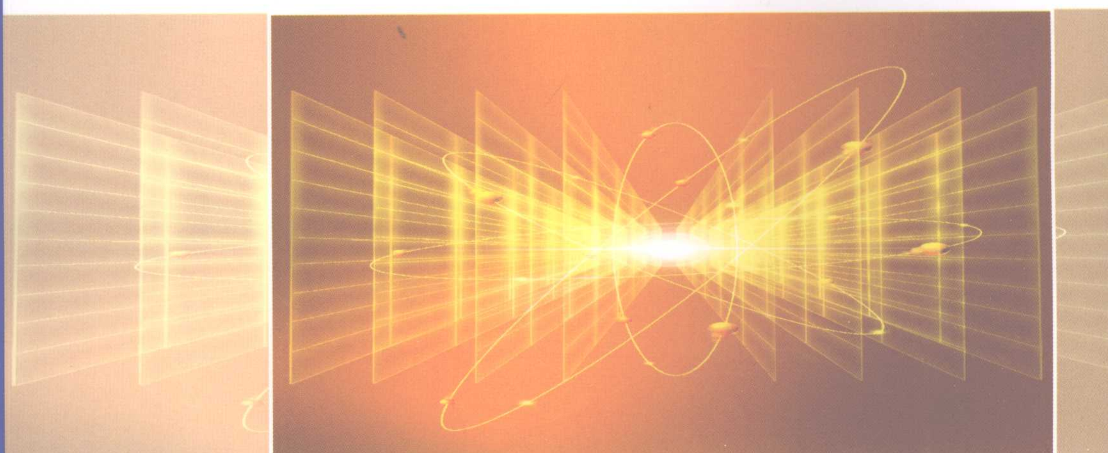
高等院校基础数学精品课程系列丛书 ●主编 宋眉眉

概率论与数理统计分级指导与提高

张玉环 主编



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等院校基础数学精品课程系列丛书

●主编　宋眉眉

概率论与数理统计
分级指导与提高

张玉环　主　编

汤大林　陈淑敏　王　菁　编

天津大学出版社

TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书根据《工科类本科数学基础课程教学基本要求》及考研大纲编写而成,是多年教学改革与实践的经验总结.本书主要内容包括:概率论的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计及假设检验等知识.每章内容循序渐进,既考虑到高等院校一般工科学生使用,又考虑到考研的实际,设置了知识结构图、基本要求、内容提要、典型题解析、自测题及自测题解答等环节,不仅适合于普通高等院校理工类、经管类本科各专业的学生使用,还可以作为教学参考书或考研辅导用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计分级指导与提高/张玉环主编.—天津:天津大学出版社,2008.12

(高等院校精品课程系列丛书)

ISBN 978-7-5618-2769-7

Ⅰ.概…　Ⅱ.张…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第134946号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨欢
地　　址　天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话　发行部:022—27403647　邮购部:022—27402742
印　　刷　天津市泰宇印务有限公司
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　185mm×260mm
印　　张　11.75
字　　数　294千
版　　次　2008年12月第1版
印　　次　2008年12月第1次
印　　数　1—3 000
定　　价　20.00元

高等院校基础数学精品课程系列丛书
编写委员会

主　编　宋眉眉

副主编　薛方津　刘玉波

编　委　（按姓氏拼音为序）

陈淑敏　苟长义　侯卫华　刘风华　马仲立　孟祥发
寿津莹　汤大林　王春雨　王　菁　张凤敏　张玉环

前　言

当前高等教育发展的重点主要是提高质量和优化结构，深化高等学校教学改革，全面提高教学质量.为全面落实教育部对质量工程的要求，加强基础教育，培养具有创新能力的高素质人才，我们悉心组织、设计、编写了这套“高等院校基础数学精品课程系列丛书”，包括:《线性代数与空间解析几何》、《概率论与数理统计》及《高等数学分级指导与提高》、《概率论与数理统计分级指导与提高》、《线性代数与空间解析几何分级指导与提高》等.

