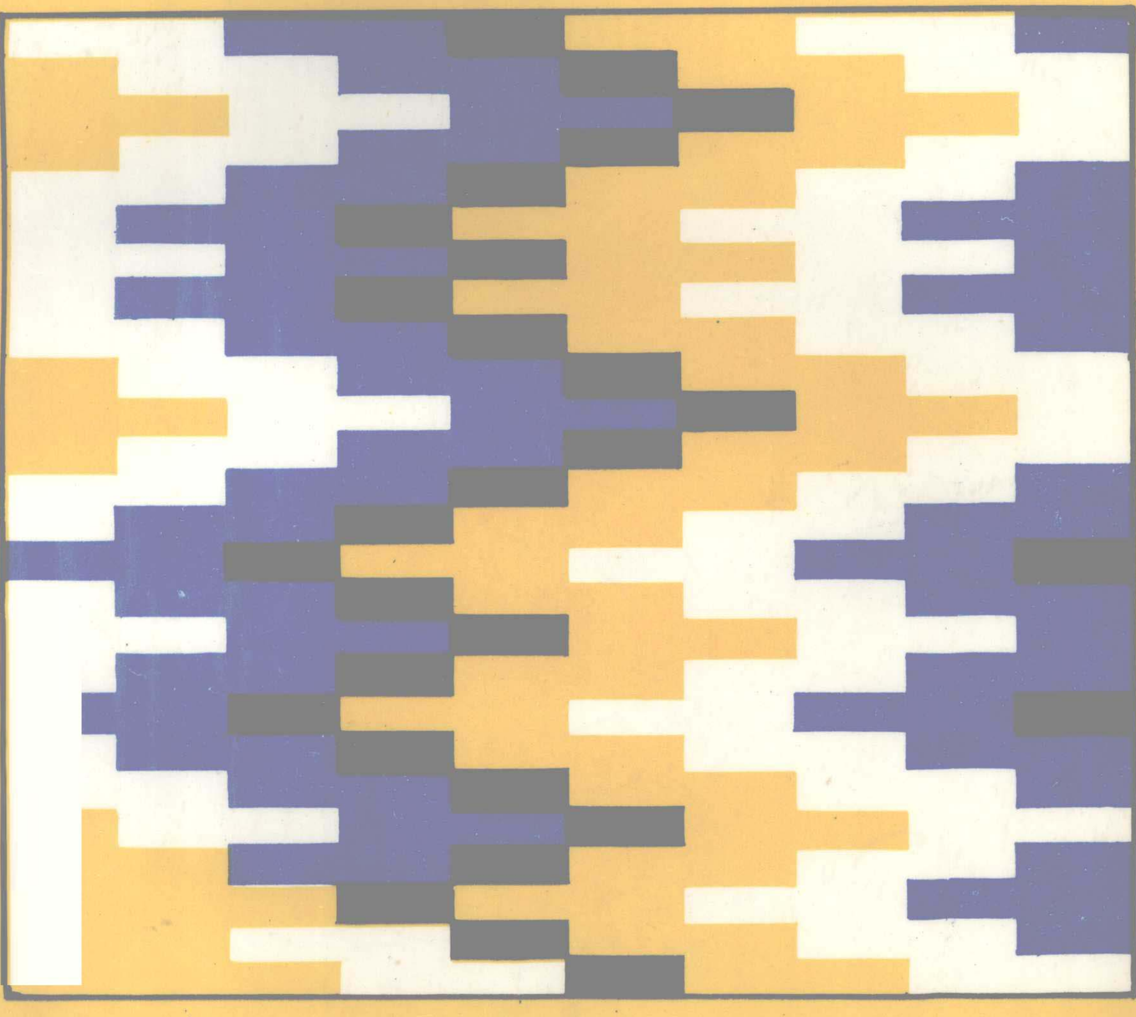
符号逻辑与定理机器证明

FUHAO LUOJI YU
DINGLI JIQI ZHENGMING

张 伟 编著



辽宁大学出版社

符号逻辑与定理机器证明

张　伟　编著

辽 宁 大 学 出 版 社

（辽）新登字第9号

符号逻辑与定理机器证明

张　伟　编著

辽宁大学出版社出版发行　（沈阳市崇山中路66号）

阜新矿业学院印刷厂印刷

开本：787×1092　1/16　印张：20　字数：400千

1995年4月第1版　1995年4月第1次印刷

印数：1—1000

责任编辑：刘　葵　封面设计：陈景泓

责任校对：灵　伟

ISBN　7—5610—2971—3

O·105　定价：19.80元

前　言

著名的计算机软件大师 Dijkstra 曾有一段自述，足以说明数理逻辑对于计算机科学是何等的重要。他说："我现在年纪大了，搞了这么多年软件，错误不知犯了多少，现在觉悟了。我想，假如我早年在数理逻辑上好好下点功夫的话，我就不会犯这么多的错误。不少东西逻辑学家早就说了，可我不知道。要是我能年轻20岁的话，我就回去学习逻辑。"Dijkstra 的这番话实际上隐含着这样一个事实，即，数理逻辑是计算机科学的理论基础。

对于大多数试图让计算机去完成需要"智能"才能完成的任务的研究者来说，人工智能是一个有吸引力的研究领域。然而在人工智能学界，存在着关于人类智能本质的两种不同的认识，即符号主义和连接主义。连接主义认为思维是大量互连的神经元的集体活动所造成的结果；而符号主义则认为人类认知的基本元素是符号，认知过程就是符号表示上的一种运算。由于符号主义人工智能业已取得了辉煌的研究成果（如专家系统，博奕程序，定理证明等），而且符号逻辑对计算机科学影响巨大，所以我们必须仔细认真地去研究符号逻辑，"而且不论连接主义的研究取得怎样的发展，对于符号逻辑的研究都不应受到影响"（连接主义的权威学者 Hopfield 语）。定理的机器证明就是符号主义人工智能的一个重要的基础性的研究内容之一。

