2010年全国硕士研究生入学考试辅导丛书

2010年

全国硕士研究生入学考试历年真题精解

2010nian quanguo shuoshiyanjiusheng ruxuekaoshi linian zhenti jingjie

新大纲
XINDAGANG

数学（二）

童 武 王德军 王 欢◎编著

Shuxue

- 由多次参加考研命题及阅卷的专家亲自编写，内容系统、权威
- 深入剖析历年试题精华，明示命题原则与规律，把握命题脉搏
- 紧密联系最新大纲，反映最新出题动态，详解解题思路，拓展内在联系
- 荟萃专家智慧，启迪备考，提高考生综合应试能力

北京科学技术出版社

2010年全国硕士研究生入学考试辅导丛书

2010年全国硕士研究生入学考试

历年真题精解

数学（二）

童 武　王德军　王 欢　编著

- 由多次参加考研命题及阅卷的专家亲自编写，内容系统、权威
- 深入剖析历年试题精华，明示命题原则与规律，把握命题脉搏
- 紧密联系最新大纲，反映最新出题动态，详解解题思路，拓展内在联系
- 荟萃专家智慧，启迪备考，提高考生综合应试能力

北京科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

2010年全国硕士研究生入学考试历年真题精解.数学.(二)/童武,王德军,王欢编著.
—北京:北京科学技术出版社,2009.5

(2010年全国硕士研究生入学考试辅导丛书)

ISBN 978-7-5304-4160-2

Ⅰ.2… Ⅱ.①童…②王…③王… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—
解题 Ⅳ.G643-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第063393号

2010年全国硕士研究生入学考试历年真题精解·数学(二)

作　　者:童 武　王德军　王 欢
责任编辑:朱 琳　李 媛
责任印制:张 良
封面设计:清水设计工作室
出 版 人:张敬德
出版发行:北京科学技术出版社
社　　址:北京西直门南大街16号
邮政编码:100035
电话传真:0086-10-66161951(总编室)
0086-10-66113227(发行部)　0086-10-66161952(发行部传真)
电子信箱:bjkjpress@163.com
网　　址:www.bkjpress.com
经　　销:新华书店
印　　刷:保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
字　　数:268千
印　　张:10.75
版　　次:2009年5月第1版
印　　次:2009年5月第1次印刷
ISBN 978-7-5304-4160-2/G·834

定　价:18.00元

京科版图书,版权所有,侵权必究。
京科版图书,印装差错,负责退换。

前　言

为了指导参加 2010 年全国硕士研究生入学统一考试的广大考生数学考试的复习，根据最新考试大纲的要求，我们组织部分多年来参加考试大纲制订和修订工作及参加考前辅导的教授、专家编写了这本《2010 年全国硕士研究生入学统一考试历年试题精解 数学一》，以供广大考生复习使用。

自从实行研究生入学考试以来，也时有真题重现的现象发生，如 2006 年数学一的第一大题第(3)小题与 1993 年数学一第四大题、2003 年数学一的第一大题第(3)小题与 1993 年数学一的第一大题第(3)小题、2003 年数学一的第一大题第(5)小题与 1996 年数学三的第一大题第(5)小题、2003 年数学一的第三大题与 2001 年数学三的第六大题、2003 年数学四的第四大题与 2001 年数学——的第五大题是基本雷同的。英语与政治也有真题重复出现的情况，2003 年英语第 36 题与 1996 年英语第 43 题，2003 年英语第 37 题与 1995 年英语第 34 题，2003 年英语第 26 题与 1995 年英语第 21 题，2003 年英语第 29 题与 1996 年英语第 42 题，2003 年英语第 24 题与 1997 年英语第 42 题，1996 年英语第 46 题与 1995 年英语第 6 题等等，都是非常相似的。2003 年政治理论第 21 题与 2000 年文科政治第 31 题和 1993 年理科政治第 6 题，2003 年政治理论第 31 题与 1993 年理科政治第 32 题，2003 年政治理论第 36 题与 1995 年文科政治第 28 题和 1994 年文科政治第 29 题等等，都是相同或非常相似的。所以，对往年真题的研究是最有帮助的。循着命题人的思路，我们就可以把握考试的脉搏，明确考试的重点和难点所在。

