普通高等院校规划教材

实变函数引论

主 编 曹怀信

编 者 曹怀信 吴保卫 张建华

张永锋 胡洪萍 陈峥立

周焕芹

陕西师范大学出版社

序　言

众所周知，数是表达各种量的基本数学工具，函数是表述与研究各种数量关系的基本数学工具．简单的量（如人的体重）可用一个数表示，要把同一对象有关的多个量（如职工的工资情况）同时表示出来就要用到多个数，即一组数．这便促使人们开始研究由所有 n 元数组（n 维向量）构成的集合 $\mathbf{R}^n$ 并在其中定义运算、内积、长度等概念，形成了 n 维欧氏空间理论．为了将同一范围内的多个对象的多个量（如某厂的职工工资情况）同时表达出来，就需要用到多个数组．这就产生了矩阵的概念，它是线性代数研究的主要对象．一元函数用来研究简单变量（如圆盘的半径与面积）之间的关系，多个变量与一个变量（如长方体的长、宽、高与体积）之间的关系要用多元函数来表示，要表述与研究多个变量与多个变量之间的关系（如平面坐标变换）就要使用映射或算子的概念了．

研究各种数量关系是数学学科的基本目标．因而，函数及其推广就成为整个分析数学研究的主要对象．数学分析的主要研究对象是连续函数，复变函数论研究的是解析函数，实变函数的研究对象是比连续函数更广泛的一类函数——可测函数．推广 Riemann 积分、建立 Lebesgue 积分是实变函数论课程的中心任务．

函数的微分与积分是数学分析的核心内容，所以数学分析又称为微积分．一元函数的定积分与多元函数的重积分统称为 Riemann 积分，简称为 R-积分，它在几何学、物理学及其他学科中有着广泛而有效的应用．然而，R-积分也有许多的不足．首先，从使用范围上讲，R-积分基本上只适用于连续函数，间断点太多的函数没有 R-积分（即不是 R-可积的）．其次，R-积分与极限的关系不够协调（极限与积分交换次序要求一致收敛性）．另外，R-积分并不是微分的理想的逆运算．所以，建立对函数要求更低、使用范围更广、运算更灵活的新的积分理论就显得十分必要了．Lebesgue 积分理论应运而生，它是实变函数论的中心内容．

Riemann 积分的核心思想是分割、求和、取极限．分割是指将函数的定义

域分成有限个可以度量（有长度、面积、体积）的小部分；求和是指在每个小部分上任取一点并求出函数在该点的函数值，再乘以小部分的度量，然后求和（称为 Riemann 和）；取极限是指求出当小部分的最大直径趋于 0 时 Riemann 和的极限．可见，分割是建立 Riemann 积分的基础．因此，要推广 Riemann 积分，就要从推广分割的方式入手．为了使得新积分适用更多的函数，需要将函数的定义域分成“不连续”的小部分，但还要求这些小部分具有某种“度量”（以后称为“测度”，它是长度、面积、体积概念的自然推广；有测度的点集称为“可测集”）．其次，还要放松对被积函数的连续性质的要求，但还有某种“可度量性”，这种函数就是所谓的“可测函数”．由于新积分的积分域为一般的可测集且函数的可测性要用有关点集的可测性来刻画，所以，集合特别是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集理论，将是整个实变函数的基础．这就决定了实变函数论课程的主要内容为：

