分算子的作用与 Sobolev 空间	24
I.5.1	L^2 上的作用	24
I.5.2	在 Sobolev 空间上的作用	25
I.5.3	(弱形式的) Gårding 不等式	26
I.5.4	椭圆算子的逆	27
I.6	$\mathbb{R}^n$ 中开集上的算子	28
I.6.1	拟局部性质	29
I.6.2	局部象征与开集上的算子	29
I.6.3	恰当支撑算子	30
I.7	流形上的算子	31
I.7.1	拟微分算子和坐标变换	31
I.7.2	主象征和切丛	32
I.8	附录	35
I.8.1	振荡积分	35
I.8.2	象征演算定理的证明	37
I.8.3	拟微分算子在振荡函数上的作用	40
	第 I 章补注	43
	第 I 章习题	44
II	非线性二进分析 微局部分析 能量估计	68
II.A	非线性二进分析	68
II.A.1	Littlewood–Paley 分解: 一般性质	68
II.A.2	在函数的乘积与复合上的应用	74
II.B	微局部分析: 波前集与拟微分算子	80
II.B.1	分布的波前集	80
II.B.2	线性算子和波前集	82
II.C	能量估计	88
II.C.1	一阶算子	88
II.C.2	m 阶算子	92

第 II 章注记	95
第 II 章习题	96
III 隐函数定理	109
III.A 隐函数定理和椭圆问题	109
III.A.1 Banach 空间上隐函数定理的回顾	109
III.A.2 非线性微分方程的例子	111
III.B 应用不动点方法的两个例子	115
III.B.1 一个流体力学的例子	115
III.B.2 等距嵌入问题	120
III.C Nash-Moser 定理	122
III.C.1 简介	122
III.C.2 两个经典的例子	124
III.C.3 柔性估计	127
III.C.4 Nash-Moser 定理	131
第 III 章注记	139
第 III 章习题	140
参考文献	146
主要记号	149
名词索引	150
译校后记	152

0 记号和分布论的复习

在这一章里, 我们将引进本书中所使用的各种记号, 并且简单地复习一下本书中将经常用到的分布论和 Fourier 分析的基本内容. 在以后的章节中我们将假定读者对于这些内容有足够的了解. 对于程度不是非常好的学生来说, 下面这些结果的证明可以在 J. Chazarain 和 A. Piriou 的书 [CP] (第一章, 第 1, 2, 4 节) 中找到, 也可以参阅 W. Rudin 的书 [R]. 至于那些对于分布论 (广义函数论) 了解不多的读者, 我们建议他们先读一下 L. Schwartz 的书 [S], 而那些想检验自己对于这个领域的理解程度的学生则可以在 C. Zuily 的书 [Z] 里找到课程概要和大量带解答的习题. ^①

0.1 可微函数空间和微分算子

设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中一开集. 对于非负整数 k , 我们记 Ω 上 k 次连续可微的复值函数全体为 $C^k(\Omega)$. 类似的, 我们用 $C^\infty(\Omega)$ 表示 Ω 上无限可微函数空间. 这些记号一方面可以推广到 Ω 是一个微分流形 M 的情形, 另一方面可以推广到函数不再取复数值而是在一个一般的 $\mathbb{R}$ 上拓扑向量空间 E 中取值的情形: 这时我们记相应的空间为 $C^k(\Omega, E)$ 和 $C^\infty(\Omega, E)$.

对于 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ^②, $C_0^k(\Omega)$ 表示 $C^k(\Omega)$ 中由那些在某个 Ω 中的紧集外取零值的元素构成的子空间, 而 $C^k(\overline{\Omega})$ 则用来表示由 $C^k(\mathbb{R}^n)$ 中的函数在 $\overline{\Omega}$ 上的限制构成的空间.

为了表示 $C^k(\Omega)$ 中元素的偏导数, 我们将使用**重指标**: 一个重指标 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 是 $\mathbb{N}^n$ 中的一个元素, 它的模定义为 $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, 同时我们记 $\alpha! =$

^①译校者注: 也可以参阅 [Ch1] 或者 [X] 下册第七章.