全国硕士研究生入学考试数学科是考查考生的数学功底、思维能力，但却是对考生在一定层次上进行各种思维能力，包括抽象思维能力、逻辑推理能力等的综合性检验。既然如此，要考好数学，思维能力必须有质的飞跃。数学科目的考试范围基本上是高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计这三大块，经济类考生的数学试卷还涉及一些经济数学的知识. 无论如何，考生首先要全面细致地研究全国硕士研究生入学考试的数学大纲。自从考研招生实行全国统考以来，数学考试命题是严格按照国家考试中心制定的“数学考试大纲”所规定的考试内容和考试要求来进行的。大纲对考试性质、要求、方法、内容、试题类别、适用专业等进行了详细阐述，是广大考生备考的指导性文件和根本依据. 考生必须从中全面领会考试精神，尤其是明确考试范围，以便有的放矢. 大纲所要求的知识点或考点，考生一定要熟记在心，不要求的内容，应该跳过，不要浪费精力。

不论是数学理论的建立，还是数学运算和逻辑推理，无一不是以明确而又清晰的概念为基础的。考生应系统掌握大纲规定的基础知识，对大纲规定的内容进行梳理，形成知识网络；其次，在接触一定量的题型之后，头脑中留下的不是纷繁的题目，而是清晰、鲜明、深刻的基础知识和基本技能，以及基本的数学思想和方法。

解题时既要考虑解题的通性通法，又要分析它的特殊性，寻求最佳解决方法，提高解题能力和对新题型的适应能力。考生复习时演练一定量的习题是非常必要的，它是提高考试

成绩的重要手段，但也不要搞题海战术，重要的是要吃透大纲规定的基本考点，提高分析问题和解决问题的能力。

由于编者水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，衷心希望广大读者批评指正。

编　者

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目 录

第一部分 高等数学

第二部分　线性代数

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限、连续

题型 1.1　函数、极限的概念及其特性

一、题型 1.1 函数的概念及其特性

1.（1990 年试题）设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则函数 $f[f(x)]=$ ______.

【解题分析】 由 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，知 $|f(x)|\leqslant 1$. 因此有 $f[f(x)]=1$.

2.（1992 年试题）设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2+x, & x>0\end{cases}$，则　　（　）

A. $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$　　B. $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0\\ -x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

C. $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$　　D. $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

【解题分析】 $f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0\\ (-x)^2+(-x), & -x>0\end{cases}=\begin{cases}x^2-x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

故应选 D.

3.（1997 年试题）设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$　　（　）

A. $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$

C. $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x & x\geqslant 0\end{cases}$　　D. $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$

【解题分析】 由已知

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ f(x)+2, & f(x)>0.\end{cases}$$

由 $f(x)\leqslant 0$，知 $x\geqslant 0$ 且 $f(x)=-x$；

由 $f(x)>0$，知 $x<0$ 且 $f(x)=x^2$；

从而 $g[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0,\\ x^2+2, & x<0,\end{cases}$ 选 D.

4. (1999 年试题) 设 $f(x)$是连续函数,$F(x)$是 $f(x)$的原函数,则 ( )

A. 当 $f(x)$是奇函数时,$F(x)$必是偶函数

B. 当 $f(x)$是偶函数时,$F(x)$必是奇函数

C. 当 $f(x)$是周期函数时,$F(x)$必是周期函数

D. 当 $f(x)$是单调增函数时,$F(x)$必是单调增函数

【解题分析】 由已知 $f(x)$是连续函数,则$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$的一个原函数,从而 $f(x)$的任一原函数$F(x)$可表示为$\varepsilon-N\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+C$,即$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+C$,其中$C$为任意常数,且有

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t+C \xlongequal{u=-t} \int_0^{x} f(-u)\,\mathrm{d}(u)+C.$$

当 $f(x)$是奇函数时,

$$F(-x)=\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u+C=F(x),$$

即 $F(x)$为偶函数时,A 成立;

当 $f(x)$是偶函数时,

$$F(-x)=-\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u+C\neq -F(x),$$

所以 B 不成立;

关于选项C,D可举反例予以排除,如令 $f(x)=1+\cos x$,则周期为 2π,$F(x)=x+\sin x+C$不是周期函数;又令 $f(x)=x$,为单调增函数,但$F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$不是单调函数,综上,选 A.