很久以来，人们就抱有这样一个向往：寻找一种通用的判定程序去证明（数学）定理。这种想法的产生可一直追溯到十七世纪的 Leibniz，而这项研究的复兴则应归功于本世纪初的 Peano 及二十年代的希尔伯特学院（Hilbert school）。1930 年，希尔伯特证明了一个非常重要的定理，他指出了一种用于定理证明的机械方法。不幸的是，（因为用手工去执行）他的方法太耗费时间，而难于被应用。随着数字计算机的出现，逻辑学家们再次对定理机器证明产生了兴趣，1960 年，Gilmore 在数字计算机上实现了 Herbrand 的程序，不久 Davis 和 Putnam 提出了一个效率较好的程序。

定理机器证明研究的一个主要突破口是由J. A. Robinson 在1965 年开辟的，他提出了一个单独的推理规则——归结原理，该规则被证明是效率更好的而且十分易于在计算机上实现。从那以后，人们又对归结原理作了许多改进。定理机器证明已经被应用于很多领域，诸如程序分析、程序综合、演绎式回答问题系统、问题求解系统、机器人技术等，而且应用领域的数目目前还在扩大。

在计算机科学的领域，研究者们也越来越多地认识到了符号逻辑本身的重要性，关于一阶逻辑的某些背景知识，业已成为读懂许多与计算机科学相关的期刊的必要工具。然而，大多数可用的符号逻辑的书籍均非面向计算机科学的，它们几乎都是面向数学家或哲学家的。

我们的目标是要写一本包括一个符号逻辑导论和一个关于定理机器证明的完整的讨论及其应用编著。本书由三个主要的部分组成，第二章与第三章是符号逻辑导论，第四——九章介绍了几种定理机器证明的技术，第十章和第十一章演示如何将定理证明技术应用于各种不同的领域，如回答问题，问题求解，程序分析，以及程序综合。

