



数学(理)

SHU

XUE



丛书主编 李瑞坤

学法导航

高中新课标总复习(第2轮)

学生用书



首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS



XUEHAIDAOHANG

学海导航

数 学(理)



高中新课标总复习(第2轮)

学生用书

丛书主编 李瑞坤
编 者 李军民 高 松 江规华
曹齐平 曾介平 黄世钱
林世庆 缪向光 黄志勉
张帮荣 连仕光
本书策划 蒋美林

 首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

学海导航. 高中新课标总复习. 第2轮. 理科数学 / 李瑞坤
主编. —北京: 首都师范大学出版社, 2008.11
ISBN 978-7-81119-442-5

I. 学… II. 李… III. 数学课—高中—升学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 180246 号

学海导航·高中新课标总复习(第2轮)

数学(理)·学生用书

丛书主编 李瑞坤

责任编辑 张雁冰

装帧设计 张鹊红

责任校对 蒋美林

首都师范大学出版社出版发行

地 址 北京西三环北路 105 号

邮 编 100048

网 址 cnuph.com.cn

E-mail master@cnuph.com.cn

湘潭市风帆印务有限公司印刷

全国新华书店发行

版 次 2008 年 11 月第 1 版

印 次 2008 年 11 月第 1 次印刷

开 本 850 × 1168 毫米 1/16

印 张 13

字 数 374 千

定 价 27.00 元

版权所有 违者必究

如有质量问题 请与出版社联系退换



XUEHAIDAOHANG



前言

PREFACE

学习数学有三种境界,一是模仿层次,绝大部分学生属于这种境界;二是模式化层次,即理论、题型、方法的境界,大部分优秀学生属于这种境界;三是研究层次,即问题是对象,研究是手段,提高是目的,是一种无为而为的境界。

面对高考,我们至少应该提升到第二种境界——模式化层次。这就要求我们:首先,需熟练地掌握数学的基本理论,对数学的基础知识了如指掌;其次,要熟知数学的基本题型。高中数学的习题浩如烟海,但题型却极其有限。我们要学会归纳,善于总结高中数学的每一个知识单元的基本题型;再次,要体会数学的基本思想、基本方法以及每一种数学题型的基本解法。从“理论+题型+方法”的和谐统一的高度去学习数学,把握数学,便能举重若轻,事半功倍,游刃有余。

如果我们能够提升到第三种境界——研究的层次,也正是中学数学教育所极力追求的。这对于培养学生的思维品质、探索精神、创新精神,发展学生的综合能力都具有重要意义。此种境界要求我们学会理解、学会探索、学会选择。解决数学问题,首先就需要对问题进行理解。这种理解不是表面的、肤浅的,而是全方位、多角度、深刻的、灵活的,其实质就是对问题本质的洞察与把握,就是形成有利于问题解决的表征,这是解决问题的基础;其次要学会探索。所谓探索,就是对解题方法、解题途径的探究和摸索,这是解决问题的关键;再次,要学会选择。所谓选择就是对解题方法、解题途径、解题策略的抉择。另外,还要学会对解题过程的监察、控制、调节和管理,学会解题后的反思、优化与发展,这些对于数学解题都具有重要意义。

基于这样的教育思想、学习理念,我们倾心策划,编写了这本教辅用书。

《学海导航·高中新课标总复习(第2轮)·数学》为2009年高考第二轮复习专用。它与第一轮复习紧密衔接,在遵循2008年考试说明的前提下,根据教学的实际、高考的实际,以专题归类的形式把高中数学的主干知识从理论、题型、思想和方法的高度加以把握,同时关注高考重点、热点、难点和新课程的特点。通过“讲”“练”结合,提高复习的针对性和有效性。

本书按高中数学内容的内在联系,将高考重点内容分为十三个专题。每一个专题包含【考情探秘】、【热点聚焦】、【规律提炼】、【典型例题】和【随堂演练】五个栏目。

【考情探秘】对高考进行展望,趋势进行预测,动向进行说明。

【热点聚焦】以2009年高考命题为着眼点,对近年的高考试题在相关部分的题型、难易程度进行分析,归纳出本专题的热点、重点和难点。旨在帮助学生从整体上把握本专题的主要考查内容,消除备考死角。