高等数学、线性代数及概率论与数理统计作为高等院校基础数学课程对培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力及对后续专业课程的学习有着非常重要的作用.本套丛书参照《工科类本科数学基础课程教学基本要求》及考研大纲，按照加强基础、培养能力、重视应用的指导方针，力求体现编写者长期讲授高校数学基础课的成功教学经验及多年来在高校数学教学改革中的实践成果.每章内容包括知识结构图、基本要求、内容提要、典型题解析、自测题及自测题解答.具体特点如下:

①精心组织设计内容，编写过程从基本方法入手，充分考虑到课程内容上的科学性、系统性和逻辑性，对传统教学内容在结构内容上进行适当调整，框架安排力求简洁;

②按照教学基本要求，突出重点与难点，注意各章节内容之间的内在联系及相关专业课的关系，为后续课程的学习打好基础;

③在叙述上力求层次清晰，深入浅出，通俗易懂，便于学生自学;

④本书注重加强基本能力的训练，注意学以致用，基本内容条理清晰，典型题解析详尽，内容设计循序渐进，题型选择丰富多样.大多数题后有注释，指出学生解题时易发生的错误以及解题的相关技巧，部分习题还给出多种解法，以便开拓学生的解题思路.

丛书由宋眉眉、薛方津、刘玉波整体设计.本书由张玉环主编.主要内容包括:概率论的基本概念、随机变量及其分布，多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计及假设检验.具体分工是:第1、2章由王菁编写，第3、4章由张玉环编写，第5、8章由汤大林编写，第6、7章由陈淑敏编写.

本书在编写过程中汲取了同行专家的许多宝贵建议，孟祥发老师对书稿提出了许多修改意见，在此一并致谢!

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请读者指正.

编者

2008年6月

目　录

第 1 章　概率论的基本概念

1.1　知识结构图

- 事件及关系和运算
  - 样本空间,事件的定义
  - 事件之间的关系($\subset$,$=$,$\cup$,$\cap$,$-$,互斥、对立)
  - 关系运算律
- 概率的定义和性质
  - 定义
    - 统计定义
    - 古典定义
    - 公理化定义
  - 性质(可加性,单调性,连续性等)
- 概率的计算
  - 古典概率:$P(A)=\dfrac{m}{n}$
  - 几何概率:$P(A)=\dfrac{\text{事件 }A\text{ 的子区域的度量 }L(A)}{\text{样本空间的度量 }L(\Omega)}$
  - 条件概率:$P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}\Rightarrow\begin{cases}\text{乘法公式}:P(AB)=P(A)P(B\mid A)\\ \qquad\qquad\qquad\;\;=P(B)P(A\mid B)\end{cases}$
  - 全概率公式:$P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$
  - 贝叶斯公式:$P(A_k\mid B)=\dfrac{P(A_k)P(B\mid A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}\quad(k=1,2,\cdots,n)$
  - 其中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 Ω 的划分.
- 独立试验序列概型
  - 事件的独立性:$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$
  - 伯努利概型:$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,\cdots,n)$

1.2　基本要求

①理解随机事件的概念,了解样本空间的概念,掌握事件之间的关系与运算.

②理解事件概率的概念,了解概率的统计定义.

③理解概率的古典定义,会计算简单的古典概率.

④理解概率的公理化定义.

⑤掌握概率的基本性质及概率的加法定理.

⑥理解条件概率的概念,掌握概率的乘法公式、全概率公式及贝叶斯(Bayes)公式.

⑦理解事件独立性概念,会计算相互独立事件的有关概率.

1.3 内容提要

1.3.1 基本概念

1. 随机现象

世界上有各种各样的现象.在一定条件下,可能发生也可能不发生的现象叫随机现象.它具有两个特点:

①在一次观察中,现象可能发生,也可能不发生,即结果呈现了不确定性;

②在大量重复观察中,其结果具有统计规律性.

概率论就是研究随机现象的统计规律性的一门数学学科.

2. 随机试验

观察的随机现象具有以下特点的试验叫随机试验:

①试验具有明确的目的;

②试验在相同条件下可以重复进行;

③试验的结果不止一个,所有结果事先都能明确指出;

④每次试验前,不能确定出现哪个结果.