本书适用于以下几种用途，它可用来作大学高年级学生或研究生的定理证明课程教材，如果用作大学高年级学生的教材，则较深入的章节，第六——十一章，可略去。学习这个课程，读者不需要有符号逻辑方面的背景知识，只要有初步集合论的基础知识即可。如果用于研究生的课程（教材），则应该认为读者是有关于符号逻辑的背景知识的，那么第二、三章就可被跳过。因为我们对一阶逻辑采用了纯模型论的介绍方法，所以本书与其它的按惯例介绍一阶逻辑语法（公理）的逻辑书籍差异较大。此外，本书强调证明技术在计算机上实现的有效性，而这一点通常是被逻辑学家所忽略的。在有些大学，定理机器证明是作为人工智能课的一个部分，而不是作为一个独立的课程被教授的。在这种情况下，本书可作为人工智能课的一个辅助教材，提供读者一些定理机器证明及其应用领域的基础知识。

因为定理机器证明是一个发展十分迅速的学科，所以不可避免地使本书省略了该领域中的某些有意义的结果，但是，我们尽力地在本书的参考文献目录中列出了每一篇与本学科有关的已发表的论文。本书的文献目录分为三个部分：第一部分收集了有关人工智能的一般性材料，第二部分覆盖了符号逻辑和定理机器证明，第三部分则由与定理证明技术应用有关的材料组成。

在完成本书的编著工作之后，我深深地感到我首先应该感谢的是我在浙江大学学习时的导师之一——浙江大学计算机系俞瑞钊教授，是他首先将数理逻辑这一强调理性而又令人兴趣盎然的学科介绍给我们，并且对于我们后来从事科学研究时的思维方法都产生了深刻的影响。我也要感谢我在浙江大学学习时的导师何志均教授，他在为我们上“形式语言与自动机”课程时，进一步强调了数理逻辑的重要性，并让数理逻辑在我们的心目中占据了它应有的位置。

我还要感谢的是我的博士导师——东北大学计算机系李华天教授和刘积仁教授，他们曾对本书中涉及到我的博士论文的那部分内容进行过逐字逐句的审阅，并提出了许多中肯的修改意见。

尔后我要深深地感谢辽宁大学计算机系洪声贵教授，他不仅认真地阅读和改正了全部书稿，还以慈父般的关怀支持我的工作，正是他给我提供了一个注重理论而又令人愉快的工作环境，才使这项工作成为可能。最后我要特别地感谢我的妻子洪百灵，感谢她对我的所有工作的耐心、理解和支持。

目　录

第一章 导 论

1.1 人工智能、符号逻辑和定理证明

从第一台现代计算机问世起，计算机技术一直以令人惊奇地速度发展着。今天计算机已不仅被用来解决诸如快速富利叶变换或高维矩阵求逆等计算性难题，而且被用于执行需要人类智能才能完成的任务。这类任务有编写程序，回答问题，和证明定理。人工智能就是计算机科学中解决如何完成此类任务的一个研究领域［Ernst and Newell，1969；Feigenbaum and Feldman，1963；Nilsson，1971；Slagle，1971］。

六十年代的后五年，在人工智能领域人们对定理机器证明的兴趣已变得十分浓厚。人们对定理机器证明的这种广泛的浓厚的兴趣不仅来自于认识到了进行逻辑演绎的能力是人类智能的一个集中成份，而且可能更多的是来自于定理机器证明技术本身在六十年代末期所取得的重大的成果。定理机器证明的基础是由Herbrand在1930年所奠定的，但是他提出的方法在数字计算机出现以前是没有实用价值的。直到1965年，J. A. Robinson在他的里程碑式的论文中提出了归结原理，此时实现一个在计算机上实际可行的定理证明器的研究工作才真正开始起步，从那以后，人们又对归结原理进行了多次改进。

与此同时，与机器定理证明技术的不断改进并驾齐驱的是该项技术在人工智能的各种问题求解中的应用也不断取得进展。首先是定理机器证明技术被应用于演绎回答问题系统中，后来又被用于问题求解，程序分析，程序综合，等等。