- 集合论基础；
- $\mathbf{R}^n$ 中的点集理论；
- 测度理论；
- 可测函数；
- Lebesgue 积分理论．

这正是本书所要讲解的主要内容．在集合理论部分，我们认为集合就是若干事物的全体， 关于集合的公理化定义，参见文献[1]．在回顾集合的基本运算（交、并、差、余）的基础上，将交与并的运算推广到任意多个集合，介绍集合的乘积运算，并引入一列集合的上极限、下极限与极限．为了比较两个无限集合的元素的多少，将引入集合的“基数”这一概念， 它提供了比较两个无穷集合的有力工具．在 $\mathbf{R}^n$ 中的点集理论一章中，我们回顾并扩大数学分析中已经学过的开集、闭集的概念，引入完备集、紧集、F_σ 型集、G_δ 型集及 Borel 集等重要概念，并建立开集的构造定理．在可测集与测度理论部分，先介绍 Lebesgue 外测度，进而定义并研究可测集及其测度理论，建立可测集的构造定理．在可测函数理论一章中，首先引入“简单函数”的概念（分部常值函数），利用简单函数列的极限引入可测函数的概念，研究他们的一系列重要性质，讨论可测函数与连续函数的关系（鲁金定理）；引入可测函数列的“几乎处处收敛性”与“依测度收敛性”，建立若干重要的“关系定理”（包括 Riesz 定理与 Egroff 定理）．最后一章是 Lebesgue 积分理论．引入 Lebesgue 积分的传统方法有两种：《上下积分法》[2,3]与《简单函数法》[4,5]．前一种方法的优点是与 Riemann 积分作类比，能体现实变函数论与数学分析的联系，但其缺点是：通常的数学分析并

没有应用上下积分定义 Riemann 积分；后一种方法的优点是体现了简单函数的逼近作用，其缺点是：步骤太多，相同形式的定理多次出现．两种方法的共同不足是：没有很好地应用Lebesgue 测度的性质研究 Lebesgue 积分的性质．为了克服这些不足，我们将提出一种新的定义 Lebesgue 积分的方法——下方图形法．首先，对于可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的非负可测函数 f，证明函数 f 的下方图形 $G(f,E)$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的 Lebesgue 可测集；然后，定义函数 f 的 Lebesgue 积分为 $G(f,E)$ 的 Lebesgue 测度；利用测度的性质，证明这种新的定义与传统定义是等价的．这种新定义不仅使得Lebesgue 积分具有非常明显的几何意义，而且使得《Levi 渐升列定理》、《关于积分域的可数可加性定理》等重要结论都成为《测度与极限换序定理》的直接推论．

Lebesgue 测度理论与积分理论的诞生，不仅克服了 Riemann 积分在使用范围与运算灵活性等方面的不足，而且也为泛函分析、Fourier 分析、概率论等数学分支奠定了理论基础．时至今日，实变函数论的思想与方法已渗透到数学的许多分支，它与 Fourier 变换、遍历理论、积分方程理论、积分变换理论之间有着紧密的联系．基数提供了比较两个无穷集合的重要工具(数学显微镜)，以此为工具，可以证明：自然数与有理数其实是“一样多的”，但远远“少于”无理数．测度论给出了点集的定量描述，从此出发研究数学分析中的许多基本概念得到了大为深刻的结果．例如，可以证明：闭区间上的有界函数 Riemann 可积的充分必要条件是其间断点之集测度为零．除此以外，实变函数论还用于微分方程定性理论、动力系统、解析函数的边值问题等诸多方面．

由此可见，实变函数论有着广泛而深刻的应用，的确是数学学科的重要分支，它在各数学分支的应用成了近代数学的一个特征．因此，凡是想了解近代数学的人，都应当认真学习与掌握实变函数论这门课程．数学分析以极限为工具研究连续函数，复变函数论以积分为工具研究解析函数，实变函数论则是以集合论为基础研究可测函数．因此，要学好实变函数论，就要充分灵活地运用集合论的方法与技巧．这正是该门课程的难点之所在．实变函数论，就像平面几何学一样，属于一门理论数学(纯粹数学)，理论证明多，计算问题很少．而且，许多问题的证明都是构造性的，并没有现成的公式、例题或模式可以套用．这正是学好本课程的困难之所在．

在本书的编写过程中，我们力图进行以下几个方面的尝试．

第一，利用“分析式讲解法”．该方法强调：先提出要讨论的问题，经过分析，引入适当的概念(定义)，以确定所研究的对象范围；在分析过程中，增加适

当的假设(条件)，以获得需要的结论；最后，再将所得到的结论用定理或命题形式表述出来.

第二，利用“下方图形法”定义非负可测函数的 Lebesgue 积分.