随机试验通常用字母 E 表示.

3. 随机事件

在随机试验 E 中,所有可能出现(或称发生)的结果都叫随机事件,随机事件用大写字母 A、B、C 等表示.

随机事件有以下类型.

1)基本事件　最简单的不能再分的事件叫做基本事件,一般用 ω_i 表示.

2)复合事件　由至少两个基本事件构成的事件叫做复合事件.复合事件是由若干个基本事件集合而成的事件.

3)必然事件　在随机试验 E 中,必然出现的事件叫做必然事件.

4)不可能事件　在随机试验 E 中,不可能出现的事件叫做不可能事件.

后两个事件是确定性事件,并不是随机事件.为了研究问题的方便,把它们归入随机事件,作为随机事件的两个特殊情况.

4. 样本空间

1)样本点　在随机试验 E 中,基本事件叫做样本点.

2)样本空间　在随机试验 E 中,全体样本点的集合叫做样本空间,记作 Ω.样本空间有以下类型:

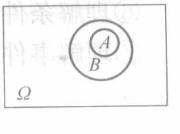
①有限集合,即样本空间中的样本点的个数是有限的;

②无限可列集合,即样本空间中样本点的个数是无限的,但可以一一列出来;

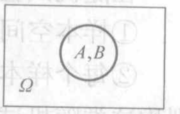
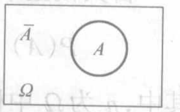
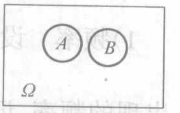
③无限不可列集合,即样本空间中样本点的个数是无限的,又不能列出来.

1.3.2 随机事件之间的关系及运算

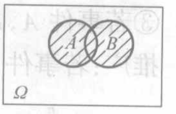
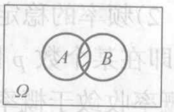
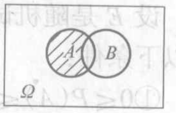
1. 随机事件之间的四种关系

名称	符号	定　义	集合解释	文氏图
包含关系	$A \subset B$	事件 A 发生必导致事件 B 发生	A 是 B 的子集	

续表

名称	符号	定　　义	集合解释	文氏图
等价关系	$A=B$	事件 A 发生必导致事件 B 发生，且事件 B 发生也必导致事件 A 发生	A 与 B 相等	
互逆关系（对立关系）	$\overline{A}$	事件 $\overline{A}$ 发生，事件 A 必不发生，反之也成立	A 的关于 Ω 的补集	
互不相容（互斥关系）	$AB=\varnothing$	事件 A 与事件 B 一定不会同时发生	A 与 B 无公共元素	

2. 事件之间的三大运算

名称	符号	定　　义	集合解释	文氏图
事件的并（和）	$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少一个发生	A 与 B 的并集	
事件的交（积）	$A\cap B$（或 AB）	事件 A 与事件 B 都发生	A 与 B 的交集	
事件的差	$A-B$	事件 A 发生且事件 B 不发生	A 与 B 的差集	

随机事件运算符合以下规律.

1)交换律　$A\cup B=B\cup A, AB=BA$.

2)结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

3)分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

4)De Morgan 律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

5)差积转换律　$A-B=A\overline{B}=A-AB=A\cup B-B$.

1.3.3　概率的定义

1. 概率的一般定义及性质

对一个随机事件 A，如果用一个数表示事件 A 发生的可能性的大小，则称这个数为事件 A

的概率,记作 $P(A)$.

2. 古典概型

在随机试验 E 中,如果满足以下条件:

①样本空间由有限个样本点构成,$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$;

②每个样本点出现的可能性相等,即 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$,

则称这类随机试验的数学模型为古典概型.

古典概型中事件 A 的概率计算公式为

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

其中,n 为 Ω 中样本点总数,m 为事件 A 包含的样本点数.

