普通高等教育数学选修课规划教材

数学分析选讲

徐新亚　夏海峰　编著

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育数学选修课规划教材

数学分析选讲

徐新亚　夏海峰　编著

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是作者长期从事数学分析教学的经验总结，书中精选的例题和习题主要是2000年以来有关高校的硕士研究生入学考试数学分析试题．为了帮助读者尽快掌握数学分析的解题技巧，作者在分析解题思路方面作出了艰苦的努力．对有些例题，先分析，再求解，而对另外一些例题，则在解完之后给出附注，指出这样做的原因和动机，有的还对同一例题给出多个解答．作者在对例题进行分类讲解的过程中，特别注意分析解题思路和解题方法，而不是简单地堆砌或单纯求解．例题安排的顺序尽量遵照由浅入深、由简到繁的原则，并将同一类型题目相对集中，以便于读者自学．

本书可作为数学系高年级学生考研的复习教材，也可作为已经学过大学数学的读者进一步学习提高的选修课教材或进修教材．本书在许多基本方法的讲解方面比较细致，起点也不高，很适合自学．

图书在版编目(CIP)数据

数学分析选讲/徐新亚，夏海峰编著．—上海：同济大学出版社，2008.8

普通高等教育数学选修课规划教材

ISBN 978-7-5608-3903-5

Ⅰ．数…　Ⅱ．①徐…②夏…　Ⅲ．数学分析—高等学校—解题　Ⅳ．O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第103693号

普通高等教育数学选修课规划教材

数学分析选讲

徐新亚　夏海峰　编著

责任编辑　曹　建　　责任校对　杨江淮　　封面设计　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　　www.tongjipress.com.cn

（地址：上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021-65985622）

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　江苏句容市排印厂

开　　本　787mm×960mm　1/16

印　　张　24.75

印　　数　1—3100

字　　数　495000

版　　次　2008年8月第1版　　2008年8月第1次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-3903-5/O・322

定　　价　42.00元

前　　言

“数学分析”由于推理严谨、思维缜密、内容丰富、解题技巧引人入胜，而成为大家学习许多后继课程的必备基础，因而数学系所有专业都将“数学分析”定为必修课程. 在多年的教学实践中，我们发现，学生在掌握数学分析的基本内容方面问题不是很大，但是要做到灵活运用有关知识去分析问题和解决问题就会感到困难，特别是涉及综合多个知识点的习题，常常不知如何入手. 近年来，关于如何帮助学生分析和解决数学分析问题的好书出版很多，其中有一些堪称经典，但仍无法满足学生的要求. 究其原因，大致有二：有些书主要介绍一般难度的题目；有些书介绍的内容又与学生所学知识相距甚远. 因此，迫切需要一本能对学生学习数学分析时所遇到的习题起到分析和梳理作用的指导教材，这正是编写本书的目的所在.

从 2000 年起，我们在为我校数学系大三学生开设的选修课“分析学专题研究”时，先后参阅了国内外的 20 余部教材、文献和其他资料，搜集了许多高校考研试题，编写成讲义《数学分析选讲》，受到学生的普遍欢迎. 我系的柏传志、陈光曙两位教授详细审阅了讲义后，建议将其出版. 于是，我们用了一年多的时间，对《数学分析选讲》讲义进行了深入细致的勘误和整理，并补充了一些有针对性的例题和习题，最后形成了本书.

书中所选的例题和习题主要来源于 2000 年以来有关高校的硕士研究生入学考试数学分析试题以及书后所列的部分参考书. 为了帮助读者尽快掌握数学分析的解题技巧，我们试图在分析解题思路方面尽可能寻找出一些规律. 例如，对有些例题，我们先分析，再求解，而对另外一些例题，我们则在解完之后给出附注，指出这样做的原因和动机，在可能情况下，我们还对同一例题给出多个解答，并加以总结. 我们在对例题进行分类讲解的过程中，特别注意分析解题思路和解题方法，而不是简单地堆砌或单纯求解. 例题安排的顺序尽量遵照由浅入深、由简到繁原则，同一类型题目相对集中，以便于读者自学.