5. (2001 年试题) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$等于 ( )

A. 0

B. 1

C. $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

D. $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

【解题分析】 由题设,$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则

$$f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |f(x)|>1.\end{cases}$$

由于 $f(x)$只能取 0,1 两个值,即$|f(x)|\leqslant 1, x\in(-\infty,+\infty)$,所以

$$f[f(x)]=1, x\in(-\infty,\infty),$$

因而

$$f\{f[f(x)]\}=f(1)=1,$$

选 B.

6. (2005 年试题) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$的一个原函数,"$M\Leftrightarrow N$" 表示"M的充分必要条

件是 N"，则必有 ( )

A. $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数
B. $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数
C. $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数
D. $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

【解题分析】 由题意可知

$$F(x)=\int_0^x f(x)\,dx=\int_0^x f(x)\,dt+C,$$

于是

$$f(x)\text{为奇函数}\Rightarrow\int_0^x f(t)\,dt\text{ 为偶函数}\Rightarrow f(x)\text{的全体原函数为偶函数};$$

$$F(x)\text{为偶函数}\Rightarrow F'(x)=f(x)\text{为奇函数}.$$

所以选 A.

二、极限概念与性质

1.（1993 年试题）当 $x\to 0$ 时，变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是 ( )

A. 无穷小
B. 无穷大
C. 有界的，但不是无穷小
D. 无界的，但不是无穷大

【解题分析】 若取 $x_k=\frac{1}{k\pi}\to 0(k\to\infty)$，则 $\frac{1}{x_k^2}\sin\frac{1}{x_k}=(k\pi)^2\sin k\pi=0$；

而取 $x_k=\dfrac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0(k\to\infty)$，则 $\frac{1}{x_k^2}\sin\frac{1}{x_k}=(2k\pi+\frac{\pi}{2})^2\to+\infty(k\to\infty)$，

可见当 $x\to 0$ 时，$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 的极限不存在，也非无穷大，故应选 D.

2.（1998 年试题）设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是 ( )

A. 若 x_n 发散，则 y_n 必发散
B. 若 x_n 无界，则 y_n 必有界
C. 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小
D. 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小

【解题分析】 本题可采取举反例的方法一一排除干扰项，即

设 $x_n=\sin n$，$y_n=\frac{1}{n}$，则 y_n 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$. 从而可排除 A.

设 $x_n=\begin{cases}n, & n\text{ 为奇数},\\0, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ $y_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数},\\n, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 可排除 B；若 x_n 无界且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，但是 y_n 并非无穷小，从而 C 也不对. 综上，只有 D 成立。

3.（1999 年试题）"对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$" 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的 ( )

A. 充分条件但非必要条件
B. 必要条件但非充分条件
C. 充分必要条件
D. 既非充分条件又非必要条件

【解题分析】 本题考查数列极限的 $\varepsilon-N$ 语言定义，即：$\forall\varepsilon>0$，存在 $N\in N$，当 $n>N$ 时有 $|x_n-a|<\varepsilon$，将此定义与题设所给条件相比较，知二者实质是相同的，因此题设条件也是 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的充要条件，所以选 C.

4.(2003年试题)设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有 ( )

A. $a_n<b_n$对任意n成立　　B. $b_n<c_n$对任意n成立

C. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在　　D. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在

【解题分析】由题设,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$及$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$知当$n$充分大时,$a_n<b_n$,但对任意$n$,$a_n<b_n$不一定成立,从而可排除A,同理$b_n<c_n$对任意$n$也不一定成立,因此B也可排除,假设$a_n=\frac{1}{n^2}$,$c_n=n$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=+\infty$,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,因此C也不成立,关于D,由于$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=\infty$,所以极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在,综上,选D.

题型1.2　函数极限的计算及其逆问题

一、利用左、右极限求函数极限

1.(1991年试题)$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$________.

【解题分析】
$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{xe^{-\frac{1}{x}}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

故应填-1.

2.(1992年试题)当$x\to1$时,函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限 ( )

A. 等于2　　B. 等于0　　C. 为∞　　D. 不存在但不为∞

【解题分析】因为$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$,而$\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$,$\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$,故有
$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=0,\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$$

可见,$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$不存在但不为$\infty$.

故应选D.

二、求未定式($\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,1^\infty,0^0,\infty^0$)的极限

1.(1991年试题)求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$.

