"十一·五"高等职业教育规划系列教材

高等数学

总主编：陈登斌　主编：成强　许应龙　卢信

西北工业大学出版社

GAOZHI GAOZHUAN
SHIYI WU GUIHUA JIAOCAI

高等数学

主编　成　强　许应龙　卢　信

西北工業大學出版社

【内容简介】本书是为适应高等职业教育的发展，结合了编者几十年教学实践，以降低高等数学理论难点，侧重数学知识应用能力的培养为编写此书的出发点。全书共分为：微积分、线性代数及数学软件介绍等三个部分。本书可作为高职高专各专业高等数学课程教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/成强，许应龙主编．—西安：西北工业大学出版社，2007.9
ISBN 978-7-5612-2299-7

Ⅰ．高…　Ⅱ．①成…②许…　Ⅲ．高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 140887 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　邮编 710072
电　　话：(029)88493844　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：长沙三仁包装有限公司
开　　本：787 mm×1092 mm　1/16
印　　张：12.25
字　　数：292 千字
版　　次：2007 年 9 月第 1 版　2007 年 9 月第 1 次印刷
定　　价：25.00 元

出版说明

为了更好地贯彻《中共中央国务院关于深化教育改革 全面推进素质教育的决定》精神，全面落实《高职高专教育专业人才培养及规格》中提出的职业教育课程改革和教材建设规划，我们组织湖南信息科学职业学院部分老师对实现高等职业教育培养目标、保障重点专业建设主干课的教材进行了规划和编写。从2007年秋季开始，这套“十一·五”职业规划教材将陆续出版，供广大高等职业学校使用。

“十一·五”职业规划教材是面向高等职业教育的规范性教材，严格按照国家教育部最新颁发教学大纲编写，并通过了专家的审定。本套教材深入贯彻了素质教育的理念，突出了高等职业教育的特点，注重对学生的创新能力和实践能力的培养。在内容编排、例题组织和图示说明等方面努力做出创新亮点，无论是在内容和形式方面还是在风格方面都有相应的变化，力求避免出现教师不讲、学生不懂的情况。在坚持理论性与系统性紧密结合的同时，还突出了针对性和实用性。在满足不同学制、不同专业以及不同办学条件、教学需求的同时，实现教学效果的最优化。

本书是集体努力的结晶，先后有多名湖南信息科学职业学院的老师参与编写，还有很多提出中肯建议的教师与学生，在此一并表示深深的谢意。

由于编者水平有限，书中难免有错误和不当之处，恳请广大教师与学生批评指正。

前　言

《高等数学》教材是根据《高职高专教育专业人才培养目标及规格》编写的，是高职高专院校各专业类别通用教材，可作为专科学校、职业成人教育学院教材或教学参考书。本教材教学时数约90学时。

全书共分三部分，第一部分微积分，介绍了函数、极限、导数、积分等基本概念及基本计算方法；第二部分线性代数，围绕线性方程组的求解问题介绍了行列式、矩阵、n维向量及方程组的求解等知识；第三部分 Mathematica 软件简介，重点介绍了本书中的数学运算在计算机上怎样来实现。本书主要特点：

(1)充分考虑到高职高专院校教学强调实用性、应用性的特点，淡化原有高等数学中的抽象性与理论性，强化了数学知识的实用性。比如说函数的连续性、微分等问题在书中只是一笔带过，对导数与积分的应用则加大了篇幅等。

(2)结合编者20多年的教学经验，对书中重点内容、方法以及解题技巧进行了归纳，既方便了教师教学，又有利于学生掌握重点。

(3)第三部分对于本书中涉及的数学运算，如何在计算机中实现进行了阐述，增强了实用性。

(4)每节配备的作业量适中，作业题的选择针对性强，突出了本书能力要求的重点，力求做到面面俱到。

本教材的编写工作除两位主编外，湖南信息科学职业学院霍徐强、周顺美、常安城、李旋、朱国华等老师参加了相关章节的编写工作。由于成书仓促，不足之处在所难免，欢迎专家与广大师生批评与指正。

编　者

2007年8月

目 录

第一部分 微积分

第二部分 线性代数

第三部分 Mathematica 软件简介

第一部分　微积分

第一章 函 数

§1.1 函数的概念及其特性

一、函数的概念

1. 常量与变量

通常，在自然现象或科学试验等过程中，经常会遇到两种不同的量：一种量在某一变化过程中始终保持不变，这种量叫常量；另一种量在某一变化过程中可以取不同的值，这种量叫变量. 通常用字母 a，b，c，…表示常量，用字母 x，y，z，t，…表示变量.

