经济数学基础

第三册

经济信息系数学教研室编

中南财经大学·武汉
一九八五年

经 济 数 学 基 础

第 三 册

经济信息系数学教研室编

中 南 财 经 大 学 · 武 汉

一 九 八 五 年

目　录

第一章 行 列 式

行列式是研究线性方程组的一个重要工具，同时，线性代数中的矩阵理论也离不开行列式的计算。因此，我们首先讨论行列式。其主要内容有n阶行列式的概念、行列式的性质、计算方法及克莱姆法则。

§1 n阶行列式的定义

一 二阶行列式和三阶行列式

给出一个二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1}$$

将第一个方程乘以a_{22}，减去第二个方程乘以a_{12}，从而消去x_2，得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

同样，将第二个方程乘以a_{11}，减去第一个方程乘以a_{21}，从而消去x_1，得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1$$

若$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，就得到方程组（1）的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{2}$$

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{3}$$

表示数$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，（3）式有两行两列，这时 称（3）式为二阶行列式，换句话说，一个形如（3）式的二阶行列式所表示的数是$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{4}$$

为了便于记忆（4）的右边，我们用实线箭头联结的两个元素（或数）的乘积带正号，而用虚线箭头联结的两个元素的乘积带负号。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$-\qquad +$$

也就是（4）的右边为$+a_{11}a_{22}$与$-a_{12}a_{21}$两项之和即

$$+a_{11}a_{22}+(-a_{12}a_{21})=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

例如，$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=2\times5-(-3)\times4=22$

有了二阶行列式的定义，就可以将线性方程组（1）的解（2）的分母，分子分别记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

其中D叫做二元线性方程组（1）的系数行列式。

因此，当$D \neq 0$时，(1)的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}。$$

例1　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 8, \\ 4x_1 + 5x_2 = -6. \end{cases}$$

解：因为$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$，所以方程组有 解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}}{22} = \frac{22}{22} = 1$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}}{22} = \frac{-44}{22} = -2.$$

下面给出三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{5}$$

从方程组（5）中的前两式消去x_3，后两式中消 去x_3，再从所得到的两个方程中消去x_2，就得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1$$

$$= (b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3)$$

当$D = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}) \neq 0$时，得

$$x_1 = \frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3)$$

用同样方法，可求得

$$x_2 = \frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}),$$

$$x_3 = \frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}).$$

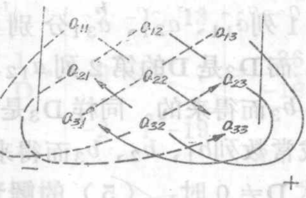
类似，引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

表示数$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$，这时，称（6）式为三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (7)$$

（7）式左边含有三行、三列，它有六项，为了便于记忆（7）式的右边，如下图所示，我们可用实线箭头联结的三元素（或数）之积带正号，而用虚线箭头联结的三元素（或数）之积带负号。



也就是（7）式右边为这些带正号项和带负号项的和。

例如

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot(-7)+(-1)\cdot5\cdot(-2)+4\cdot1\cdot0$$

$$-4\cdot3\cdot(-2)-(-1)\cdot0\cdot(-7)$$

$$-2\cdot1\cdot5$$

$$=-42+10+24-10=-18$$

利用三阶行列式，分别表示线性方程组（5）的解的分母和分子，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

类似于二元线性方程组，把D叫做（5）的系数行列式，这里，D_1是D的第1列a_{11}、a_{21}、a_{31}分别换成常数列b_1、b_2、b_3而得来的，而D_2是D的第2列a_{12}、a_{22}、a_{32}分别换成常数列b_1、b_2、b_3而得来的。同样D_3是D的第3列a_{13}、a_{23}、a_{33}分别换成常数列b_1、b_2、b_3而得来的。

当系数行列式$D \neq 0$时，（5）的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \tag{8}$$

例2　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 13, \\ 3x_2 + 5x_3 = 7, \\ -2x_1 + x_2 - 7x_3 = -19. \end{cases}$$

解：由 $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -7 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$

因此方程组有解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} 13 & -1 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \\ -19 & 1 & -7 \end{vmatrix} = \frac{-36}{-18} = 2$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{D}\cdot\begin{vmatrix}2 & 13 & 4\\ 0 & 7 & 5\\ -2 & -19 & -7\end{vmatrix}=\frac{18}{-18}=-1,$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{1}{D}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1 & 13\\ 0 & 3 & 7\\ -2 & 1 & -19\end{vmatrix}=\frac{-36}{-18}=2.$$