学习符号逻辑可以从许多不同的侧面入手，按照传统，人们一般是从哲学和数学的角度学习它。在本书中，我们的兴趣集中于应用符号逻辑去解决智力难题，即，我们希望用符号逻辑来表达问题并求得问题的解。

我们可以通过几个简单的例子来看一看如何用符号逻辑来表达问题，因为我们尚未形式地讨论符号逻辑，读者此时只能凭直觉来体会一下文中的含义。

让我们来考虑一个简单的例子，假设我们已经有以下事实了：

F_1：如果天气热而且湿度大，那么天将要下雨。

F_2：如果湿度大，那么天气热。

F_3：现在湿度大。

所提出的问题是：天会下雨吗？

以上事实是用汉语给出的。我们首先将用符号来表示它们，我们用P，Q和R分别表示“天气热”，“湿度大”和“天要下雨”这三件事情。此外我们还需要用到一些逻辑符号，即用$\wedge$表示“而且”，用$\rightarrow$表示“蕴涵”，于是上述三个事实即可表示为：

F_1：$P \wedge Q \rightarrow R$

F_2：$Q \rightarrow P$

F_3：Q

这样我们就将汉语句子翻译成了逻辑公式，读者以后会看到，只要F_1，F_2，和F_3为真，就有公式

F_4：R

为真，因此我们说F_4是由F_1，F_2和F_3逻辑地导出的，即，天将要下雨。

让我们来看另一个例子，我们已经有以下事实：

F_1：孔子（Confucius）是一个人。

F_2：每个人终有一死。

为了表示F_1和F_2，我们需要一个新的概念，叫做谓词。我们可以分别用P（x）和Q（x）表示“x是一个人”和“x终有一死”，我们还要用（∀x）来表示“对所有x”，那么上述事实就可表示为

F_1：P（Confucius）

F_2：$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$。

同第一个例子一样，读者将看到，从F_1和F_2，我们能够逻辑地演绎出

F_3：Q（Confucius）。

此公式的意思是，孔子（Confucius）终有一死。

在上面两个例子中，我们已经涉及到要证明一个公式是从另外一些公式逻辑地导出的，今后我们称“某个公式是由另外一些公式逻辑导出的”这样一个陈述为一个定理，称一个定理的论证过程，即一个公式怎样由其它公式逻辑地推导出来的过程，为定理的证明。所谓定理的机器证明问题就是考虑用机械的方法去寻找定理的证明。

许多问题都可被方便地转换为定理证明问题，下面我们列出其中的几个：

1. 对回答问题系统而言，事实可以被表示为逻辑公式，那么要根据事实回答问题也就是要求我们证明一个与答案对应的公式是另外一些表示事实的公式的逻辑推论。

2. 对程序分析问题而言，我们可用一个公式A来描述一个程序的执行，用一个公式B来描述该程序的停止条件。那么要证明该程序必然停止等价于要证明公式B是公式A的逻辑推论。

3. 在图同构问题中，我们想知道是否一个图与另一个图的一个子图同构，这个问题不仅是一个有趣的数学问题，而且也是一个有应用价值的实际问题。例如一个有机化合物的结构可以描述为图，因此测试一个有机化合物结构的子结构是否是另一个机化合物的问题就是一个图同构问题。而对于图同构问题，完全可以被表达为证明一个表示图的公式是另一个表示图的公式的逻辑推论的问题。

4. 在状态转换问题中，给出一个状态集和一个操作符集。当一个操作符施用于一个状态时，将产生一个新的状态，这样，所谓状态转换问题就是从一个初始状态出发，寻求一个操作符的序列，该序列可将初始状态转换成一个期望的（终止）状态。对于这种问题，我们可以用逻辑公式描述状态和状态变换规则。于是，将初始状态转换成期望的状态这个问题可以看成是证明代表期望状态的公式是代表初始状态及状态转换规则的公式的逻辑推论的问题。