3. 概率的统计定义

1)频率　设在随机试验 E 中进行 n 次重复试验.若事件 A 出现 n_A 次,则称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 出现的频率,记作 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

频率的一般性质如下:

①$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

②$f_n(\Omega)=1$;

③若事件 A,B 互不相容,则 $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$.

推广:若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}f_n(A_i).$$

2)频率的稳定性　在随机试验 E 中,当试验次数 n 逐渐增大时,频率值 $f_n(A)$ 会趋于稳定,即在某个数 p 附近波动,则称数 p 为事件 A 的概率,记作 $P(A)=p$(第 5 章会介绍 $f_n(A)$ 依概率收敛于概率 p).

4. 概率的公理化定义

设 E 是随机试验,Ω 是它的样本空间,对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数 $P(A)$,若满足以下条件:

①$0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

②$P(\Omega)=1$;

③对任何两两互不相容事件 $A_i(i=1,2,\cdots)$,有 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

5. 几何概率

若随机试验满足以下条件:

①样本空间 Ω 为某一可度量的几何区域;

②若该几何区域内事件 A 在每一点发生的可能性相同.

则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 的度量}}{\text{样本空间的度量}}=\frac{L(A)}{L(\Omega)},$$

其中，$L(A)$，$L(\Omega)$可指长度、面积或体积.

概率的性质如下：

①对任何事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

②$P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$；

③若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$；

④$P(A)+P(\overline{A})=1$，或 $P(\overline{A})=1-P(A)$；

⑤若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，且 $P(B)\geqslant P(A)$；

⑥加法定理：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，

推广：$P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i)$；

⑦$P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\,\overline{B})$，

推广：$P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=1-P(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i)$.

6. 条件概率

设两事件 A，B，且 $P(A)>0$，则称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$为在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率.

条件概率的性质如下：

①对任一事件 B，有 $0\leqslant P(B|A)\leqslant 1$；

②$P(\Omega|A)=1$；

③若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为两两互不相容的事件，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\mid A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i\mid A);$$

④$P(B|A)+P(\overline{B}|A)=1$，或 $P(B|A)=1-P(\overline{B}|A)$；

⑤加法定理：$P(B_1\cup B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1B_2|A)$；

⑥$P(B_1\cup B_2|A)=1-P(\overline{B}_1\,\overline{B}_2|A)$.

7. 排列组合运算公式

有重复的排列总数　n^k.

无重复的排列总数　$\mathrm{P}_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}=n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

无序组合总数　$\mathrm{C}_n^k=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}=\dfrac{\mathrm{P}_n^k}{k!}$.

把 n 个元素分成 k 个不同的部分 $n_1,n_2,\cdots,n_k$，$n_1+n_2+\cdots n_k=n$.不同分法的总数为 $\dfrac{n!}{n_1!\;n_2!\;\cdots n_k!}$.

在某一确定的分法中，从 n_1 中取 r_1 个，从 n_2 中取 r_2 个，……，从 n_k 中取 r_k 个(当然 $r_i\leqslant n_i$，$i=1,2,\cdots,k$)，则不同取法的总数为

$$\mathrm{C}_{n_1}^{r_1}\cdot\mathrm{C}_{n_2}^{r_2}\cdot\cdots\cdot\mathrm{C}_{n_k}^{r_k}=\prod_{i=1}^{k}\mathrm{C}_{n_i}^{r_i}.$$

n 个常数公式表示如下：

①$\mathrm{C}_n^0=1$；

②$\mathrm{C}_n^k=\mathrm{C}_n^{n-k}\quad(k\leqslant n)$；

③$\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n$；

④$\mathrm{C}_n^0\mathrm{C}_n^n+\mathrm{C}_n^1\mathrm{C}_n^{n-1}+\cdots+\mathrm{C}_n^n\mathrm{C}_n^0=\mathrm{C}_{2n}^n$，即$(\mathrm{C}_n^0)^2+(\mathrm{C}_n^1)^2+\cdots+(\mathrm{C}_n^n)^2=\mathrm{C}_{2n}^n$.