二 排列的奇偶性

对于二、三阶行列式，我们从一看出，它们是由于解二元及三元线性方程组而引入，它们的计算规则，以及利用它来解线性方程组的问题，读者应该熟记，这儿要讲的是n阶行列式，它为了解决n个未知量，n个一次（或线性）方程的方程组求解，希望与二、三元联立方程组有类似的结果，为此首先讲述排列的奇偶性。

定义1 由1,2，…，n组成的一个有序数组，称它为一个n级排列。

例如，1 3 2是一个三级排列，3 2 1 4，是一个四级排列，据乘法原理1，2，…，n的全排列有$n!=n(n-1)\cdots 2\cdot 1$个，也就是n级排列共有$n!$个，于是1，2，3组成的三级排列就有$3!=3\cdot 2\cdot 1=6$个，即1 2 3，2 3 1，3 1 2，3 2 1，2 1 3，1 3 2，而1，2，3，4组成的四级排列有$4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$个。

我们把按自然数的顺序所组成的排列$12\cdots n$，叫做自然排列，如123；1234；12345；分别是3级、4级、5级自然排列其它的3级、4级、5级排列都会破坏这种自然顺序。

定义 2　在一个排列中，如果有某一个较大的数排在某一个较小的数前面，那末，就称这两个数构成一个逆序，在一个排列里，所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数。

例如，132中，13，12分别不构成一个逆序，而32构成一个逆序，故132的逆序数等于1，简记为$\tau(132)=1$，又如3214中，32，31分别构成一个逆序，34不构成，21构成一个逆序，24不构成一个逆序，14也不构成一个逆序，故3214的逆序数等于3，或记为$\tau(3214)=3$。

读者注意，我们求排列的逆序数用的是逐个比较法，即从第1个与后面的都比较到，然后，第2个又与后面的比较，逐步地向后都比较到，而无遗漏，又不要重复，这种方法是方便的。

例如，$\tau(3214)=2+1+0=3$，

$\tau(451362)=3+3+0+1+1=8$。

定义 3　逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列。

例如，3214是奇排列，451362是偶排列。

又如，123，231，312都是偶排列，而321，213，132都是奇排列。

定义 4　对于一个排列，某两个数的位置互换，而其余的数不动，得到一个新的排列，这个过程称为对原来排列的一个对换。

例如，$132\xrightarrow{(3,\ 2)}123$即说132经（3，2）一次对换而得123。

$45321\xrightarrow{(4,\ 1)}15324\xrightarrow{(5,\ 2)}12354\xrightarrow{(5,\ 4)}12345$，即说45321经3次对换而得12345。

值得注意的是：$132 \xrightarrow{(3,\ 2)} 123$，恰是奇排列经过一次对换而变成偶排列，而$2431 \xrightarrow{(2,\ 3)} 3421$，就是偶排列经过一次对换而变成奇排列，因此有如下定理：

定理　对换改变排列的奇偶性

证明：i）首先看相邻j，k的对换，排列

$$\cdots\cdots j,\ k,\ \cdots\cdots, \qquad (9)$$

经过j，k对换而成

$$\cdots\cdots k,\ j,\ \cdots\cdots, \qquad (10)$$

这里"……"表示那些不动的数，显然在排列（9）中不动的数的逆序个数在（10）中也不变，在（9）中因为j，k相邻，j，k与其它的数若构成逆序，则在（10）中仍构成逆序；如不构成逆序，则在（10）中也不构成逆序，因为只有j，k发生变化，如果j，k原来无逆序，则（10）就因k，j而增加一个逆序，当j，k原来有逆序，则（10）就因k，j而减少一个逆序，就（9）的逆序数而言（10）或者增加1或者减少1，故排列（10）就改变了排列（9）奇偶性。

ii）设j，k不相邻的情形，排列

$$\cdots\cdots j,\ i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_s,\ k,\ \cdots\cdots \qquad (11)$$

经过j，k对换而成

$$\cdots\cdots k,\ i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_s,\ j,\ \cdots\cdots \qquad (12)$$

不难看出j，k的一次对换可由（11）的一系列相邻对换而得，也就是说，排列（11）先经过（j，i_1）对换，然后（j，i_2），…把j逐步向后移动，经过$s+1$次相邻对换，（11）变成

$$\cdots\cdots i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_s,\ k,\ j,\ \cdots\cdots \qquad (13)$$