因为许多问题都能用公式表示成为定理证明问题，所以定理证明是人工智能科学中一个十分重要的研究领域。经过许多研究者的不懈努力，在使用计算机进行定理证明方面的研究已经取得了巨大的成就。在本书中，我们的讨论既包括机器定理证明的理论，也包括其应用

技术。

1.2 数学背景知识

在本小节中，我们将介绍一些本书中要用到的基本的数学概念。所有这些概念都能很容易地在一些初等数学课本中找到［Lightstone，1964；Pfeiffer，1964；Stoll，1961］。我们用到了以下的几个集合论方面的基本定义：

一个集合是元素（成员）的汇集。不含有元素的集合叫做空集$\varnothing$。我们用A和B表示两个集合，$x \in A$则表示x是A的一个成员，或者说成x属于A。

集合A与集合B相同，记作$A=B$，当且仅当A和B含有相同的元素集。

集合A是集合B的子集，记作$A \subseteq B$，当且仅当A中的每一元素都是B的元素。

集合A是集合B的真子集，记作$A \subset B$，当且仅当$A \subseteq B$而且$A \neq B$。

集合A和集合B的并，记为$A \cup B$，是一个集合，该集合包含所有属于A或属于B的元素。

集合A和集合B的交，记为$A \cap B$，是一个集合，它包含所有既属于A又属于B的元素。

集合A与集合B的差，记为$A-B$，是一个集合，它由所有属于A但不属于B的元素组成。

下面我们定义关系和函数的概念。

我们用（x，y）表示元素的有序对，其中x叫做第一坐标，y叫做第二坐标。

所谓关系就是有序对的集合，例如，相等关系是一个有序对的集合，其每个元素的第一坐标与第二坐标相等。

一个关系R的定义域是R的所有元素的第一坐标组成的集合，而R的值域则是所有第二坐标的集合。

一个函数是一种关系，该关系中不含有两个具有相同第一坐标的有序对，如果f是一个函数并且x是其定义域中的元素，那么f（x）表示函数f中唯一的以x作为第一坐标的那个有序对的第二坐标，f（x）被称作f在x处的值，而且我们说f赋给x值f（x）。

在本书中我们自始至终地使用了一些传统的常用符号。例如，$>$总指“大于”，$\geqslant$，“大于或等于”；$<$，“小于”；$\leqslant$，“小于或等于”；$=$，“等于”；$\neq$，“不等于”；$\triangleq$，“定义为”；等等。其中等于号“=”将被用于多种情形中，它可能被作为以下任何一种含义来使用：“由...确定”，“相同”，“等价于”或“等于”。这并不会使读者产生任何的困惑，因为读者可以从上下文中知道其真正的含义。

参考文献

Ernst，G，W. and A. Newell（1969）：“GPS：a Case Study in Generality and Problem Solving”，Academic Press，New York.

Feigenbaum，E，and J. Feldman，eds.（1963）：“Computers and Thought”，McGraw-Hill，New York.

Lightstone，A. H.（1964）：“The Axiomatic Method，an Introduction to Mathematical

Logic", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
Nilsson, N. J. (1971): "Problem Sloving Methods in Artificial Intelligence", McGraw—Hill, New York.
Pfeiffer, P. E. (1964); "Sets, Events and Switching", McGraw—Hill, New York .
Slagle, J. R. (1971); "Artificial Intelligence, the Heuristic Programming Approach", McGraw—Hill, New York .
Stoll, R, (1961): "Sets, Logic and Axiomatic Theories", Freeman, San Francisco.
Stoll, R. (1963): "Set Theory and Logic", Freeman, San Francisco.