由于本书的读者是已经学完数学分析的大学高年级学生，所以，对很多我们认为大家熟悉的基本概念和常用结论不再罗列，以节省篇幅. 在本教材里，我们把内容按数学分析的主要知识点划分为 8 个部分，具体为第 1 章：极限，包括数列极限和函数极限；第 2 章：连续函数，包括函数的连续性与一致连续性以及实数的完备性等；第 3 章：一元微分，包括导数和微分中值定理及其应用；第 4 章：一元积分；第 5 章：级数，包括常数项级数和函数项级数；第 6 章：广义积分与含

参量积分;第7章:多元微分,包括偏导数与条件极值;第8章:多元积分,包括二重积分、三重积分、曲线积分和曲面积分等.这样划分当然不一定很科学,但目的是明确的,就是便于读者有目的地进行查阅.

本书可作为数学系高年级学生考研的复习教材,也可作为已经学过大学数学的读者进一步学习提高的选修课教材或进修教材.本书在许多基本方法的讲解方面比较细致,起点也不高,很适合自学.当然,我们所给出的解题方法未必是唯一的或最好的.我们认为,学好数学分析没有捷径,必须付出艰苦的劳动,对数学分析的所有知识点都要深入理解,并且要做相当数量的练习题,才会有所收获.如果读者读完本书后,觉得对学习有所帮助,我们将会感到无比欣慰.

本书编写工作主要由徐新亚执笔,夏海峰负责部分例题和习题的搜集,并对初稿进行了系统的文字校对.我系的王晓晶、郭嵩、史红波、朱成莲、熊加斌、葛静、王管、严定军等老师在本书的编写过程中都曾提供过无私的帮助.在此谨向柏传志教授、陈光曙教授和上述各位老师,向始终鼓励、支持我们工作的我系领导表示深切的谢意.

最后对系统审阅本书全稿的浙江大学邵剑教授表示深深的感谢!

由于编者水平有限,加之时间仓促,书中一定存在着许多疏漏与错误之处,敬请读者批评指正.

作　者

2008年8月

目　　录

1 极　　限

极限理论是数学分析的基础，扎实地掌握极限理论是学好数学分析的必要条件. 极限问题也是数学分析中的难点之一，其中心内容主要是如何求极限与怎样证明极限的存在性. 二者是紧密相联、相辅相成的，初学者往往需要通过艰苦的解题练习才能掌握.

本章先介绍数列极限，然后讨论函数极限. 我们希望在技巧和难度上能从较高的水准来综合讨论这两类极限问题.

1.1 数列极限

数列极限的问题主要分为两类，一是证明一个数列收敛或者发散，二是计算一个收敛数列的极限. 这两类问题并没有明确的界限，往往在同一题中，既需要证明一个数列是收敛的，同时也要求出其极限.

1.1.1 拟合法

先看一个例子.

例 1　设 $x \to 0$ 时，$f(x) \sim x$，$x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

证明　注意到 $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n^2} = 1$，从而 $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n^2}a$. 我们有

$$|x_n - a| = \left|\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n^2}a\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right) - \frac{2i-1}{n^2}a\right|.$$

如果 $\forall \varepsilon > 0$，能证出当 n 充分大时，

$$\left|f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right) - \frac{2i-1}{n^2}a\right| < \frac{2i-1}{n^2}\varepsilon \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

则有

$$|x_n - a| < \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n^2}\varepsilon = \varepsilon.$$

由于 $f(x) \sim x\ (x \to 0)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)}{\frac{2i-1}{n^2}a} = 1$，故 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，$\forall n > N$，恒有

$$\left|\frac{f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)}{\frac{2i-1}{n^2}a}-1\right|<\varepsilon.$$

从而 $\left|f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)-\frac{2i-1}{n^2}a\right|<\frac{2i-1}{n^2}\varepsilon \quad (i=1,2,\cdots,n)$，证毕.