1.3.4 计算概率的五大公式

名称	表达式	适用范围	应用关键
加法公式	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$	$P(A),P(B),P(AB)$易于计算	将所关心的事件恰当地表达为 $A\cup B$
	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$	A 与 B 互不相容	
乘法公式	$P(AB)=P(A)P(B\mid A)$ $P(A_1A_2\cdots A_n)$ $=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$	条件概率由直观意义较易计算	①将所关心的事件恰当地表达为 AB； ②正确理解 $P(B\mid A)$
	$P(AB)=P(A)P(B)$	已知 A 与 B 相互独立	由试验的特点或实际意义先确定出事件的独立性
	$P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)\cdots P(A_n)$	已知 $A_1,\cdots,A_n$ 相互独立	
全概率公式	设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为Ω 的一个划分(完备事件组)，则 $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$	①事件 B 是伴随事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 其中之一的发生而发生的； ②$P(B\mid A_i)$由直观意义容易计算	①合适划分的选定； ②$P(A_i)$及 $P(B\mid A_i)$的准确理解与直观计算
贝叶斯公式	在全概率公式条件下，若 $P(B)>0$，则 $P(A_k\mid B)$ $=\dfrac{P(A_k)P(B\mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}$.	已知试验已发生某种“结果”，确定其中某一“原因”发生的概率	由题意确定出待求概率为 $P(A_k\mid B)$
伯努利公式	$P(B_k)=\mathrm{C}_n^kp^kq^{n-k}$ 其中 $p=P(A),q=1-p$	一次试验中 A 发生的概率为 p，则在 n 次独立重复试验中，事件 A 恰好发生 k 次，记作 B_k	①试验可等价地理解成这种类型； ②$P(A)$的正确计算

1.4 典型题解析

例 1.1 确定下面 3 个随机试验的样本空间：

(1)E_1：掷一个均匀的骰子，观察朝上面出现的点数；

(2)E_2：某人射击一个目标，若击中目标，射击就停止，记录射击的次数；

(3)E_3：任取一支灯管，连续使用，直到损坏为止，记录它的寿命.

解 确定随机试验的样本空间既是概率论的基本问题，也是重要问题.做法是：先分析基本事件，如果可以，就列出它的全体，即样本空间.

(1) E_1 中,因为骰子是六面体,基本事件共有 6 个:1,2,3,4,5,6.所以样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.这是有限型样本空间.

(2) E_2 中,因为射击一次一次地进行,若击中目标,不再进行下次射击,若未击中目标,射击就要进行下去,因此它的基本事件为 1,2,3,…,所以样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,\cdots\}$.这是无限可列型样本空间.

(3) E_3 中,寿命是用时间表示的,时间是连续的,是不可列的.因此它的样本空间表示为 $\Omega=\{t \mid t\geqslant 0\}$,这是无限不可列型样本空间.

例 1.2 设 A,B,C 为三个随机事件,试用 A,B,C 的运算关系表示下列事件:

(1) $E=\{A$ 发生,而 B 和 C 都不发生$\}$;

(2) $F=\{A,B,C$ 中恰有两个发生$\}$;

(3) $G=\{A,B,C$ 中不多于一个发生$\}$;

(4) $H=\{A,B,C$ 中至少有一个发生$\}$.

(1)**解 1** 单看 E 是$\{A$ 发生,B 不发生,C 也不发生$\}$,即 E 与$\{A,\overline{B},\overline{C}$同时发生$\}$等价,故 $E=A\overline{B}\ \overline{C}$.

解 2 把$\{B,C$ 都不发生$\}$一起看,它的对立事件是$\{B,C$ 至少有一个发生$\}$,即 $B\cup C$,于是$\{B,C$ 都不发生$\}=\overline{B\cup C}$,从而 $E=A(\overline{B\cup C})$.

(2)**解 1** $F=\{A,B,C$ 中恰有两个发生$\}$的等价事件是$\{A,B$ 都发生,而 C 不发生;或者 A,C 都发生,而 B 不发生;或者 B,C 都发生,而 A 不发生$\}$,故 $F=AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$.