第二章　命题逻辑

2．1　导言

符号逻辑需要一种能对数学和日常生活中出现的推理现象进行符号化的语言，根据所采用的语言可将符号逻辑分为几类。在本章中，我们将首先介绍最简单的符号逻辑——命题逻辑（或称命题演算），在下章，我们要讨论一种更一般的逻辑——一阶逻辑（或称一阶谓词逻辑）。

在命题逻辑中，我们对陈述性语句感兴趣，这种语句或真或假，但不能是既真又假，任何一个这种陈述性的语句叫做一个命题。更形式地说，一个命题是或真或假的陈述语句。举例来说，“雪是白的”，“糖是碳水化合物”，“Smith 取得了博士学位”就是命题。赋予命题的“真”或“假”叫做该命题的真值。习惯上我们用T 表示“真”，用F 表示“假”。为了更进一步的方便，我们还用大写符号或大写符号串表示命题，例如，我们可以用下面的方式表达上面的几个命题：

P $\triangleq$ 雪是白的。

Q $\triangleq$ 糖是碳水化合物。

R $\triangleq$ Smith 取得了博士学位。

用来表示命题的符号，诸如上面的P，Q，R，叫做原子公式，或原子。

由命题出发，我们可以通过使用逻辑联接词构造组合命题。例如，“雪是白的而且天是兰的”和“如果John 没在家，那么Mary 就在家”。在这两个组合命题中出现的“而且”和“如果... 那么 ...”是逻辑联接词。在命题逻辑中有五个常用的逻辑联接词：$\sim$（非），$\wedge$（与），$\vee$（或），$\rightarrow$（蕴涵），和 $\leftrightarrow$（等价）。这五个联接可用来从命题构造组合命题，而且通过反复使用，又可从组合命题构造出更复杂的的组合命题。例如，我们用P 表示“湿度很大”，用Q 表示“温度很高”，用C 表示“人感到舒适”，那么语句“如果湿度很大而且温度很高，那么人就不会感到舒适”即可表示为（（P∧Q）→（～C））。因此我们看到组合命题能够表示颇为复杂的语意。在命题逻辑中，一个表示命题的表达式叫做合式的公式，上述的P，或组合命题（（P∧Q）→（～C））都是合式的公式。

定义．命题逻辑合式公式（或简称公式）可由以下步骤递归定义：

1．原子是公式。

2．如果G 是公式，那么 ～G 也是公式。

3．如果G 和H 是公式，那么（G∧H），（G∨H），（G→H）和（G↔H）均是公式。

4．所有公式仅能通过使用以上规则而得到。

不难看出，表达式（P→）和（P∨）不是命题公式。在本书中，当不引起混淆时，某些括号将被略去。如 P∨Q 和 P→Q 分别是公式（P∨Q）和（P→Q）的简略形式。我们还通过对命题联结词赋予优先级来进一步省略括号。五个联结词由低到高的优先顺序为：

↔，→，∧，∨，～。

约定具有较高优先级的联结词应被首先处理。因此 P→Q∧R 意指（P→（Q∧R）），而P→Q∧～R∨S 则意为（P→（Q∧（（～R）∨S）））。设G 和H 是两个公式，那么公式（～G），（G∧H），（G∨H），（G→H），和（G↔H）的真值则以下述方式由G 和H 的真值来决定：

1. ～G 为真当G 为假，而 ～G 为假当G 为真，～G 叫做G 的否定。

2. （G∧H）取真当G 和H 都为真；否则，（G∧H）取假。（G∧H）叫做G 和H 的合取。

3. （G∨H）取真当G 和H 至少有一个为真；否则（G∨H）为假。（G∨H）叫做G 和H 的析取。

4. （G→H）为假当G 为真而H 为假；否则（G→H）取真。（G→H）读作“如果G 则H”，或“G 蕴涵H”。

5. （G↔H）为真当G 和H 总是有相同的真（假）值。

上述关系可以被方便地表示为表2. 1，基于此表，我们将给出如何根据出现在公式中的原子的真值去求取整个公式的真值的方法。

表2. 1

G	H	～G	（G∧H）	（G∨H）	（G→H）	（G↔H）
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

2. 2　命题公式的解释

设P 和Q 是原子命题，且P 的真值为T，Q 的真值为F，那么用P，Q 代替表2. 1 中的G，H，我们可从表中第二行中得到（～P），（G∧H），（G∨H），（G→H）和（G↔H）的真值分别为 F，F，T，F，F。同理，任何公式的真值均可据原子公式的真值求得。