^②译校者注: 此处 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

$\alpha_1! \cdots \alpha_n!$. 对于 $j \in \{1, \cdots, n\}$, 偏导 $\frac{\partial}{\partial x_j}$ 有时也记为 ∂_{x_j} , 或者在不致发生混淆的情况下简记为 ∂_j . 出于和 Fourier 变换有关的原因 (见下面的第 0.5 节), 引进记号 $D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$ 也是有用的. 高阶导数将被记成 $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$ 或者 $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$. 我们还将根据这一规则来表达根据 $\mathbb{R}^n$ 中向量的分量构造的单项式. 这样对于 $x \in \mathbb{R}^n$, 我们记 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

一个 Ω 上的**微分算子**是系数取在 $C^\infty(\Omega)$ 中的各阶偏导数的一个有限线性组合. 如果高于 m 阶的偏导数不出现, 那么我们称它的阶是 m . 换句话说, 一个 Ω 上的 m 阶微分算子可以写成

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

其中 $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ 是 P 的系数. 利用这一形式, 我们很容易看到对于任意的 k, P 都定义了一个从 $C^{k+m}(\Omega)$ 到 $C^k(\Omega)$ 的线性映射. P 的**象征**是由

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

定义在 $\Omega \times \mathbb{R}^n$ 上的关于 ξ 的多项式函数, 而它的 m 阶**主象征** (或者在不致混淆的情况下简称为**主象征**) 则是下述关于 ξ 的齐次函数:

$$p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

0.2 $\mathbb{R}^n$ 中一个开集上的分布

a) 所谓开集 Ω 上的一个**分布**即是 $C_0^\infty(\Omega)$ 上满足下述条件的一个连续线性泛函 u : 对于任何的紧子集 $K \subset \Omega$, 存在整数 m 和常数 C , 使得对于所有在 K 外取零值的函数 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 均有

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Ω 上所有分布全体构成的空间记为 $\mathcal{D}'(\Omega)$. 特别我们注意到

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega), \langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad (2.1)$$

是一个有界的量, 因此这个空间包含了 Ω 上的**局部可积函数空间** $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$.

分布的另一个例子由单点 Dirac **质量**给出. 对 $x_0 \in \Omega$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 我们定义 $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$.

b) 对于 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 我们用下式定义 $\partial_j u \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

$$\langle \partial_j u, \varphi \rangle = -\langle u, \partial_j \varphi \rangle.$$

我们注意到, 利用 (2.1), 很容易就可以把原本定义在 $C^1(\Omega)$ 上的算子 ∂_j 推广到分布上面. 同理, 对于 $a \in C^\infty(\Omega)$, $au \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 可以由

$$\langle au, \varphi \rangle = \langle u, a\varphi \rangle$$

来定义. 这样, 所有的微分算子 $P = \sum a_\alpha D^\alpha$ 都可以根据公式

$$\langle Pu, \varphi \rangle = \langle u, {}^tP\varphi \rangle$$

延拓成一个 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 到自身的线性映射, 其中 ${}^tP\varphi = \sum (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi)$.

c) 如果 Ω' 是 Ω 内的一个开集, 而 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 那么 u 在 Ω' 上的限制 $u|_{\Omega'}$ 就是线性泛函 u 在 $C_0^\infty(\Omega)$ 的子空间 $C_0^\infty(\Omega')$ 上的限制. 我们称 u 在 Ω' 上为 0 (或者属于 C^k), 如果 $u|_{\Omega'} = 0$ (或者 $u|_{\Omega'}$ 可以由某个 $f \in C^k(\Omega')$ 根据 (2.1) 定义). 为了表明这个定义是合理的, 我们要证明由 u 在 Ω 的任一开覆盖中每个开集上的限制我们可以把 u 重新构造出来. 为此我们有如下引理.

单位分解引理 设 (Ω_j) 是 Ω 中的一族开集, 满足 $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$. 则存在一族函数 (φ_j) 使得

- i) $\forall j, \varphi_j \in C^\infty(\Omega)$, $\text{supp}(\varphi_j) \subset \Omega_j$, $0 \leq \varphi_j \leq 1$;
- ii) 对 Ω 中所有紧集 K , $\{j, K \cap \text{supp} \varphi_j \neq \emptyset\}$ 是有限集;
- iii) 在 Ω 上, $\sum_j \varphi_j = 1$ (根据 ii), 这个和式在每一点上都是可定义的).