【规律提炼】对本专题中渗透的数学思想,选用的解题方法及呈现的解题规律进行梳理、点拨,着重培养学生运用数学思想和方法解决综合问题的能力。

【典型例题】精选例题,突出解题方法、要领和答题技巧的指导。按一定的层级分梯度进行设计,层层推进,流畅自然。同时,从高考层面点评此题,即“特别关注”,意在对本题考查的知识点、思想方法及解题应突破的障碍加以剖析。同时从备考角度揭示规律、方法,拓展思维。

【随堂演练】分为“基础练习”和“能力提升”两部分。“基础练习”按“3(选择题)+2(填空题)”的形式,着重基础知识、基本技能和基本应用;“能力提升”以2个解答题的形式呈现,选题具有层次性和典型性,着重提高学生综合运用知识的能力。

另外,我们还精心命制了十六套限时训练卷,供学生课后巩固使用。以“5(选择题)+3(填空题)+2(解答题)”的形式,按40分钟时量配置基础、新颖的小型训练题。

最后,设计了两套综合测试卷,按高考试卷的命题形式,精心选题,可供师生作模拟试卷使用。

总之,只要我们学会理解、学会探索、学会选择,善于归纳、善于总结、善于优化,重视直观、重视抽象,细心计算,追求简易,复杂的问题简单做,简单的问题认真做,经典的问题反复做,既学会从实践提升到理论,更善于用理论去指导实践;既学会举轻若重,更学会举重若轻,我们就能不断地提升境界,超越梦想,奔向心中的象牙塔!诚祝莘莘学子高考大捷!

编者



XUEHAI DAOPANG

目录

CONTENTS

1 专题一 集合 常用逻辑用语 推理与证明

第1讲 集合	2
第2讲 常用逻辑用语	4
第3讲 推理与证明	7

9 专题二 函数 导数

第1讲 函数的图象与性质	10
第2讲 函数与方程	12
第3讲 函数与不等式	14
第4讲 导数	16
第5讲 函数与导数	18

21 专题三 平面向量

第1讲 平面向量的基本运算	22
第2讲 平面向量的简单应用	24

26 专题四 三角函数

第1讲 三角变换	27
第2讲 三角函数的图象与性质	29
第3讲 解三角形	31

33 专题五 不等式

第1讲 解不等式	35
第2讲 不等式的证明	37
第3讲 简单的线性规划问题	38

40 专题六 数列

第1讲 等差数列与等比数列	41
第2讲 数列的通项公式	43
第3讲 数列的综合问题——数列与不等式	45

47 专题七 立体几何

第1讲 平行与垂直	49
第2讲 面积与体积	51

第3讲 角、距离、空间向量	53
第4讲 立体几何的综合问题	55

57 专题八 解析几何

第1讲 直线与圆	59
第2讲 圆锥曲线与方程	61
第3讲 直线与圆锥曲线的位置关系	63
第4讲 轨迹方程的探求	65
第5讲 圆锥曲线的综合问题	67

69 专题九 计数原理 二项式定理

第1讲 两个计数原理、排列与组合	70
第2讲 二项式定理	72

73 专题十 概率与统计、随机变量的分布

第1讲 概率	74
第2讲 随机变量及其分布	76
第3讲 统计	78

80 专题十一 算法初步 复数

第1讲 算法初步	81
第2讲 复数	84

85 专题十二 客观题的基本解法

第1讲 选择题的基本解法	87
第2讲 填空题的基本解法	89

90 专题十三 应用问题、开放性问题、恒成立问题

第1讲 应用问题	92
第2讲 开放性问题	94
第3讲 恒成立问题	96

附:

限时训练一~限时训练十六	99~130
综合测试(一)	131
综合测试(二)	135
参考答案	139

专题一

集合 常用逻辑用语 推理与证明



考情探秘

从近几年的高考试题看,集合、常用逻辑用语、推理与证明三部分内容考查的主要方向为以下几个方面:

1. 集合的概念、运算及运算性质的应用;
2. 逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义,四种命题的关系及特称命题的判断与否定,充要条件的概念和判定;
3. 类比型问题;
4. 归纳、猜想、证明型问题;
5. 关于函数、不等式、方程、数列、三角等知识中的命题的证明问题.