注 这里用到了 $\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{n^2}=1$，从而 $\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{n^2}a=a$. 这种将一个数值进行适当变形，使之与我们所讨论的内容在形式上相似的方法，通常称为拟合法. 数学分析中证明题中经常用到. 再看下例.

例 2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{i}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{6}$.

证明 由于 $\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{6n^2}=\frac{1}{6}$，故由题意即证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{i}{n^2}}-1-\frac{2i-1}{6n^2}\right)=0$. 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{6n^2}=0$，只需有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{i}{n^2}}-1-\frac{i}{3n^2}\right)=0$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{i}{n^2}}-1}{\frac{i}{3n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{i}{n^2}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{i}{n^2}}+1}=1 \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

于是 $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N$，有 $\left|\frac{\sqrt[3]{1+\frac{i}{n^2}}-1}{\frac{i}{3n^2}}-1\right|<\varepsilon$，此时

$$\left|\sqrt[3]{1+\frac{i}{n^2}}-1-\frac{i}{3n^2}\right|<\frac{i}{3n^2}\varepsilon \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{i}{n^2}}-1-\frac{i}{3n^2}\right)\right| &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|\sqrt[3]{1+\frac{i}{n^2}}-1-\frac{i}{3n^2}\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{3n^2}\varepsilon=\frac{n(n+1)}{6n^2}\varepsilon<\varepsilon.\end{aligned}$$

注 以上二例中的 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)}{\frac{2i-1}{n^2}a}=1$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{i}{n^2}}-1-\frac{i}{3n^2}\right)=0$，实际上是一致极限. 如例 2 即：$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N$，对任意的 $i=1,2,\cdots,$

n,有 $\left|\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{i}{n^2}}-1}{\dfrac{i}{3n^2}}-1\right|<\varepsilon$.

1.1.2 极限定义与 Cauchy 准则

例 3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

分析 要证明 $\{\sin n\}$ 不收敛,常用的方法是用极限定义、Cauchy 准则. 可以用它们的否定性叙述,也可以用反证法.

证法 1(用极限定义的否定性叙述) 由于 $|\sin n|<1$,我们只要证明:对任意的 $|A|\leqslant 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\neq A$ 即可. 不妨设 $A\in[0,1]$(对 $A\in[-1,0]$ 的情形类似可证),根据极限定义的否定性叙述,我们只需证明:$\exists\,\varepsilon_0>0$, $\forall\,N$, $\exists\,n>N$,使 $|\sin n-A|\geqslant\varepsilon_0$ 成立. 事实上,取 $\varepsilon_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\forall\,N$,令 $n=\left[2N\pi-\dfrac{\pi}{4}\right]$($[x]$ 表示 x 的整数部分),则 $n>N$,由于

$$\left(2N\pi-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{4}<n<\left(2N\pi-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{4},$$

得

$$\sin n<-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故

$$|\sin n-A|\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

证法 2(用 Cauchy 准则的否定性叙述) 要证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在,我们只需要证明:$\exists\,\varepsilon_0>0$, $\forall\,N$, $\exists\,n,m>N$,使 $|\sin n-\sin m|\geqslant\varepsilon_0$. 事实上,取 $\varepsilon_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\forall\,N$,令 $n=\left[2N\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right]$, $m=[2N\pi+2\pi]$,则 $n>N$,由于

$$2N\pi+\frac{\pi}{4}<n<2N\pi+\frac{3\pi}{4},\quad 2N\pi-\frac{\pi}{4}<m<2N\pi+2\pi,$$

得

$$|\sin n-\sin m|>\frac{\sqrt{2}}{2}=\varepsilon_0.$$

证法 3(反证法) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=A$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+2)=A$,由于

$$\sin(n+2)-\sin n=2\sin 1\cos(n+1),$$

取极限得

$$\lim_{n\to\infty}\cos n = 0.$$

于是，若 $A=0$，则 $1=\lim\limits_{n\to\infty}(\cos^2 n+\sin^2 n)=0$，矛盾；若 $A\neq 0$，则

$$A=\lim_{n\to\infty}\sin n=\pm\lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\cos^2 n}=\pm 1,$$

但 $\sin 2n=2\sin n\cos n$，再取极限得 $A=0$，同样矛盾.