除了前面已经给出的参考文献以外, 读者还可以在第 I 章习题 6.1 中找到上述引理的一个证明 (在那里我们假设 $\overline{\Omega_j}$ 在 Ω 中是紧致的; 一般情况可以很容易地由此得到).

根据上述引理, 我们可以证明诸如 “若 $\bigcup_j \Omega_j = \Omega$, 且对所有的 $j, u|_{\Omega_j} = 0$ (或者 $u|_{\Omega_j} \in C^k$), 则 $u = 0$ (或者 $u \in C^k(\Omega)$)” 这样的结论.

由此, 我们有下述定义: 一个分布 u 的**支集**(或者**奇异支集**) 是那些具有某个邻域使 u 在其中为 0 (或者为 C^∞) 的点全体构成的集合在 Ω 中的补集. u 的支集记作 $\text{supp } u$, 奇异支集记作 $\text{sing supp } u$. 这是两个闭集, 满足 $\text{sing supp } u \subset \text{supp } u$. 前述结果可以改写为

$$\begin{aligned} u = 0 &\Leftrightarrow \text{supp } u = \emptyset, \\ u \in C^\infty &\Leftrightarrow \text{sing supp } u = \emptyset. \end{aligned}$$

最后, 我们指出, 如果 $u \in C^0(\Omega)$, 以上定义的 u 的支集和 $\{x \in \Omega, u(x) \neq 0\}$ 的闭包重合.

Ω 中具有紧支集的分布全体记作 $\mathcal{E}'(\Omega)$. 如果我们考虑 $C^\infty(\Omega)$ 上由半范数族

$$\sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

定义的拓扑 (其中 K 取遍 Ω 中所有紧集, m 取遍全体自然数), 那么 $C^\infty(\Omega)$ 上的连续线性泛函全体就是 $\mathcal{E}'(\Omega)$.

0.3 卷积

a) 设 u 和 v 是两个具有紧支集的 C^∞ 函数. 我们定义

$$u * v(x) = \int u(y)v(x-y)dy = \int u(x-y)v(y)dy. \quad (3.1)$$

这样定义的函数 $u * v$ 是一个具有紧支集的光滑 (C^∞) 函数, 满足

$$\text{supp}(u * v) \subset \text{supp } u + \text{supp } v. \quad (3.2)$$

我们称之为函数 u 和 v 的卷积.

当然, 我们也可以对光滑性差一些的函数定义卷积. 最自然的推广是对可积函数做的: 如果 u 和 v 是 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中的函数, 那么由 (3.1) 定义的函数也在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中, 而且我们有

$$\int |u * v(x)|dx \leq \int |u(x)|dx \cdot \int |v(x)|dx.$$

但是实际上我们最常用的并不是这个延拓, 而是下面 b) 和 d) 中描述的, 对于 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (或者 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$) 所做的推广.

b) 假设 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 我们记 $v_x(y) = v(x-y)$, 那么等式

$$u * v(x) = \langle u, v_x \rangle$$

定义了 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 C^∞ 函数 $u * v$. 它满足

$$\partial^\alpha(u * v) = \partial^\alpha u * v = u * \partial^\alpha v \quad (3.3)$$

$$\text{supp}(u * v) \subset \text{supp } u + \text{supp } v. \quad (3.4)$$

c) 卷积是被广泛使用的光滑化过程的基础. 现在我们对此作简单描述.

设 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是一个在全空间上积分为 1 的非负函数, 并设 $\varepsilon > 0$; 我们定义 $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. 这样对于 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, C^∞ 函数族 $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$ 在 ε 趋向于 0 的时候按照下述意义收敛于 u :

$$\forall \psi \in C_0^\infty, \int u_\varepsilon(x)\psi(x)dx \longrightarrow \langle u, \psi \rangle. \quad (3.5)$$