热点聚焦

集合、常用逻辑用语、推理与证明三部分内容是高中数学的重要基础知识,是历年高考的必考内容.集合主要考查基本概念的认识和理解,以及作为工具,考查集合语言和集合的思想的运用,同时考查数形结合与分类讨论思想;常用逻辑用语主要考查命题的判断和推理,体现逻辑思维能力;推理与证明是新课标新增内容,但在以往的高考中已多年出现,主要考查利用合情推理去猜测和发现一些新的结论,探索和提供解决一些问题的思路和方向,并利用演绎推理去进行逻辑证明.

本专题知识的高考命题热点有以下几个方面:

1. 以函数、方程、三角、不等式等知识为载体,以集合的语言和符号为表现形式,考查学生对集合语言的理解、表达及运用能力.
2. 充分性或必要性的判断及充要性的证明.
3. 类比型问题常见的是二维问题与三维问题的类比、同结构问题的类比(比如圆锥曲线内的类比、数列内的类比问题等),考查学生运用合情推理去猜测和发现一些新的结论的能力.
4. 归纳、猜想、证明类型的问题以往高考是通过数列解答题来考查,近年也通过选择、填空题来考查归纳推理.在解答题中可同时考查合情推理与演绎推理.



规律提炼

1. 正确理解集合的三个特征,掌握描述法 $\{x|x \in P\}$ 中元素的识别及属性的理解;要发挥图示法(包括韦恩图、数轴、函数图象)的作用,通过数形结合直观地解决集合问题,形成良好的思维习惯.
2. 注意空集 $(\varnothing)$ 的特殊性,如 $A \subseteq B$,则有 $A = \varnothing$ 或 $A \neq \varnothing$ 两种可能,运用好分类讨论思想;熟练使用集合的运算性质: $\complement_U(A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$, $\complement_U(A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$,对问题进行化简.
3. 判断充分条件或必要条件就归结为判断命题的真假;证明充要性归结为证明原命题与逆命题同时成立.对于符号“ $\Rightarrow$ ”要熟悉它的各种同义词语:“等价于”,“当且仅当”,“必须并且只需”,“……,反之也真”等.
4. 立体几何中的类比问题主要关注二维事物到三维事物的对应性,并注意升维后的结构及常数变化,在其他知识中的类比注意分析两类事物的相似性与差异性;归纳推理经常出现在与自然数有关的等式或不等式中,一般给出或自己先写出前几项,然后根据规律进行猜想,得到结论后一般要再次验证.

第1讲 集合



典型例题

例1 (1) 设集合 $M = \{x | x - m \leq 0\}$, $N = \{y | y = 2^x - 1, x \in \mathbb{R}\}$, 若 $M \cap N = \emptyset$, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $[-1, +\infty)$ B. $(-1, +\infty)$
C. $(-\infty, -1]$ D. $(-\infty, -1)$

(2) 设 $f(n) = 2n + 1 (n \in \mathbb{N})$, $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Q = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, 记 $\hat{P} = \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in P\}$, $\hat{Q} = \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in Q\}$, 则 $(\hat{P} \cap \mathbb{N} \setminus \hat{Q}) \cup (\hat{Q} \cap \mathbb{N} \setminus \hat{P}) =$ _____.

例2 (1) 设 I 为全集, S_1, S_2, S_3 是 I 的三个非空子集, 且 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$, 则下面论断正确的是 ()

- A. $\mathbb{I} \setminus (S_1 \cap (S_2 \cup S_3)) = \emptyset$
B. $S_3 \subseteq (\mathbb{I} \setminus S_1) \cap (\mathbb{I} \setminus S_2)$
C. $\mathbb{I} \setminus S_1 \cap \mathbb{I} \setminus S_2 \cap \mathbb{I} \setminus S_3 = \emptyset$
D. $S_3 \subseteq (\mathbb{I} \setminus S_1) \cup (\mathbb{I} \setminus S_2)$

(2) 设函数 $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$, 集合 $M = \{x | f(x) < 0\}$, $P = \{x | f'(x) > 0\}$, 若 $M \subseteq P$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(0, 1)$
C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$



随堂演练

基础练习

一、选择题

1. (2007·全国卷I) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 集合 $\{1, a+b, a\} = \{0, \frac{b}{a}, b\}$, 则 $b-a =$ ()

- A. 1 B. -1
C. 2 D. -2

2. (2008·山东卷) 满足 $M \subseteq \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 且 $M \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2\}$ 的集合 M 的个数是 ()