证法 4(子数列)　对任意的自然数 N，取 $n=\left[2N\pi+\dfrac{3}{4}\pi\right]$，则

$$2N\pi+\frac{1}{4}\pi<n<2N\pi+\frac{3}{4}\pi,$$

得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sin n\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；取 $n=\left[2N\pi-\dfrac{1}{4}\pi\right]$，则

$$2N\pi-\frac{3}{4}\pi<n<2N\pi-\frac{1}{4}\pi,$$

得 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sin n\leqslant-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

例 4　设无穷数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_1 b_{n+1-i}=ab$.(中科院 2004)

证明　由于 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则存在 $M>0$，使对一切的正整数 n，都有 $|b_n|\leqslant M$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_1 b_{b+1-i}-ab\right| &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_i b_{n+1-i}-ab|\\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(|a_i-a||b_{n+1-i}|+|a||b_{n+1-i}-b|)\\ &\leqslant \frac{M}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_i-a|+\frac{|a|}{n}\sum_{i=1}^{n}|b_{n+1-i}-b|\\ &= \frac{M}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_i-a|+\frac{|a|}{n}\sum_{i=1}^{n}|b_i-b|.\end{aligned}$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N_1，对一切大于 N_1 的自然数 n，有

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{4M}.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则对上述的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N_2，对一切大于 N_2 的自然数 n，有

$$|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{4(1+|a|)}.$$

故当 $n>N_1$，$n>N_2$ 时，有

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i b_{n+1-i}-ab\right|\leqslant\frac{M}{n}\left(\sum_{i=1}^{N_1}|a_i-a|+\sum_{i=N_1+1}^{n}\frac{\varepsilon}{4M}\right)+\frac{|a|}{n}\left(\sum_{i=1}^{N_2}|b_i-a|\right.$$

$$+\sum_{i=N_2+1}^{n}\frac{\varepsilon}{4(1+|a|)}\Big)$$

$$=\frac{M}{n}\sum_{i=1}^{N_1}|a_i-a|+\frac{|a|}{n}\sum_{i=1}^{N_2}|b_i-a|+\frac{M(n-N_1)}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{4M}$$

$$+\frac{|a|(n-N_2)}{n}\frac{\varepsilon}{4(1+|a|)}$$

$$\leqslant\frac{M}{n}\sum_{i=1}^{N_1}|a_i-a|+\frac{|a|}{n}\sum_{i=1}^{N_2}|b_i-a|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M}{n}\sum\limits_{i=1}^{N_1}|a_i-a|=0$,故存在正整数$N_3$,对一切大于$N_3$的自然数$n$,有

$$\frac{M}{n}\sum_{i=1}^{N_1}|a_i-a|<\frac{\varepsilon}{4},$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a|}{n}\sum\limits_{i=1}^{N_2}|b_i-a|=0$,故存在正整数$N_4$,对一切大于$N_4$的自然数$n$,有

$$\frac{|a|}{n}\sum_{i=1}^{N_2}|b_i-a|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

于是,令$N=\max\{N_1,N_2,N_3,N_4\}$,则对一切大于$N$的自然数$n$,有

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_{n+1-i}-ab\right|<\varepsilon.$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_{n+1-i}=ab$.