解 2 F 的等价事件是$\{A,B$ 同时发生,或者 B,C 同时发生,或者 A,C 同时发生,但 A,B,C 不能同时发生$\}$,故 $F=AB\cup BC\cup CA-ABC=(AB\cup BC\cup CA)\cap\overline{ABC}$.

(3)**解 1** $G=\{A,B,C$ 中不多于一个发生$\}$

$=\{$三个都不发生$\}\cup\{$一个发生,另两个不发生$\}$

$=(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C})\cup(A\overline{B}\ \overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\ \overline{B}C)$.

解 2 G 的对立事件$\overline{G}=\{A$、B、C 中至少有两个同时发生$\}=AB\cup BC\cup CA$.

故 $G=\overline{AB\cup BC\cup CA}$.

(4)**解 1** 由和事件的定义得 $H=A\cup B\cup C$.

解 2 H 的对立事件$\overline{\overline{H}}=\{A,B,C$ 都不发生$\}=\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$,故 $H=\overline{\overline{H}}=\overline{\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}}$.

解 3 $H=\{$恰有一个发生$\}\cup\{$或恰有两个发生$\}\cup\{$三个都发生$\}$

$=(A\overline{B}\ \overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\ \overline{B}C)\cup(AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC)\cup ABC$.

注 求一个事件的表示式时,由于思路不同,得到的表达式往往形式不一样,但只要思路正确,得到的不同表达式的计算结果相等.

例 1.3 设某人向靶子射击三次,用 A_i 表示$\{$第 i 次射击击中靶子$\}(i=1,2,3)$,试用语言描述下列事件:

(1) $\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$; (2) $\overline{A_1\cup A_2}$; (3) $(A_1A_2\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1A_2A_3)$.

解

(1) $\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$ 表示三次射击,至少有一次没击中靶子.

(2) $\overline{A_1\cup A_2}$表示前两次射击都没击中靶子.

(3) $(A_1A_2\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1A_2A_3)$表示恰好连续两次击中靶子.

例 1.4 设两事件 A,B,若 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$,问 A 与 B 是什么关系?

解 因为$\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$,所以由 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$,可得 $AB=\overline{A\cup B}$.

又因为 $A\cup B\supset AB$,所以 $AB=\varnothing$,即$\overline{A\cup B}=\varnothing$.因此,$A\cup B=\Omega$.故 A 与 B 是对立事件:$A=\overline{B},B=\overline{A}$.

例 1.5 设 A,B 是两事件.问:

(1){A,B 都发生},{A,B 都不发生},{A,B 不都发生}中,哪两个是对立事件?

(2){A,B 至少发生一个}与{A,B 最多发生一个}是否是对立事件?

解 (1){A,B 都发生}$=AB$,

{A,B 都不发生}$=\overline{A}\,\overline{B}$,

{A,B 不都发生}$=\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

由于 AB 与$\overline{AB}$是对立事件,所以{A,B 都发生}与{A,B 不都发生}是对立事件.而与{A,B 都不发生}不是对立事件.

(2){A,B 至少发生一个}可表示为 $A\cup B=A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup AB$.

{A,B 最多发生一个}可表示为 $A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\,\overline{B}$.

由于$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}\neq A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\,\overline{B}$,所以两者不是对立事件.

从直观上看,{A,B 中至少发生一个}与{A,B 中最多发生一个}有交事件为{A,B 中正好发生一个}.所以两者不是互斥事件,故不是对立事件.对{A,B 中最多发生一个}还可以理解为{A,B 至少一个不发生}.因此它的对立事件应为{A,B 同时发生}.

例 1.6 对三个任意给定的事件 A,B,C.

(1)化简$(A\cup B)(B\cup C)$;

(2)将 $A\cup B\cup C$ 表示成互不相容事件之和.

解 (1)$(A\cup B)(B\cup C)=((A\cup B)B)\cup((A\cup B)C)$

$=B\cup(AC\cup BC)=B\cup AC$.

(2)**解 1** $A\cup B\cup C=A\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

解 2 $A\cup B\cup C=(A-AB)\cup(B-BC)\cup(C-CA)\cup(ABC)$.