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

3. 对于集合 M, N , 定义 $M - N = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin N\}$, $M \oplus N = (M - N) \cup (N - M)$, 设 $A = \{t | t = x^2 - 3x, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x | y = \lg(-x)\}$, 则 $A \oplus B =$ ()

- A. $(-\frac{9}{4}, 0]$

B. $[-\frac{9}{4}, 0)$

C. $(-\infty, -\frac{9}{4}) \cup [0, +\infty)$

D. $(-\infty, -\frac{9}{4}] \cup (0, +\infty)$

二、填空题

4. 如右图, 设 I 是全集, 非空集合 P, Q 满足 $P \subsetneq Q \subsetneq I$, 若含 P, Q 的一个集合运算表达式, 使运算结果为空集 $\emptyset$, 则这个运算表达式可以是 _____ (只要求写出一个表达式).



5. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - ax + a - 1 = 0\}$, 且 $A \cup B = A$, 则 a 的值为 _____.

能力提升

三、解答题

6. 设 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = ax^2 - 2x - 2a$. 若 $f(x) > 0$ 的解集为 A , $B = \{x | 1 < x < 3\}$, $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, d 为公差, 且 $d \neq 0$, a_1 和 d 均为实数, 它的前 n 项和记作 S_n . 设集合 $A =$

$$\{(a_n, \frac{S_n}{n}) | n \in \mathbf{N}^+\}, B = \{(x, y) | \frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1, x, y \in \mathbf{R}\}.$$

试问下列结论是否正确. 如果正确, 请给予证明; 如果不正确, 请举例说明.

- (1) 若以集合 A 中的元素作为点的坐标, 则这些点都在同一条直线上;
- (2) $A \cap B$ 至多有一个元素;
- (3) 当 $a_1 \neq 0$ 时, 一定有 $A \cap B \neq \emptyset$.



第2讲 常用逻辑用语



典型例题

例1 在 $\triangle ABC$ 中,“ $A < B$ ”是“ $\sin A < \sin B$ ”的什么条件?

例2 已知命题 $p: |1 - \frac{x-1}{3}| \leq 2, q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$, 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件, 求实数 m 的取值范围.



随堂演练

基础练习

一、选择题

1. 下列特称命题中真命题的个数是 ()

- ① 存在 $x \in \mathbf{R}$, 使得 $x \leq 0$;
 ② 至少有一个整数, 它既不是合数, 也不是素数;
 ③ 存在 $x \in \{x | x \text{ 是无理数} \}$, x^2 也是无理数.

- A. 0 B. 1
 C. 2 D. 3

2. 设 $p: x^2 - x - 20 > 0$, $q: \frac{1-x^2}{|x|-2} < 0$, 则 p 是 q 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. (2008 · 佛山一模) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = d$ (d 为正常数, $n \in \mathbf{N}^+$), 则称 $\{a_n\}$ 为“等方差数列”. 甲: 数列 $\{a_n\}$ 是等方差数列; 乙: 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则 ()

- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
 B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
 C. 甲是乙的充要条件
 D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

二、填空题

4. 下列四个命题中, 真命题的序号有 _____ (写出所有真命题的序号).

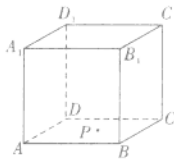
- ① 将函数 $y = |x+1|$ 的图象按向量 $v = (-1, 0)$ 平移, 得到的图象对应的函数表达式为 $y = |x|$;

- ② 圆 $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ 与直线 $y = \frac{1}{2}x$ 相交, 所得弦长为 2;

- ③ 若 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$, $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, 则 $\tan \alpha \cot \beta = 5$;

- ④ 如图, 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, P 为底面 $ABCD$ 内

一动点, 若 P 到平面 AA_1D_1D 的距离与到直线 CC_1 的距离相等, 则 P 点的轨迹是抛物线的一部分.



5. 已知圆 $M: (x + \cos \theta)^2 + (y - \sin \theta)^2 = 1$, 直线 $l: y = kx$, 有下面四个命题:

- A. 对任意实数 k 与 θ , 直线 l 和圆 M 相切;
 B. 对任意实数 k 与 θ , 直线 l 和圆 M 有公共点;
 C. 对任意实数 θ , 必存在实数 k , 使得直线 l 与圆 M 相切;
 D. 对任意实数 k , 必存在实数 θ , 使得直线 l 与圆 M 相切

其中真命题的代号是 _____ (写出所有真命题的代号).