再将（13）中k经（i_s，k），（i_{s-1}，k），…，逐步向前移

动s次相邻对换而得排列（12），这样（11）的j，k对换，相当于经过$2s+1$次相邻对换而得，因$2s+1$是奇数，由i）知每经一次相邻对换改变排列的奇偶性，那么经过奇数次相邻对换，当然也改变奇偶性，即（12）改变了（11）的奇偶性。

综合i），ii），即知对换改变排列的奇偶性，所以定理得证。

推论1　n级排列i_1，$i_2\cdots i_n$经t次对换而变成$123\cdots n$的自然排列，那么排列i_1，$i_2\cdots i_n$与t有相同的奇偶性，即

$$(-1)^t=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} \tag{14}$$

证：如$i_1i_2\cdots i_n$是偶排列，因$\tau(12\cdots n)=0$即$12\cdots n$是偶排列，由定理1，那么只能t等于偶数，同理$i_1i_2\cdots i_n$是奇排列，而$12\cdots n$是偶排列由定理1，那么只能t等于奇数

推论2　$n(n\geqslant 2)$个数码的排列，共有$n!$个，恰好一半是偶排列，一半是奇排列，即各是$\frac{1}{2}n!$个。

证：设有m个偶排列，k个奇排列，任取一个偶排列为$i_1i_2\cdots i_n$，只将第1，2个元素对换由此得$i_2i_1\cdots i_n$是奇排列，对每个偶排列都这样做，不同偶排列得到的奇排列一定不同，因为如果相同，还原过去也应相同，这与假设不同相矛盾，因此偶排列的个数不超过奇排列的个数，即$m\leqslant k$，同样方法可证$k\leqslant m$，故$m=k=\frac{1}{2}n!$

读者已看到123的全排列共奇偶各半。

三　n阶行列式的定义

由一我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{15}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (16)$$

这里元素a_{ij}(i, $j=1$, 2或i, $j=1,2,3$)表示i行，j列交叉处的元素(或数)，i和j分别叫做a_{ij}的行标和列标，如a_{13}的行标是1，列标是3，表示1行、3列交叉处的元素。

我们注意（16）式的三阶行列式（二阶行列式（15）也类似）

1° 一般项为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \qquad (17)$$

即它的每一项是由不同行、不同列的三元素的乘积，当行标排成自然排列123后，列标也是123的某种排列，用$j_1j_2j_3$表示。

2° 项(17)应带符号为$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$，即项（17）变为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \qquad (18)$$

从（16）式看出等号右端有6项，其列标恰是123的全排列，即123，231，312，321，213，132，当行标排成自然排列，而列标是偶排列123，231，312时，项前带正号，而列标是奇排列321，213，132时，项前带负号，于是一般项（17）应带$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$符号。

3° 将所有带符号的项（18）相加，就是三阶行列式的定义。

我们把（16）式简记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \quad (16)'$$

这里“$\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$”求和形式是将$j_1 j_2 j_3$取所有3级排列而得的各项相加

显然二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1, j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}. \quad (15)'$$

这里“$\sum\limits_{j_1 j_2}$”求和形式是将$j_1 j_2$取所有2级排列而得的各项相加。

由(15)′和(16)′我们引进n阶行列式的定义。

定义4　由n^2个数$a_{ij}(i,j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$排成如下形式（简记为D）

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (19)$$

把D叫做n阶行列式，它表示一个数，这里a_{ij}是第i行、j列交叉处的元素（或数）

1°　D的一般项为

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (20)$$

即取D中不同行、不同列的n个元素的乘积为项，当行标排成自然排列$12\cdots n$后，列标也是$12\cdots n$的某种排列，用

$j_1j_2\cdots j_n$表示。

2° 项（20）应带符号$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，这时项（20）变为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (21)$$

由项（21）看出，当$j_1j_2\cdots j_n$是偶排列时，项（20）应带正号，当$j_1j_2\cdots j_n$是奇排列时项（20）带负号。

3° 将所有带符号的项（21）相加，就是n阶行列式D所表示的数。

这样，由定义可知，我们可把n阶行列式（19）用式子表示为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (19)'$$

这里“$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$”求和形式是将$j_1$，$j_2\cdots j_n$取所有$n$级排列而得的各项（即共有$n!$项）相加，因此（19）′也可当$n$阶行列式的定义，它比用文字叙述要简明得多。

下面举例，用定义来计算特殊形状的行列式。

例3 计算对角形行列式