1.1.3 无穷小的应用

我们知道,当α,β都是某种极限状态下的无穷小时,如果

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=0,$$

则称α是β的高阶无穷小,用$\alpha=o(\beta)$表示.例如$1-\cos x=o(x)$ $(x\to 0)$.如果从某个“时刻”开始,总有

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\leqslant C\quad(C\text{是一个确定的实数}),$$

则称α的阶不比β低,用$\alpha=O(\beta)$表示.例如$1-\cos x=O(x^2)$ $(x\to 0)$.

例 5 讨论下列数列的收敛性.

(1) $x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$; (2) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}-\frac{(\ln n)^2}{2}$.

解 (1) $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}=O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),\quad n\to\infty.$$

因此,恒负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收敛,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 的部分和为

$$\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)=(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_{n+1}-x_n)=x_{n+1}-x_1,$$

故数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(2) $x_n-x_{n-1}=\dfrac{\ln n}{n}-\dfrac{1}{2}[\ln^2 n-\ln^2(n-1)]=\dfrac{\ln n}{n}+\dfrac{1}{2}\ln(n^2-n)\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

$$=\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{2}\left[\ln n^2+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{\ln n}{n}+\ln n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\ln^2\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\ln n\left[\frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]+\frac{1}{2}\ln^2\left(1-\frac{1}{n}\right)=O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right),\quad n\to\infty.$$

这是因为当 $n\to\infty$ 时,$\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\sim-\dfrac{1}{n}$ 的极限是零,而

$$\frac{\frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\frac{1}{n}+\left[-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}{\frac{1}{n^2}}=-\frac{1}{2}+o(1).$$

与(1)同理知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

注 本题中用到了无穷级数与数列的转化,即

$$\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)=(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_{n+1}-x_n)=x_{n+1}-x_1.$$

1.1.4 单调有界定理

例 6 设 $x_0>0,x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n},n=1,2,3,\cdots$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.(武汉大学 2004)

证法 1 显然 $0<x_n<3,n=1,2,3,\cdots$,有

$$x_{n+1}-x_n=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}-\frac{3(1+x_{n-1})}{3+x_{n-1}}=\frac{6(x_n-x_{n-1})}{(3+x_n)(3+x_{n-1})}.$$

于是，$x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 有相同的符号；x_n-x_{n-1} 又与 $x_{n-1}-x_{n-2}$ 有相同的符号；……，最终 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_1-x_0 有相同的符号. 即 $x_1-x_0>0$ 时，$\{x_n\}$ 单调增加；$x_1-x_0<0$ 时，$\{x_n\}$ 单调减少. 总而言之，只要 $x_{n+1}-x_n$ 能与 x_n-x_{n-1} 保持相同的符号，数列 $\{x_n\}$ 就是单调的. 因此，由单调有界定理知，所给数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对通项公式取极限得

$$a=\frac{3(1+a)}{3+a},\qquad 或\ a=\sqrt{3},\qquad 即\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}.$$

证法 2 设 $f(x)=\dfrac{3(1+x)}{3+x}$，$0<x<3$，则 $x_{n+1}=f(x_n)$，$0<x_n<3$. 有

$$f'(x)=\frac{6}{(3+x)^2}>0,$$

因此，若 $x_2>x_1$，则由 $f(x)$ 单调增加知 $\{x_n\}$ 单调增加；若 $x_2<x_1$，则由 $f(x)$ 单调增加知 $\{x_n\}$ 单调减少. 故由单调有界定理知 $\{x_n\}$ 收敛. 其极限为函数 $f(x)=\dfrac{3(1+x)}{3+x}$ 的不动点，即方程 $x=\dfrac{3(1+x)}{3+x}$ 的正解，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$.