值得注意的是常量和变量并不是绝对的，在不同的变化过程中，常量和变量可以相互转化.

2. 区间

称集合$\{x: a\leqslant x\leqslant b, a<b\}$的所有点为闭区间$[a, b]$；

称集合$\{x: a<x<b, a<b\}$的所有点为开区间(a, b)；

称集合$\{x: a\leqslant x<b, a<b\}$的所有点为半开半闭区间$[a, b)$；

称集合$\{x: a<x\leqslant b, a<b\}$的所有点为半开半闭区间$(a, b]$；

以上四个区间统称为有限区间，$b-a$ 叫区间长度.

把下面五个区间称为无限区间：

$(-\infty, +\infty)$表示全体实数；

$(-\infty, b)$表示集合$\{x: -\infty<x<b\}$；

$(-\infty, b]$表示集合$\{x: -\infty<x\leqslant b\}$；

$(a, +\infty)$表示集合$\{x: a<x<+\infty\}$；

$[a, +\infty)$表示集合$\{x: a\leqslant x<+\infty\}$.

3. 邻域

称点集$\{x: a-\delta<x<a+\delta\}$为 a 的 δ 邻域(其中 a 为常数，$\delta>0$)，记为 $U(a, \delta)$，a 叫邻域中心，δ 叫邻域半径；

称点集$\{x: a-\delta<x<a\cup a<x<a+\delta\}$为 a 的 δ 空心邻域(其中 a 为常数，$\delta>0$)，记为 $\mathring{U}(a, \delta)$.

邻域这个概念在本课程的学习中将经常用到.

4. 函数的概念

定义 1.1 设有两个量 x、y，D 是一个给定的非空集合，如果存在一个法则 f，使得对于每一个 $x\in D$，量 y 都有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$，$x\in D$.

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，集合 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域，记为 D_f.

x 取 $x_0\in D_f$ 时，与 x_0 对应的 y 的值称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或

$y|_{x=x_0}$，函数值组成的集合称为函数的值域，记为 Z_f.

(1)函数的两要素．函数由它的定义域和对应法则唯一确定，即函数的两要素是函数的定义域和对应法则. 这是我们判定两个函数是否为同一函数的依据.

例 1.1 判定下列各组函数是否为同一函数.

(1) $y=\lg x^2$，$y=2\lg x$

(2) $y=\lg x^3$，$y=3\lg x$

解 (1)不是同一函数．因为前者的定义域为 $x\neq 0$，后者的定义域是 $x>0$.

(2)是同一函数．因为定义域和对应法则均相同．

函数的定义域是指使函数有意义的点的集合. 对于一个用解析式表示的函数，它的定义域一般指使解析式有意义的实数的全体，求定义域时应注意下面几个问题：

(i)分母不能为 0；

(ii)负数不能开偶次方；

(iii)零和负数没有对数，即对数的真数大于 0；底数大于 0 不等于 1；

(iv)反正弦、反余弦函数的定义域为 $[-1, +1]$；

(v)代数和的情况下取各式定义域的交集；

(vi)实际问题的定义域依具体问题的意义而定．

(2)函数的表示法．函数常有的表示法有解析法、图像法、表格法等，在高等数学里应用最为广泛的是解析法.

(3)分段函数．在自变量的不同取值范围内，需要用不同的解析式来表示的函数叫分段函数.

注意：分段函数是一个函数. 如符号函数

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\0 & x=0\\-1 & x<0\end{cases}$$

它是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 的一个分段函数(见图1-1).

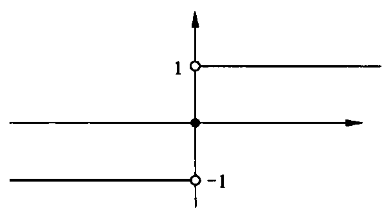

图 1-1

又如狄里克莱函数：$D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数}\\0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$

也是一个定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的分段函数(这个函数在高等数学里具有特殊的地位，有着很多的特殊性质).