第三，讨论平面图形的面积与测度的关系、Riemann 重积分及广义积分(无穷积分、瑕积分)与 Lebesgue 积分的关系.

第四，精选例题与习题. 在概念与定理之后，选配适量例题，以说明有关概念与定理的使用方法. 每小节之后安排适量习题，易、中、难习题分级设置，较难习题分成几个步骤给出，各章后选配适量综合练习题，并有适当提示.

第五、在有关重要数学名词后面，加上了该名词的英文名.

本书是在陕西师范大学教材建设项目的资助下完成的，并得到了陕西师范大学出版社及数学与信息科学学院领导与教师的大力支持. 在此，深表谢意. 迫于时间，仓促成书，错误之处，在所难免. 还望读者多提宝贵的修改意见.

编 者

2008 年 1 月

目　录

第一章　集合论基础

集合理论是现代数学的重要基础，集合论技巧与极限理论相结合，形成了实变函数论的重要基础与鲜明特征. 集合论是 19 世纪 70 年代由德国数学家康托尔创立，它建立在一种无限观——“实无限”的基础上. 所谓“实无限”，就是把“无限”作为一个已经完成了的观念实体来看待. 例如，在集合论中用 $\mathbf{N}=\{n: n$ 是自然数$\}$表示全体自然数的集合就是如此. 需要指出的是，在此之前的几千年数学发展史中，占主导地位的是另一种无限观，即古希腊哲学家亚里士多德所主张的“潜无限”观念. 所谓“潜无限”，就是把“无限”作为一个不断发展着的、永远无法完成的过程来看待. 例如，把自然数看成一个不断延伸的无穷无尽的序列

$$0,1,2,3,\cdots,n,\cdots$$

就是如此.

集合论的产生是数学观念和数学方法上的一次革命性变革，由于它在解释旧的数学理论和发展新的数学理论方面都极为重要，因而逐渐为许多数学家所接受. 然而，在康托尔创立集合论不久，他自己就发现了问题，这就是 1899 年的“康托尔悖论”，亦称“最大基数悖论”. 与此同时，还发现了其他集合论悖论，最著名的是 1901 年的“罗素悖论”[1].

本章介绍集合论的基本概念、基本方法与基本理论，为以后各章的讨论打好基础.

§1.1　集合及其运算

1.1.1　集合的概念及其表示

什么是集合呢？集合(Set)是现代数学的一个最基本概念，它的严格定义需要用公理系统给出，参见[1]. 集合论创始人康托尔给出了集合的一个朴素的概

念：集合就是"我们察觉到的或在我们思维中的一些确定的不同事物的全体，这些事物称之为集合的元素"．简单地说，集合是指"**若干确定的事物的全体**"．这种说法，只是对集合这一概念的描述，并不是严格的数学定义．因为"全体"并不比"集合"更好理解．本书只需采用这种描述性的说法，把若干确定的事物的全体称为一个**集合**，这些事物称为这个集合的**元素**(Element)．例如，全体自然数组成一集合；区间$[a,b]$上的全体连续函数组成一个集合；某教室里的学生组成一个集合等等．

集合简称**集**，通常用大写字母A, B, C, D等表示，而用小写字母x, y, a, b等表示集合的元素．若x是集A的元素，则记为$x\in A$，读作"**x属于A**"；若x不是集A的元素，则记为$x\notin A$，读作"**x不属于A**"．

若集A的每一元素都是集B的元素，则称A是B的**子集**(Subset)，记为$A\subset B$，读作"**A包含于B**"或"**B包含A**"．若A是B的子集，而B中至少有一个元素不属于A，则称A是B的**真子集**(Proper subset)．

若$A\subset B$且$B\subset A$，即A与B所含的元素完全相同，则称A**等于**(Equals to)B，记为$A=B$．

为了运算的方便，引进"空集"的概念．把不含任何元素的集合称为**空集**(Empty set)，记为$\varnothing$．引进空集也是因为有时人们事先对于满足某种性质的元素是否存在并不了解，而需要谈论这种元素之集．例如，方程$x^2+1=0$的全体实根之集就是空集．显然，空集是任意集合的子集．