【解题分析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$

2.(1992年试题)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=$________.

【解题分析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}(-x^2)}{e^x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^x+\sin x}=0$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

3.(1992 年试题) 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

【解题分析】 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3}\cdot\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}$$

4.(1993 年试题) $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=$______.

【解题分析】 $$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}=0$$

5.(1993 年试题) 求$\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

【解题分析】 $$\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{100}{-\sqrt{1+100x^{-2}}-1}$$
$$=\frac{100}{-1-1}=-50$$

6.(1995 年试题) 求$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

【解题分析】 $$原式=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{1+\cos x-1}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}(\cos x-1)}{x(1-\cos\sqrt{x})}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}=\frac{1}{2}$$

7.(1996 年试题) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=$______.

【解题分析】 $$\lim_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to0}\frac{\sin\ln(1+3t)-\sin\ln(1+t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\cos\ln(1+3t)\cdot\frac{3}{1+3t}-\cos\ln(1+t)\cdot\frac{1}{1+t}}{1}=3-1=2$$

故应填 2.

8.(1997 年试题) 求极限$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

【解题分析】

$$原式=\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}\sin x}}=\frac{-2+1}{-1}=1.$$

或者 $$原式=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x-2}{\sqrt{x^2+\sin x}\cdot(\sqrt{4x^2+x-1}-x-1)}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}\sin x}\cdot\left(-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{3}{(-1)(-2-1)}=1.$$

9.（1998 年试题）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ ________.

【解题分析】求极限通常会有若干种途径，本题可采用以下几种方法：

（Ⅰ）原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2-4}{x^2[\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2]}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{4x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x^2}=-\frac{1}{4}.$$

（Ⅱ）原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1-x^2}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{4}=-\frac{1}{4}.$$

（Ⅲ）原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)+1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)-2}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{4}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=-\frac{1}{4}.$$

注　以上依次采用的方法是等价无穷小因子代换，洛必达法则和麦克劳林级数展开

10.（1999 年试题）求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

【解题分析】原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{2x[\ln(1+x)-x]}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos x}-1}{\ln(1+x)-x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{\ln(1+x)-x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{2x}{\dfrac{1}{1+x}-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x(1+x)}{-x}=-\frac{1}{2}$$

11.（2000 年试题）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$ ________.

【解题分析】由题设，

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{-x^2}{1+x^2}}{6x^2}=-\frac{1}{6}$$

12.（2001 年试题）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$ ________.

【解题分析】

$$\text{原式 } m\leqslant f''(x)\leqslant M=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{(x^2+x-2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(3-x)-(1+x)}{(x^2+x-2)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to1}\frac{2-2x}{x^2+x-2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to1}\frac{2(1-x)}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to1}\frac{1-x}{(x+2)(x-1)}$$

$$=-\frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

13.（2002 年试题）设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to0$ 时，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限 （　　）

A. 不存在　　B. 等于 1　　C. 等于 2　　D. 等于 3

【解题分析】由题设，$y(0)=y'(0)=0$，代入原微分方程，得 $y''(0)=1$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{y(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{y'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2}{y''(x)}=2,$$

选 C.

14.（2004 年试题）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

【解题分析】本题可采取以下两种方法计算：

$$(\text{Ⅰ})\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{\sin x}{3}}{2x\cdot\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{(2+\cos x)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}$$

$$(\text{Ⅱ})\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x-1}{3}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{6}}{x^2}=-\frac{1}{6}$$

15.（2007 年试题）极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$ ________.

【解题分析】 $$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2x}{(1+x^2)^2}+\sin x}{6x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{2}{(1+x^2)^2}+\sin x}{6}=-\frac{1}{6}.$$

16.（2008 年试题）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

【解题分析】

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos x\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)\cos x}{6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos x\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

17.（2009 年试题）求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\cos x(\sin x+\cos x)}}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x(\cos x-\sin x)}{\cos x(\sin x+\cos x)}}{2x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x(\sin x+\cos x)}=\frac{1}{4}.$$

三、函数极限的逆问题

1.（1990 年试题）已知$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b)=0$，其中 a,b 是常数，则（　　）

A. $a=1,b=1$　　B. $a=-1,b=1$

C. $a=1,b=-1$　　D. $a=-1,b=-1$

【解题分析】由$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0$，于是有

$1-a=0,a+b=0$，得 $a=1,b=-1$. 故应选 C.