对于分段函数我们应当注意下面几个问题：

(i)分段函数的定义域是各解析式定义区间的并集；

(ii)分段函数的求值应先判定它的所属范围，然后代入相应的表达式来求；

(iii)分段函数的作图：由于分段函数是一个函数，所以它的图形必须在同一坐标系中.

二、函数的四种特性

1. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称，如果对任意的 $x\in D_f$，恒有 $f(-x)=-f(x)$ (或 $f(-x)=f(x)$)，则称 $f(x)$ 为奇(或偶)函数.

特别要注意：D_f 关于原点对称是奇偶函数的必要条件. 如 $y=x^2$ 是偶函数，但 $y=x^2$，

$x\in(0,+\infty)$就是非奇非偶函数.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

2. 函数的周期性

设函数的定义域为 D_f，如果存在一个常数 $T\neq 0$，使得对任意的 $x\in D_f$，有 $x\pm T\in D_f$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$为周期函数，T 称为$f(x)$的周期. 通常我们所说的周期是最小正周期.

例如：$y=\sin x$，$y=\cos x$ 的周期 2π；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 的周期 π.

关于周期函数我们有如下定理：

定理 1.1　若$f(x)$的周期为 T，则$f(wx+\varphi)$一定是周期函数(其中 w，φ 为常数，$w\neq 0$)且周期为$\dfrac{T}{|w|}$.

值得注意的是：并不是所有的周期函数都有最小正周期，如狄里克莱函数，显然任何一个有理数都是它的周期，当然没有最小正有理数，也就没有最小正周期.

3. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义，如果对于区间 I 内的任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数$f(x)$在区间 I 上是单调增加的(或单调减少的). 定义域内单调增加(减少)的函数又称单调递增(递减)函数，统称为单调函数.

例如：函数 $y=x^2$ 在$[0,+\infty)$单调增加，在$(-\infty,0]$单调减少，而在$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数，可以看出函数的单调性与它所在的区间密切相关.

单调增加函数的图像是随着自变量的增加而上升；

单调减少函数的图像是随着自变量的增加而减少.

4. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义，如果存在正常数 M，使得对于区间 I 内的所有的 x 恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在区间 I 上有界，如果这样的 M 不存在，则称函数$f(x)$在区间 I 上无界. 简单地说，定义区间上即有上界，又有下界的函数一定是有界函数.

例如，$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界，因为$|\sin x|\leqslant 1$；又如，$y=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上无界，但它在$(1,2)$上有界.

由此可见，函数的有界性与它所讨论的区间密切相关.

注意：函数性质——奇偶性和周期性是整个定义域中的性质；而函数的单调性和有界性则是在某个区间上的性质.

习题 1.1

1. 判定下列各组函数是否为同一函数，并说明理由.

(1)$f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，$g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$

(2)$f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$

(3)$f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$

(4) $f(x)=1$，$g(x)=\tan x\cdot\cot x$

2. 填空.

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是奇函数，则 a，b 的关系为______.

(2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 的定义域为______.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{25-x^2}+\dfrac{1}{x-1}$

(2) $y=\ln(2-x)+\sqrt{x+2}$

(3) $y=\arccos\dfrac{x+1}{3}$

4. 判定下列函数的奇偶性.

(1) $y=\dfrac{x\cdot\sin x}{x^2+1}$

(2) $y=\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}$

(3) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

(4) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x>0\\ e^x, & -1<x\leqslant 0\\ 3-x, & x\leqslant 1\end{cases}$，求：

(1) $f(x)$ 的定义域；

(2) $f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$，$f(-2)$.

§1.2 初等函数

一、反函数

在中学物理学里我们学过自由落体运动的物体下落高度的公式 $h=\dfrac{1}{2}gt^2\ (t\geqslant 0)$，已知时间 t 的值就可以求出它的下落高度，有时我们会求相反的问题，已知下落高度，求所需时间. 这时我们只须将公式变形为 $t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$，问题就解决了. 在数学上引入了反函数的概念.