例 7 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n^2-2ax_n+2a^2}$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.（华南理工大学 2005）

解 不妨设 $a>0$（$a<0$ 的情形同理可证）. 显然

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n^2-2ax_n+2a^2}=\sqrt{(x_n-a)^2+a^2}\geqslant a.$$

由 $x_{n+1}^2=x_n^2-2ax_n+2a^2=(x_n-a)^2+a^2$，得

$$(x_{n+1}-x_n+a)(x_{n+1}+x_n-a)=a^2,$$

$$x_{n+1}-x_n+a=\frac{a^2}{x_{n+1}+x_n-a}\leqslant a,\quad n=1,2,\cdots.$$

有 $x_{n+1}-x_n\leqslant 0$（$n=1,2,\cdots$）. 故数列 $\{x_n\}$ 是一个单调减少有下界的数列，因而收敛. 对递推公式 $x_{n+1}=\sqrt{x_n^2-2ax_n+2a^2}$ 取极限，并设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，得 $A=\sqrt{A^2-2aA+2a^2}$，故 $A=a$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

例 8 设对任意的正整数 n，都有 $x_n<1$，$(1-x_n)x_{n+1}\geqslant\dfrac{1}{4}$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明 由于 $0<x_n<1$，$(1-x_n)x_{n+1}\geqslant\dfrac{1}{4}$，则 $1-x_n>0$，$x_{n+1}>0$. 注意到当 $0<a<1$ 时，有 $a(1-a)\leqslant\dfrac{1}{4}$. 于是

$$(1-x_n)x_{n+1}\geqslant\frac{1}{4}\geqslant(1-x_n)x_n,$$

得 $x_{n+1} \geqslant x_n (n=1,2,\cdots)$. 故 $\{x_n\}$ 为单调增加有上界的数列，因而收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A(A>0)$，则

$$\frac{1}{4} \leqslant A(1-A) \leqslant \frac{1}{4}, \quad 得 \quad A(1-A) = \frac{1}{4},$$

故 $A = \frac{1}{2}$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

1.1.5 子数列

例 9 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a, \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a$ 知 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, \forall n > N_1$，有 $|x_{2n} - a| < \varepsilon$，再由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$ 知，对上述的 $\varepsilon > 0, \exists N_2, \forall n > N_2$，有 $|x_{2n+1} - a| < \varepsilon$. 令 $N = \max\{2N_1, 2N_2+1\}$，则 $\forall n > N$，总有

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

注 本题的结果可推广为：设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_i} = a, i = 1,2,3,\cdots,k$，且 $\{x_n\} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \{x_{n_i}\}$，即 $\{x_n\}$ 可以分解为 k 个子数列的并，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

例 10 设 $k > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \dfrac{k}{1+x_n}$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求出极限.

证明 由 $k > 0, x_1 > 0$ 知 $x_n > 0$，从而 $0 < x_n < k \quad (n = 2,3,\cdots)$，

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{k}{1+x_{n+1}} - \frac{k}{1+x_n} = -\frac{k(x_{n+1}-x_n)}{(1+x_{n+1})(1+x_n)},$$

$x_{n+2} - x_{n+1}$ 与 $x_{n+1} - x_n$ 异号，$\{x_n\}$ 不是单调数列，不能直接使用单调有界定理. 考虑

$$x_{n+2} - x_n = \frac{k}{1+x_{n+1}} - x_n = \frac{k}{1+\dfrac{k}{1+x_n}} - x_n = \frac{k - x_n - x_n^2}{k+1+x_n}$$

$$= \frac{1}{k+1+x_n}\left(\frac{\sqrt{1+4k}-1}{2} - x_n\right)\left(\frac{\sqrt{1+4k}+1}{2} + x_n\right),$$

因此，

$$x_{n+2} - x_n \begin{cases} > 0, & x_n < A, \\ < 0, & x_n > A \end{cases} \qquad \left(A = \frac{\sqrt{1+4k}-1}{2}\right).$$

又若 $x_n < A$，则 $x_{n+1} = \dfrac{k}{1+x_n} > \dfrac{k}{1+A} = \dfrac{k}{1+\dfrac{\sqrt{1+4k}-1}{2}} = \dfrac{2k}{1+\sqrt{1+4k}} =$

$$\frac{\sqrt{1+4k}-1}{2} = A.$$