能力提升

三、解答题

6. 已知关于 x 的实系数二次方程 $x^2 + ax + b = 0$ 有两个实数根 α, β , 证明: “ $|\alpha| < 2$ 且 $|\beta| < 2$ ” 是 “ $2|a| < 4 + b$ 且 $|b| < 4$ ” 的充要条件.



7. 已知数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 满足: $b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + 3 + \cdots + n}$, 求证:

数列 $\{a_n\}$ 是等差数列的充要条件是数列 $\{b_n\}$ 也是等差数列.

第3讲 推理与证明



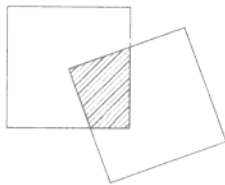
典型例题

例1 (1) (2008·深圳调研) 下图(1)、(2)、(3)、(4)分别包含1个、5个、13个、25个第二十九届北京奥运会吉祥物“福娃迎迎”，按同样的方式构造图形，设第 n 个图形包含 $f(n)$ 个“福娃迎迎”，则 $f(5) = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $f(n) - f(n-1) = \underline{\hspace{2cm}}$ (答案用数字或 n 的解析式表示)。



(2) 若 $f(n)$ 为 $n^2 + 1$ ($n \in \mathbb{N}^+$) 的各位数字之和，如： $14^2 + 1 = 197$ ， $1 + 9 + 7 = 17$ ，则 $f(14) = 17$ ；记 $f_1(n) = f(n)$ ， $f_2(n) = f(f_1(n))$ ， $\dots$ ， $f_k(n) = f(f_{k-1}(n))$ ， $k \in \mathbb{N}^+$ ，则 $f_{2008}(8) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

例2 (1) (2008·深圳二模) 现有一个关于平面图形的命题：如图，同一个平面内有两个边长都是 a 的正方形，其中一个的某顶点在另一个的中心，则这两个正方形重叠部分的面积恒



为 $\frac{a^2}{4}$ 。类比到空间，有两个棱长均为 a 的正方体，其中一个的某顶点在另一个的中心，则这两个正方体重叠部分的体积恒为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 数列 $\{a_n\}$ 是正项等差数列，若 $b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$ ，则数列 $\{b_n\}$ 也为等差数列。类比上述结论，写出正项等比数列 $\{c_n\}$ ，若 $d_n = \underline{\hspace{2cm}}$ ，则数列 $\{d_n\}$ 也为等比数列。

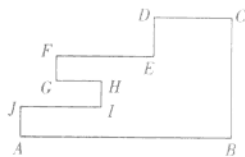


随堂演练

基础练习

一、选择题

1. (2008·深圳二模) 一个质点从 A 出发依次沿图中线段到达 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H 、 I 、 J 各点，最后又回到 A (如图所示)，其中 AB



$\perp BC$ ， $AB \parallel CD \parallel EF \parallel GH \parallel IJ$ ， $BC \parallel DE \parallel FG \parallel HI \parallel JA$ ，欲知此质点所走的路程，至少需要测量 n 条线段的长度，则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ ()

- A. 2 B. 3
C. 4 D. 5

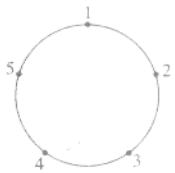
2. (2008·梅州一模) 设集合 $\Omega = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ ，规定：
(1) $0 = (0, 0)$ ；当且仅当 $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ 时， $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ，在 Ω 上定义运算“ $\otimes$ ”： $(x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2, \lambda x, \lambda y)$ ，设 $a, b, c \in \Omega$ ，有下列四个命题：

- ① $a \otimes b = b \otimes a$ ；
② $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ ；
③ 若 $a \otimes b = 0$ ，则 a, b 中至少有一个为 0 ；
④ 若 $a \neq 0, a \otimes b = a \otimes c$ ，则 $b = c$ 。

其中真命题的个数为 ()

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

3. (2008·深圳二模) 如图，圆周上按顺时针方向标有1, 2, 3, 4, 5五个点，一只青蛙按顺时针方向绕圆从一个点跳到另一点，若它停在奇数点上，则下一次只能跳一个点；若停在偶数点上，则跳两个点，该青蛙从5这点跳起，经2008次跳后它将停在的点是 ()