1.1.2 集合的表示

通常表示集合有两种方法：列举元素法和指出特征法．

1. 列举元素法：就是指将集合中的全部元素按照一定的规律排列出来，并用括号$\{\}$把它们括起来．例如，由-1及-1组成的集合S可表示为$S=\{-1,1\}$．列举元素法只适用于集合中只有有限个元素，或者集合中的元素可按某种方式排成有规律的序列．例如，全体自然数之集$\mathbf{N}$可表为

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\},$$

全体整数之集$\mathbf{Z}$可表为

$$\mathbf{Z}=\{0,-1,1,-2,2,\cdots,-n,n,\cdots\},$$

也可表示为

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

全体正整数之集$\mathbf{Z}^+$可表为

$$\mathbf{Z}^+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$$

2. 指出特征法：就是指出集合中的元素的特征即元素所具有的性质．例如，设 $P(x)$ 是一个关于 x 的命题，则把使得命题 $P(x)$ 成立的一切 x 之集 S 表示为 $S=\{x:P(x)\}$，或 $S=\{x\mid P(x)\}$，将集 E 中使得命题 $P(x)$ 成立的一切 x 之集表示为 $\{x\in E:P(x)\}$，简记为 $E[P]$．

例如，当 $P(x)$ 表示 $x^2=1$ 时，$\{x:P(x)\}=\{x:x^2=1\}=\{-1,1\}$；当 $P(x)$ 表示 $f(x)>a$ 时，$\{x:P(x)\}$ 就是使得 $f(x)>a$ 的一切 x 之集，而 $E[P]$ 表示集合 E 中满足 $f(x)>a$ 的一切 x 之集，记为 $E[f>a]$，即

$$E[f>a]=\{x:x\in E\text{且}f(x)>a\}.$$

类似地，可定义

$$E[a\le f<b]=\{x:x\in E\text{且}a\le f(x)<b\},$$

$$E[\lim_{n\to\infty}f_n=f]=\{x:x\in E\text{且}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\},$$

$$E[f\in G]=\{x:x\in E\text{且}f(x)\in G\}.$$

特别地，全体有理数之集 $\mathbf{Q}$ 可以表示为

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{m}{n}:m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}^+\right\},$$

坐标平面上的所有点之集 $\mathbf{R}^2$ 可表示为

$$\mathbf{R}^2=\{(x,y):x,y\in\mathbf{R}\},$$

所有复数之集 $\mathbf{C}$ 可表示为

$$\mathbf{C}=\{x+\mathrm{i}y:x,y\in\mathbf{R}\}.$$

当 $a\le b$ 时，规定

$$[a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a\le x\le b\},\quad (a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x<b\},$$

$$(a,\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x<\infty\},\quad (-\infty,a]=\{x\in\mathbf{R}\mid -\infty<x\le a\}.$$

1.1.3 集合的运算

1. 交(Intersection)：集 A 与集 B 的一切公共元素之集，称为 A 与 B 的**交集**(Intersection)，记为 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x:x\in A\text{且}x\in B\}.$$

有限多个集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交集 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 是指集

$$\bigcap_{k=1}^{n}A_k=\{x:x\in A_k(k=1,2,\cdots,n)\},$$

一列集 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的交集 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 定义为

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left\{x : x \in A_n (\forall n \in \mathbf{Z}^+)\right\}.$$

类似地，可以定义任意多个集 $A_\alpha(\alpha \in I)$ 的交集

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \left\{x : x \in A_\alpha (\forall \alpha \in I)\right\},$$

其中 I 称为**指标集**(Index set).

例 1.1.1 设 $A=\{1,2,3,4\}, B=\{3,4,5\}$, 则 $A \cap B=\{3,4\}$.