例 1.7 如图 1.1 所示,令 $A_i=$\{第 i 个开关闭合\}$(i=1,2,3,4,5,6)$,试用 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 表示系统 LR 为通路.

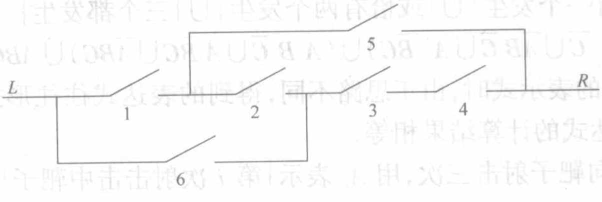


图1.1

解 设 $B=$\{LR 是通路\},则

$$B=A_1A_5\cup A_1A_2A_3A_4\cup A_6A_3A_4\cup A_6A_2A_5.$$

例 1.8 设当事件 A 与 B 同时发生时,事件 C 必发生,则下列各式正确的是(　　).

(A) $P(C) \leqslant P(A)+P(B)-1$ (B) $P(C) \geqslant P(A)+P(B)-1$

(C) $P(C)=P(AB)$ (D) $P(C)=P(A \cup B)$

解 由题设 $AB \subset C$，有 $P(AB) \leqslant P(C)$，又

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \leqslant 1$，

$P(C) \geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A \cup B) \geqslant P(A)+P(B)-1$.

故应选(B).

注 本题主要考查概率的性质.结论还可推广，如

$$P(ABC) \geqslant P(A)+P(B)+P(C)-2.$$

例 1.9 设事件 A, B, C 两两互不相容，$P(A)=0.2$，$P(B)=0.3$，$P(C)=0.4$，求 $P[(A \cup B)-C]$.

解 因为 A, B, C 两两互不相容，所以 $AB=BC=CA=\varnothing$，且 $A \subset \bar{C}$，$B \subset \bar{C}$，$P(AB)=0$. 又因为 $AB\bar{C} \subset AB$，所以

$$0 \leqslant P(AB\bar{C}) \leqslant P(AB)=0,$$

故 $P(AB\bar{C})=0$.

因此
$$\begin{aligned} P[(A \cup B)-C] &= P[(A \cup B)\bar{C}] = P(A\bar{C} \cup B\bar{C}) \\ &= P(A\bar{C})+P(B\bar{C})-P(AB\bar{C}) \\ &= P(A)+P(B)-0=0.5. \end{aligned}$$

注 此题主要应用了性质：① $A-B=A\bar{B}=A-AB$. ②若 $A \subset B$，则 $P(A) \leqslant P(B)$. 对 $P(AB\bar{C})=0$ 还有另一解法，即 $AB\bar{C}=\varnothing\bar{C}=\varnothing$. 所以 $P(AB\bar{C})=P(\varnothing)=0$. 在此说明，若 $A=\varnothing$，则 $P(A)=0$，反之若 $P(A)=0$，则 A 不一定为 $\varnothing$. 例如，随机地向[0,1]区间投一个点，以 X 表示点的坐标，取 $A=B=\{X=0.5\}$，则事件 $AB=A=\{X=0.5\}$ 不是不可能事件，但由几何概型知，$P(AB)=0$.

例 1.10 5 张数字卡片上分别写着 1,2,3,4,5，从中任取 3 张，排成 3 位数，求下列事件的概率：

(1)3 位数大于 300；(2)3 位数是偶数；(3)3 位数是 5 的倍数.

分析 这是古典概型问题.设三事件分别为 A, B, C.

解 1 考虑整个 3 位数，因为数是有序的，用排列计算 n, m. 3 位数的总个数 $n=\mathrm{P}_5^3=60$.