- A. 1
C. 3
- B. 2
D. 4

二、填空题

4. (2008·佛山二模) 对大于或等于2的自然数 m 的 n 次方幂有如下分解方式:

$$2^2 = 1 + 3 \quad 3^2 = 1 + 3 + 5 \quad 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$$

$$2^3 = 3 + 5 \quad 3^3 = 7 + 9 + 11 \quad 4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$$

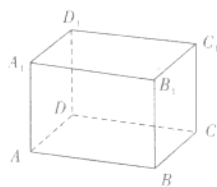
根据上述分解规律, 则 $5^2 =$ _____; 若 $m^2 (m \in \mathbb{N}^+)$ 的分解中最小的数是21, 则 m 的值为_____.

5. 已知命题: 平面上矩形

$ABCD$ 的对角线 AC 与边 AB 和 AD 所成的角分别为 α, β , 则 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$. 若

把它推广到空间长方体中(如图, 长方体 $ABCD -$

$A_1B_1C_1D_1$), 试写出相应的命题形式: _____



能力提升

三、解答题

6. 有 A, B, C 三个盒子, 其中一个内放有一个苹果, 在三个盒子上各有一张纸条, A 盒子上的纸条写的是“苹果在此盒内”, B 盒子上的纸条写的是“苹果不在此盒内”, C 盒子上的纸条写的是“苹果不在 A 盒内”. 如果三张纸条中只有一张写的是真的, 请问苹果究竟在哪个盒子里?

7. 已知: $\sin^2 30^\circ + \sin^2 90^\circ + \sin^2 150^\circ = \frac{3}{2}$;

$$\sin^2 5^\circ + \sin^2 65^\circ + \sin^2 125^\circ = \frac{3}{2}.$$

通过观察上述两等式的规律, 请你写出一般性的命题:

$$\text{_____} = \frac{3}{2}. \quad (*)$$

并给出 $(*)$ 式的证明.

专题二

函数 导数



考情探秘

函数是高中数学的核心内容,是数学的基本工具之一,函数的观点、知识、思想和方法和中学数学的各个分支有着密切的联系,是高考数学的必考内容之一.

从近年来的高考试题看,函数问题考查的主要方向为以下几个方面:

从知识上主要考查:

1. 函数的概念、图象与性质的讨论问题;
2. 函数与方程问题;
3. 函数与不等式问题;
4. 函数与数列问题;
5. 函数的其他综合问题、应用问题,特别是函数与导数、不等式、方程等的综合问题.

从思想方法、能力上主要考查:

数形结合、转化与化归、函数与方程、分类讨论等思想方法,以及想象能力、抽象概括能力、推理论证能力、运算求解能力、数据处理能力以及应用意识和创新意识.



热点聚焦

函数是高考数学的重点、热点内容之一,在近年来的高考试卷中,选择题、填空题、解答题三种题型中每年都有函数试题,而且常考常新,以基本函数为背景的综合题和应用题是高考命题的新趋势.

本专题知识的高考命题热点有以下几个方面:

1. 函数的表示法,函数的图象、定义域、值域、最大值与最小值,单调性、奇偶性、对称性、周期性等基本性质;
2. 与函数相关的含参数问题;
3. 函数与导数、方程、不等式、数列、向量等结合的有关综合问题是高考的热点之一.
4. 考查运用函数的思想来观察问题、分析问题和解决问题的能力,渗透数形结合、分类讨论、转化与化归等基本数学思想.



规律提炼

1. 深刻理解函数及与其相关的概念,理解、洞察并把握问题的本质.一方面,一切从定义出发,数形结合,抽象问题形象化是解决函数基本性质问题的基础;另一方面,善于灵活地换元、转化与化归,复杂问题简单化是解决函数基本性质问题的关键.

2. 几类问题的基本解法:

函数与方程问题——对应函数图象法;

函数与不等式问题——对应函数图象法;

函数与数列问题——化归法:把函数问题转化为数列问题.

3. 加强与各章知识的横向联系.所谓函数思想,实质上是将问题放到动态背景上去考虑,利用函数观点可以从较高的角度处理方程、不等式、数列、曲线等问题.