例 1.1.2 设 $A_i=\left\{x : 0 \le x < 1+\frac{1}{i}\right\}(i=1,2,3,\cdots)$，则

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i=\left\{x : 0 \le x < 1+\frac{1}{n}\right\}=\left[0,1+\frac{1}{n}\right),$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i=\{x : 0 \le x \le 1\}=[0,1].$$

例 1.1.3 $(0,1] \cap (1,2)=\varnothing$.

一般地，若两个集合的交集是空集，则称这两个集是**不相交的**(Disjoint).

2. 并(Union)：把集 A 与集 B 的所有元素放在一起组成一个集合(相同的元素只取一次)，称为 A 与 B 的**并集**(Union)，记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B=\{x : x \in A \text{或} x \in B\}.$$

有限多个集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并集 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 定义为

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k=\{x : \exists k \in \{1,2,\cdots,n\} \text{使得 } x \in A_k\},$$

一列集 $A_1, A_2 \cdots, A_n, \cdots$ 的并集 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 定义为

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\left\{x : \exists n \in \mathbf{Z}^+ \text{使得 } x \in A_n\right\}$$

类似地，可以定义任意多个集 $A_\alpha(\alpha \in I)$ 的并集为

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha=\left\{x : \exists \alpha \in I \text{使得} x \in A_\alpha\right\}.$$

例 1.2.4 设 $A_x=\{(x, y) : y \in \mathbf{R}\}(x \in \mathbf{R})$，则 $\bigcup\limits_{x \in \mathbf{R}} A_x=\mathbf{R}^2$.

例 1.2.5 设 $A_i=\{x : i-1 < x \le i\}(i=1,2,3,\cdots)$，则

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\{x : 0 < x \le n\}=(0, n], \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\{x : 0 < x < \infty\}=(0, \infty).$$

不难证明：集合的交与并运算具有下列性质.

定理 1.1.1　设 $A, B, A_i(i\in I), B_i(i\in I)$ 为任意集合，则以下结论成立：

(1) 结合律：
$$A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C, A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C;$$

(2) 交换律：
$$A\bigcup B=B\bigcup A, A\bigcap B=B\bigcap A;$$

(3) 分配律：
$$A\bigcap\left(\bigcup_{k\in I}B_k\right)=\bigcup_{k\in I}(A\bigcap B_k), A\bigcup\left(\bigcap_{k\in I}B_k\right)=\bigcap_{k\in I}(A\bigcup B_k);$$

(4) $A\bigcap A=A, A\bigcup A=A$；

(5) 当 $A\subset B$ 时，$A\bigcup B=B, A\bigcap B=A$；

(6) 当 $A_k\subset B_k(\forall k\in I)$ 时，$\bigcap\limits_{k\in I}A_k\subset\bigcap\limits_{k\in I}B_k, \bigcup\limits_{k\in I}A_k\subset\bigcup\limits_{k\in I}B_k$.

3．差(Difference)：对任意两个集合 A 与 B，属于 A 而不属于 B 的一切元素之集称为 A 与 B 的**差集**(Difference)，记为 $A\setminus B$，即
$$A\setminus B=\{x: x\in A\text{且}x\notin B\}.$$

例 1.1.6　设 $A=\{1,2,3,4\}, B=\{3,4,5\}$，则 $A\setminus B=\{1,2\}$.

例 1.1.7　设 $A=\{x: f(x)\geq c\}$，$B=\{x: f(x)>c\}$，则
$$A\setminus B=\{x: f(x)=c\}.$$

注意：(1) 定义差集 $A\setminus B$ 时并不要求 $A\supset B$.

(2) $(A\bigcup B)\setminus B=A-B$，一般并不等于 A . 可以验证：
$$(A\bigcup B)\setminus B=A\Leftrightarrow A\bigcap B=\varnothing.$$

(3) $(A\setminus B)\bigcup B=A\bigcup B$，一般并不等于 A . 可以验证：
$$(A\setminus B)\bigcup B=A\Leftrightarrow B\subset A.$$

4．余(Complement)：如果在讨论某一问题时，所涉及的元素，都属于同一集合 U，则称 U 为**全集或万有集**(Universal set). 这时，我们称 $U\setminus A$ 为 U 的子集 A 关于 U 的**余集或补集**(Complement)，或简称 A 的余集，记为 A^c .