例2. 1

考虑公式

G ≜（P∧Q）→（R↔（～S））。

此公式中的原子有P，Q，R 和S。设P，Q，R，S 的真值分别为T，F，T，T，则（P∧Q）是F，因为Q 是假。（～S）是F 因为S 为T，（R↔（～S））是F，因为R 是T 而（～S）是F；（P∧Q）→（R↔（～S））是T，因为（P∧Q）是F 而（R↔（～S））也是F。因此当原子P，Q，R，S 取值为（或称：指派为）T，F，T，T，时，公式G 的真值为T。这里，用｛T，F，T，T｝对｛P，Q，R，S｝的真值所作的指派（赋值）称为公式G 的一个解释。因为P，Q， R，S中的每一个均有T或F两种可能的指派，所以公式G共有$2^4=16$种解释，在表2．2中我们给出了公式G在所有这16种解释之下的真值。

表2．2　　$(P\wedge Q)\rightarrow(R\leftrightarrow(\sim S))$的真值表

P	Q	R	S	~S	(P∧Q)	(R↔(~S))	(P∧Q)→(R↔(~S))
T	T	T	T	F	T	F	F
T	T	T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	F	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	T	F	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	T	F	F	T

象表2．2这样一张表被称作真值表，它列出了在对出现于公式G中的每一原子作出所有可能的指派之下，公式G的真值。

现在我们给出命题公式的解释这一概念的形式定义。

定义．对任一给定的命题公式G，设A_1，A_2，...，A_n是出现于G中的所有原子，则公式G的一个解释就是对A_1，A_2，...，A_n的一个指派，其中对每个A_i只能指派T或F，但不可同时既T又F。

定义．我们称公式G在一个解释下为真，当且仅当G在该解释下求值得T；否则称G在该解释下为假。

如果一个公式含有n个不同的原子，那么它将有2^n个不同的解释。有时可简便地记公式所有原子为A_1，...，A_n，而用集合$\{m_1, \ldots, m_n\}$，其中m_i为A_i或$\sim A_i$来表示一个解释。例如，集合$\{P, \sim Q, \sim R, S\}$表示一种对P，Q，R，S分别指派T，F，F，T的解释，换句话说，如果原子A出现在表示解释的集合中，那么A被指派为T，如果$\sim A$出现在解释集合中，那么A被指派为F，在本书中我们将始终使用这种记法。

2. 3 命题逻辑的永真性和永假性

在本节中，我们将讨论在任何解释下都为真的公式和在任何解释下都为假的公式。

例2. 2

考虑公式

G $\triangleq$ ((P→Q) ∧P) →Q。

出现在G中的原子有P和Q，因此，公式G有 $2^2=4$ 种解释，G在这四种解释下的真值由表2. 3给出，从表上我们可以看到，G在所有解释下都是真的，这种公式叫做永真公式（或重言式）。

表2. 3　((P→Q) ∧P) →Q 的真值表

P	Q	(P→Q)	(P→Q) ∧P	((P→Q) ∧P) →Q
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

例2. 3

考虑公式

G $\triangleq$ (P→Q) ∧ (P∧～Q)，

G的真值表由表2. 4给出，我们可以看到G在所有解释之下都为假。这种公式叫做永假公式（或矛盾）。

表2. 4　(P→Q) ∧ (P∧～Q) 的真值表

P	Q	～Q	(P→Q)	(P∧～Q)	(P→Q) ∧ (P∧～Q)
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F

下面我们给出永真性和永假性这两个概念的形式定义：

定义. 一个公式是永真的当且仅当它在所有解释下都是真的；一公式是非永真的，当且仅当它不是永真的。

定义. 一个公式是永假的（或称不可满足的）当且仅当它在所有解释下都是假的；一公式是非永假的（或称可满足的）当且仅当它不是永假的。