2.（1990 年试题）已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，求常数 a.

【解题分析】由$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}=9$，有 $2a=\ln 9$，于是 $a=\ln 3$.

3.（1994 年试题）设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则（　　）

A. $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$　　B. $a=0,b=-2$

C. $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$　　D. $a=1,b=-2$

【解题分析】用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-a-2bx}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)-(a+2b)x-2bx^2}{2x(1+x)}=2,$$

于是，必有 $1-a=0$，即 $a=1$. 从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{-(a+2b)x-2bx^2}{2x(1+x)}=-\frac{1+2b}{2}=2\text{，得 } b=-\frac{5}{2}\text{. 故应选 A.}$$

4.（1998 年试题）确定常数 a,b,c 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c(c\neq 0)$.

【解题分析】由题设表达式，因为 $\lim\limits_{x\to 0}(ax-\sin x)=0$，但原式极限 $c\neq 0$，因此分母极限 $(x\to 0)$ 也为 0，即

$$\lim_{x\to 0}\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=0,$$

从而 $\int_b^0\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=0$，当 $b>0$ 时，$t\in(0,b)$，则 $\frac{\ln(1+t^3)}{t}>0$，因而

$$\int_b^0\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=-\int_0^b\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t<0.$$

当 $b<0$ 时，$t\in(\max(-1,b),0)$，则 $\frac{\ln(1+t^3)}{t}>0$，因而 $\int_b^0\frac{\ln(1+t^3)}{3}\mathrm{d}t>0$，综上 $b=0$. 于是

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}.$$

又由于 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1+x^3}=0,$$

因此必有 $\lim\limits_{x\to 0}(a-\cos x)=0$，即 $a=1$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{\ln(1+x^3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2},$$

所以 $c=\frac{1}{2}$.

综上 $a=1,b=0,c=\frac{1}{2}$.

5.（2000 年试题）若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为　　(　　)

A. 0　　B. 6　　C. 36　　D. ∞

【解题分析】由于题设未给出关于 $f(x)$ 的更多性质，故不应直接对原式应用洛必达法则，可将 $\sin 6x$ 展成麦克劳林级数，即当 $x\to 0$ 时，

$$\sin 6x=6x-\frac{1}{3!}(6x)^3+o(x^3)=6x-36x^3+o(x^3),$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{6x+xf(x)}{x^3}-36+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{6+f(x)}{x^2}-36\right)=0,$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36,$$

选 C.

或者

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x-6x+6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x-6x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{6\cos 6x-6}{3x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\cos 6x-1)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$
$$=2\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(6x)^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}-36=0,$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36.$$

6.（2002 年试题）已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，且满足

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}},$$

求 $f(x)$.

【解题分析】本题考查由重要极限 $\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ 导出微分方程，再求解微分方程，由题设，

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{f(x+hx)-f(x)}{f(x)}\right)^{\frac{f(x)}{f(x+hx)-f(x)}\cdot\frac{f(x+hx)-f(x)}{f(x)}\cdot\frac{1}{h}}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{f(x+hx)-f(x)}{f(x)}\right)^{\frac{f(x)}{f(x+hx)-f(x)}}$$
$$=\exp\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)-f(x)}{hf(x)}\right)$$
$$=\exp\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)-f(x)}{hx}\cdot\frac{x}{f(x)}\right)$$
$$=\exp\left(f'(x)\cdot\frac{x}{f(x)}\right),$$

因此 $f'(x)\cdot\dfrac{x}{f(x)}=\dfrac{1}{x}$，分离变量得 $\dfrac{df(x)}{f(x)}=\dfrac{dx}{x^2}$，两边积分得

$$\ln f(x)=-\frac{1}{x}+\ln C,$$

即 $f(x)=Ce^{-\frac{1}{x}}$，又由已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，可求出 $C=1$，所以 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$.

7.（2008 年试题）设 $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(xf(x))}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$____.

【解题分析】由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(xf(x))}{(e^{x^2}-1)f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2f^2(x)}{x^2f(x)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1.$

因为 $f(x)$ 连续，所以 $\dfrac{1}{2}f(0)=1$. 故有 $f(0)=2$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com