定理 1.1.2　设 U 为全集，$A, B\subset U$，则

(1) $U^c=\varnothing$，$\varnothing^c=U$；

(2) 若 $A\subset B$，则 $A^c\supset B^c$；

(3) $A\bigcup A^c=U, A\bigcap A^c=\varnothing$;

(4) $A\setminus B=A\bigcap B^c$；

(5) $(A^c)^c=A$.

证明　这些性质都是明显的，我们只证(4). 任取 $x\in A\setminus B$，则 $x\in A$ 且

且$x\notin B$．因此$x\in A$且$x\in B^c$，从而$x\in A\bigcap B^c$．另一方面，任取$x\in A\bigcap B^c$，则$x\in A$且$x\in B^c$，即$x\in A$且$x\notin B$,从而$x\in A\setminus B$．故$A\setminus B=A\bigcap B^c$．

定理 1.1.3(对偶原理(De Morgan 公式)) 并集的余集等于余集的交集；交集的余集等于余集的并集，即

$$\left(\bigcup_{a\in I}A_a\right)^c=\bigcap_{a\in I}A_a^c,\left(\bigcap_{a\in I}A_a\right)^c=\bigcup_{a\in I}A_a^c.$$

证明 先证第一个等式. 设$x\in\left(\bigcup_{a\in I}A_a\right)^c$，则$x\notin\bigcup_{a\in I}A_a$，亦即对任意$a\in I$，有$x\notin A_a$．从而$x\in A_a^c(\forall a\in I)$．于是$x\in\bigcap_{a\in I}A_a^c$.

另一方面，任取$x\in\bigcap_{a\in I}A_a^c$，则$x\in A_a^c(\forall a\in I)$，亦即$x\notin A_a(\forall a\in I)$，从而$x\notin\bigcup_{a\in I}A_a$，于是$x\in\left(\bigcup_{a\in I}A_a\right)^c$．第一个等式得证.

至于第二个等式，只要在第一个等式中以A_a^c代替A_a，再在两端取余即得.

对偶性定理以后常要用到，它提供了交并转化的工具.

5．乘积(Product)：对于有限个集合$A_k(k=1,2,\cdots,n)$，定义它们的**乘积**(Product)为

$$\prod_{k=1}^n A_k\equiv A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_k\in A_k(k=1,2,\cdots,n)\}.$$

当$A_1=A_2=\cdots=A_n=A$时，将$\prod_{k=1}^n A_k$记为A^n．例如，$\mathbf{R}^n$就是n个$\mathbf{R}$的乘积，$\mathbf{R}^{p+q}=\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$，这里元素$(x_1,x_2,\cdots,x_{p+q})$与

$$((x_1,x_2,\cdots,x_p),(x_{p+1},x_{p+2},\cdots,x_{p+q}))$$

等同.

一般地，对于集族$A_i(i\in I)$，定义它们的乘积为

$$\prod_{i\in I}A_i=\{(x_i)_{i\in I}:x_i\in A_i(\forall i\in I)\},$$

其中的元素$(x_i)_{i\in I}$可视为满足条件$f(i)\in A_i(\forall i\in I)$的映射$f:I\to\bigcup_{i\in I}A_i$．当指标集$I$为正整数集$\mathbf{Z}^+$时，将$\prod_{i\in I}A_i$记为$\prod_{i=1}^{\infty}A_i$，并将其元素用序列表示，即

$$\prod_{i=1}^{\infty}A_i=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots):x_i\in A_i(\forall i\in\mathbf{Z}^+)\}.$$

当$A_n=A(n=1,2,\cdots)$时，将$\prod_{i=1}^{\infty}A_i$记为A^∞，其中的元素就是A中的序列．例

如，$\mathbf{R}^{\infty}$ 就是全体实数列之集.