设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上一个函数，其值域为 Z_f，如果对每一个 $y\in Z_f$，都有确定的 $x\in D$ 且满足 $y=f(x)$ 的数值与之对应. 其对应法则记为：$f^{-1}(y)$，则定义在 Z_f 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数.

[注] (1) 反函数存在条件(充分条件)：函数一一对应，反函数一定存在.

(2) 如何求反函数.

1) 判定是否为一一对应函数；

2）求 x;

3）交换 x, y.

(3)特点：$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 图像关于 $y=x$ 对称.

例 1.2 求下列函数的反函数(不求定义域).

(1) $y=1+\lg(x+2)$ (2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{4}$

解 (1) $\lg(x+2)=y-1$

$x+2=10^{y-1}$

所以 $$x=10^{y-1}-2$$

(2) $\sin y=\dfrac{x-1}{4}$

所以 $$x=1+4\sin y$$

二、基本初等函数

(1)常量函数：$y=C$(C 为常量).

(2)幂函数：$y=x^{u}$(u 为实数)，它的定义域随着 u 的不同而变化.

(3)指数函数：$y=a^{x}(a>0, a\neq 1)$，它的性质与 a 的取值有关，例如当 $a>1$ 时，$y=a^{x}$ 是单调增加的，而当 $0<a<1$ 时，$y=a^{x}$ 是单调减少的.

(4)对数函数：$y=\log_{a}x(a>0, a\neq 1)$，它的性质与 a 的取值有关，对数函数与指数函数互为反函数.

(5)三角函数：$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$, $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

(6)反三角函数：

(i) $y=\arcsin x$, $x\in[-1,1]$, $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$;

(ii) $y=\arccos x$, $x\in[-1,1]$, $y\in[0,\pi]$;

(iii) $y=\arctan x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$;

(iv) $y=\operatorname{arccot} x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in(0,\pi)$.

以上六类函数统称为基本初等函数.

三、复合函数

定义 1.2 设 y 是 u 的函数，$y=f(u)$，$u\in D$，u 又是 x 的函数，$u=\varphi(x)$，$u\in Z_{\varphi}$，如果 $D\cap Z_{\varphi}\neq\varnothing$，则 y 通过 u 也成为 x 的函数，称为由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为中间变量.

从上述定义可以看出，并不是任意两个函数都能复合成一个函数，复合的条件为：$D\cap Z_{\varphi}\neq\varnothing$.

例 1.3 $y=\arcsin u$, $u=3+x^{2}$ 是否能复合成一个函数?

解 不能.

例 1.4 问函数 $y=e^{x^{2}}$ 是由哪些较简单的函数复合而成的?

解 是由 $y=\mathrm{e}^{u}$, $u=x^{2}$ 复合而成.

把一个较复杂的函数分解成几个较简单的函数，这在今后的许多运算中经常用到，那么怎样将复合函数进行分解呢？

例 1.5 分解复合函数 $y=\ln\cos\sqrt{x}$.

解

计算过程 ↓		复合过程 ↑
	$v=\sqrt{x}$	
	$u=\cos v$	
	$y=\ln u$	

由此可知：复合过程与计算过程正好相反.

四、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合步骤所构成，并且可用一个式子表示的函数称为初等函数.

例如：$y=\sqrt{1-\cos x}$, $y=\ln(x+\sqrt{x^{2}-1})$ 等都是初等函数.

但分段函数一般不是初等函数.

下面简单介绍一下工程技术中常用的一组函数.

(1) 双曲正弦 $\sinh x=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$

(2) 双曲余弦 $\cosh x=\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}$

(3) 双曲正切 $\tanh x=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$

(4) 双曲余切 $\coth x=\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}$

容易证明它们有下面一些恒等式.

(1) $\cosh^{2}x-\sinh^{2}x=1$

(2) $\sinh(x\pm y)=\sinh x\cdot\cosh y\pm\cosh x\cdot\sinh y$

(3) $\cosh(x\pm y)=\cosh x\cdot\cosh y\pm\sinh x\cdot\sinh y$

(4) $\cosh 2x=\cosh^{2}x+\sinh^{2}x$

(5) $\sinh 2x=2\sinh x\cdot\cosh x$