(1)3 位数大于 300：百位必须从 3,4,5 中取，取法为 $\mathrm{C}_3^1=3$. 在百位数取定后，十位数、个位数只能从其余的 4 个数取 2 个排列，排法为 $\mathrm{P}_4^2=12$. 所以 $m_A=\mathrm{C}_3^1\mathrm{P}_4^2=36$. 于是

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{\mathrm{C}_3^1\mathrm{P}_4^2}{\mathrm{P}_5^3}=\frac{36}{60}=0.6.$$

(2)3 位数为偶数：个位数只能从 2,4 中取，取法为 $\mathrm{C}_2^1=1$. 在个位数取定后，十位数、百位数只能从其余的 4 个数中取出 2 个排列，排法为 $\mathrm{P}_4^2=12$，所以 $m_B=\mathrm{C}_2^1\mathrm{P}_4^2=24$. 于是

$$P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{P}_4^2}{\mathrm{P}_5^3}=\frac{24}{60}=0.4.$$

(3)3 位数是 5 的倍数：个位数只能是 5，十位数、百位数从其余 4 个数中取 2 个排列，排法为 $\mathrm{P}_4^2=12$，所以 $m_C=\mathrm{P}_4^2=12$. 于是

$$P(C)=\frac{m_C}{n}=\frac{P_4^2}{P_5^3}=\frac{12}{60}=0.2.$$

解 2 不考虑整个 3 位数，只考虑 3 位数的特点，无顺序问题，用组合计算 n,m.

(1)3 位数大于 300：只考虑百位数，总取法为 $n=C_5^1=5$，为使 3 位数大于 300，百位数只能从 3,4,5 中取，取法为 $m_A=C_3^1=3$，于是

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{3}{5}=0.6.$$

(2)3 位数是偶数，即个位数必须是偶数，因此只需考虑个位数就行了. 总取法 $n=C_5^1=5$，而偶数则只能从 2,4 中取，取法为 $m_B=C_2^1=2$，于是

$$P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{2}{5}=0.4.$$

(3)3 位数是 5 的倍数，只考虑个位数. 总取法 $n=C_5^1=5$，个位数只能是 5，$m_C=C_1^1=1$，于是

$$P(C)=\frac{m_C}{n}=\frac{1}{5}=0.2.$$

注 本题中同一个问题采用了两种不同的解法. 主要是考虑问题的着眼点不同，对同一问题用了不同的数学模型来描述. 模型不同，样本空间也就不同，但计算 n,m 必须在同一个样本空间中进行，否则就会出错.

例 1.11 求下列事件的概率.

(1)A：同房间的 4 个学生，至少有 2 人生日在同一个月；

(2)B：同一班的 30 个学生中，至少有 1 人生日在 10 月 1 日；

(3)C：参加聚会的 k 个人中至少有 2 人生日相同；

(4)D：k 个人中至少有 2 人生日在 10 月 1 日.

解 题中几个问题从考虑对立事件的概率入手比较简单.

(1)$n=12^4$，$\overline{A}=\{4$ 个人的生日都不在同一个月$\}$. $m_{\overline{A}}=P_{12}^4$，$P(\overline{A})=\dfrac{P_{12}^4}{12^4}$，

所以 $$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{P_{12}^4}{12^4}\approx 0.4271.$$

(2)$n=365^{30}$，$\overline{B}=\{$没有人生日在 10 月 1 日$\}$，$m_{\overline{B}}=364^{30}$，

所以 $$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{364^{30}}{365^{30}}\approx 0.0790.$$

(3)$n=365^k$，$\overline{C}=\{k$ 个人生日都不相同$\}$，$m_{\overline{C}}=P_{365}^k$，

所以 $$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{P_{365}^k}{365^k}.$$

(4)$n=365^k$，$\overline{D}=\{k$ 个人生日都不在 10 月 1 日$\}\cup\{$只有 1 人生日在 10 月 1 日$\}$，记为 $\overline{D}=D_1+D_2$，其中 D_2 又可看成$\{k$ 个人中恰有$(k-1)$人生日不在 10 月 1 日$\}$.

$$m_1=364^k,\ m_2=C_k^{k-1}\cdot 364^{k-1}=k\cdot 364^{k-1},\ m_{\overline{D}}=m_1+m_2,$$

$$P(\overline{D})=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{364^k+k364^{k-1}}{365^k},$$