6. 极限(Limit)：设 $\{A_n\}$ 是一集列，则属于无穷多个 A_n 的所有元素之集称为这个集列的**上极限**(Upper limit)，记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$；属于这个集列中从某项以后的一切 A_n 的所有元素之集称为这个集列的**下极限**(Limit)，记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

由定义可得：

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{x: x\text{属于无限个}A_n\}$；

(2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{x:\exists N\text{使得}x\in A_n(\forall n>N)\}$；

(3) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

如果 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，则称集列 $\{A_n\}$ 是**收敛的**(Convergent)，且称它的上极限(它等于下极限)为这个集列的**极限**(Limit)，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n.$$

例 1.1.8 设 $A_{2k-1}=A, A_{2k}=B(k=1,2,\cdots)$，则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=A\cap B,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=A\cup B.$$

因此，集列 $\{A_n\}$ 收敛当且仅当 $A=B$.

例 1.1.9 设 $A_n=\left[0,1+\dfrac{1}{n}\right](n=1,2,\cdots)$，则 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=[0,1]$.

下面的定理说明集列的上下极限与相应的特征函数列的上下极限紧密相关.

对任意集 $A\subset U$，称 U 上定义的函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A;\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

为集合 A 的**特征函数**(Characteristic function). 例如，狄里克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\chi_{\mathbf{Q}}(x)=\begin{cases}1, & x\in \mathbf{Q};\\ 0, & x\notin \mathbf{Q}.\end{cases}$$

定理 1.1.4 设 $A_n\subset U(n=1,2,\cdots)$，则

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)=\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(x)(\forall x\in U)$；

(2) $\varliminf_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)=\chi_{\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n}(x)(\forall x\in U)$；

(3) 集列$\{A_n\}$收敛当且仅当特征函数列$\{\chi_{A_n}(x)\}$在U上处处收敛；此时有

$$\lim_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)=\chi_{\lim\limits_{n\to\infty}A_n}(x)(\forall x\in U).$$

证明　(1) 任取$x_0\in U$，若$x_0\in\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n$，则$\chi_{\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n}(x_0)=1$，而此时$x_0$属于无穷多个$A_n$，故有无穷个$n$使$\chi_{A_n}(x_0)=1$．从而，也有$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x_0)=1$．若$x_0\notin\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n$，则$x_0$最多只属于有限个$A_n$，从而数列$\{\chi_{A_n}(x_0)\}$中最多只有有限个项为 1，其余全为零，从而可知$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x_0)=\chi_{\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n}(x_0)=0$．于是(1)得证．

(2) 类似于(1)．

(3) 由(1)与(2)可知．

定理 1.1.5　对任意集列$\{A_n\}$都有

$$\varlimsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m，\ \varliminf_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m.$$

证明　先证第一个等式．任取$x\in\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n$，则属于无穷多个$A_n$，从而

$$x\in\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m(n=1,2,\cdots),$$

于是$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m$．另一方面，任取$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m$，则$x\in\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m(n=1,2,\cdots)$.因为$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_m$，所以存在$n_1$使$x\in A_{n_1}$．又因为$x\in\bigcup\limits_{m=n_1+1}^{\infty}A_m$，所以存在$n_2>n_1$使$x\in A_{n_2}$．如此下去，可得无穷多个$A_{n_1},A_{n_2},\cdots(n_1<n_2\cdots)$，他们都含有$x$.于是$x\in\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n$．从而第一式得证．

再证第二式.任取$x\in\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n$,则存在$N$使得$x\in\bigcap\limits_{m=N}^{\infty}A_m$,故$x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m$.另一方面，任取$x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m$，则存在$N$使得$x\in\bigcap\limits_{m=N}^{\infty}A_m$，从而$x\in\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n$．第二式得证．证毕．

定理 1.1.6　(1) 如果$\{A_n\}$是渐张集列，即$A_n\subset A_{n+1}(\forall n\geq 1)$，则$\{A_n\}$收敛且

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n ;$$

(2) 如果$\{A_n\}$是渐缩集列，即$A_n \supset A_{n+1} (\forall n \ge 1)$，则$\{A_n\}$收敛且

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n .$$

证明　留作习题.