第1讲 函数的图象与性质



典型例题

例1 设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 3 为周期的奇函数, 若 $f(1) > 1, f(2) = \frac{3a-4}{a+1}$, 则 a 的取值范围是, ()

- A. $(-\infty, \frac{3}{4})$
B. $(-\infty, -1) \cup (-1, \frac{3}{4})$
C. $(-\infty, -1) \cup (\frac{3}{4}, +\infty)$
D. $(-1, \frac{3}{4})$

例2 已知函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上有定义, $f(\frac{1}{2}) = -1$, 当且仅当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < 0$, 且对任意 $x, y \in (-1, 1)$, 都有 $f(x) + f(y) = f(\frac{x+y}{1+xy})$. 试证明:

- (1) $f(x)$ 为奇函数;
(2) $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减.



随堂演练

基础练习

一、选择题

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & (x \leq 1) \\ x^2+x-2 & (x > 1) \end{cases}$, 则 $f[\frac{1}{f(2)}]$ 的值为 ()

- A. $\frac{15}{16}$ B. $-\frac{27}{16}$
C. $\frac{8}{9}$ D. 18

2. 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 4x + 31)$ 的值域为 ()

- A. $[3, +\infty)$ B. $(-\infty, -3]$
C. $[8, +\infty)$ D. $\mathbf{R}$

3. 设函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 为奇函数, $f(1) = \frac{1}{2}, f(x+2) = f(x) + f(2)$, 则 $f(5) =$ ()

- A. 0 B. 1
C. $\frac{5}{2}$ D. 5

二、填空题

4. 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 2x)$ 的单调递增区间是_____.

5. (2008 · 湖南卷) 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3-ax}}{a-1} (a \neq 1)$.

- (1) 若 $a > 1$, 则 $f(x)$ 的定义域是_____;
(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上是减函数, 则实数 a 的取值范围是_____.

能力提升

三、解答题

6. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x \cdot \tan \theta - 1, x \in [-1, \sqrt{3}]$, 其中 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.



(1) 当 $\theta = -\frac{\pi}{6}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值与最小值;

(2) 求 θ 的取值范围, 使 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, \sqrt{3}]$ 上是单调函数.

7. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2, 且 $x \in$

$$(0, 1) \text{ 时, } f(x) = \frac{2^x}{4^x + 1}.$$

(1) 求 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的解析式;

(2) 判断 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的单调性, 并给予证明.

第2讲 函数与方程



典型例题

例1 (2007·广东卷) 已知 a 是实数, 函数 $f(x) = 2ax^2 + 2x - 3 - a$. 如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有零点, 求 a 的取值范围.

例2 已知关于 x 的方程 $(x^2 - 1)^2 - |x^2 - 1| + k = 0$, 给出下列四个命题:

- ① 存在实数 k , 使得方程恰有 2 个不同的实根;
- ② 存在实数 k , 使得方程恰有 4 个不同的实根;
- ③ 存在实数 k , 使得方程恰有 5 个不同的实根;
- ④ 存在实数 k , 使得方程恰有 8 个不同的实根.

其中假命题的个数是 ()

- A. 0 B. 1
C. 2 D. 3



随堂演练

基础练习

一、选择题

1. (2008·辽宁卷) 设 $f(x)$ 是连续的偶函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 是单调函数, 则满足 $f(x) = f(\frac{x+3}{x+4})$ 的所有 x 之和为 ()

- A. -3 B. 3
C. -8 D. 8

2. 若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 3 为周期的偶函数, 且 $f(2)$

$= 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 6)$ 内解的个数的最小值是 ()

- A. 5 B. 4
C. 3 D. 2

3. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: $f(x) \cdot f(x+2) = 13$, $f(1) = 2$, 则 $f(99) =$ ()

- A. 13 B. 2
C. $\frac{13}{2}$ D. $\frac{2}{13}$

二、填空题

4. (2008·广东卷) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的方程 $x^2 + x + |a| - \frac{1}{4}|a| = 0$ 有实根, 则 a 的取值范围是_____.

5. (2008·湖北卷) 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x + a$, $f(bx) = 9x^2 - 6x + 2$, 其中 $x \in \mathbf{R}$, a, b 为常数, 则方程 $f(ax+b) = 0$ 的解集为_____.

能力提升

三、解答题

6. 已知二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为 a , 且不等式 $f(x) > -2x$ 的解集为 $(1, 3)$.

(1) 若方程 $f(x) + 6a = 0$ 有两个相等的根, 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $f(x)$ 的最大值为正数, 求 a 的取值范围.