下面的例题给出了函数列的收敛点集与不收敛点集的结构.

例 1.1.10　设$f, f_n (n=1,2,\cdots)$都是定义在集合E上的函数，则集E中一切使$\{f_n(x)\}$收敛于$f(x)$的点x所构成的集合C及E中一切使$\{f_n(x)\}$不收敛于$f(x)$的点x所构成的集合D可分别表示为

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} E_n^k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \varliminf_{n\to\infty} E_n^k ,\quad D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n(k^{-1}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \varlimsup_{n\to\infty} E_n(k^{-1}) ,$$

其中$E_n^k = E[| f_n - f | < k^{-1}]$，$E_n(k^{-1}) = E[| f_n - f | \ge k^{-1}]$.

证明　显然$D = E \setminus C, E_n(k^{-1}) = E \setminus E_n^k$. 所以，只需证明$C$的表达式. 设$x \in C$，则$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. 从而，对于任何正整数$k$，存在正整数$N$使得当$n \ge N$时，有$\left| f_n(x) - f(x) \right| < k^{-1}$. 这就是说$x \in E_n^k (\forall n \ge N)$. 因而

$$x \in \varliminf_{n\to\infty} E_n^k (k = 1,2,\cdots).$$

从而$x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \varliminf\limits_{n\to\infty} E_n^k$，故$C \subset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \varliminf\limits_{n\to\infty} E_n^k$. 另一方面，若$x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \varliminf\limits_{n\to\infty} E_n^k$，则对任意的正整数$k$，有$x \in \varliminf\limits_{n\to\infty} E_n^k$. 故由下极限的定义知，存在正整数$N$使得$n \ge N$时，有$x \in E_n^k$，即$\left| f_n(x) - f(x) \right| < k^{-1}$. 因而$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，所以$x \in C$. 可见，

$$C \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} \varliminf_{n\to\infty} E_n^k .$$

因此，关于C的表达式成立. 证毕.

应当指出的是，证明集合等式时，不一定都要用互相包含的方法. 有时，利用集合的运算性质会使证明更简便，参见下面的例子.

例 1.1.11　证明：$(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$.

证明　应用集合的运算性质可知

$$(A \cup B) \setminus B = (A \cup B) \cap B^c = (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c) = A \cap B^c = A \setminus B .$$

例 1.1.12 证明 $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

证明 应用集合的运算性质可知

$$\begin{aligned}A\setminus(B\cup C)&=A\cap(B\cup C)^c=A\cap(B^c\cap C^c)\\&=(A\cap B^c)\cap(A\cap C^c)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C).\end{aligned}$$

习题 1.1

1. 证明下列集合等式.

   (1) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$；

   (2) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$；

   (3) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$.

2. 证明下列命题.

   (1) $(A\setminus B)\cup B=A$ 的充分必要条件是：$B\subset A$；

   (2) $(A\cup B)\setminus B=A$ 的充分必要条件是：$A\cap B=\varnothing$；

   (3) $(A\setminus B)\cup B=(A\cup B)\setminus B$ 的充分必要条件是：$B=\varnothing$.

3. 证明定理 1.1.6.

4. 设 f 是定义于集合 E 上的实值函数，c 为任意实数，证明：

   (1) $E[f>c]=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E\left[f\geq c+\dfrac{1}{n}\right]$；

   (2) $E[f\leq c]=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E\left[f<c+\dfrac{1}{n}\right]$；

   (3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)(\forall x\in E)$，则对任意实数 c 有

$$E[f\geq c]=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}E\left[f_n>c-\frac{1}{k}\right]=\bigcap_{k=1}^{\infty}\varliminf_{n\to\infty}E\left[f_n>c-\frac{1}{k}\right].$$

5. 证明集列极限的下列性质.

   (1) $\left(\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n\right)^c=\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n^c$；

   (2) $\left(\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n\right)^c=\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n^c$；

   (3) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(E\setminus A_n)=E\setminus\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n$；