阻塞流理论及其应用

（第二版）

宁宣熙 等著

科学出版社
www.sciencep.com

阻塞流理论及其应用

（第二版）

宁宣熙　宁安琪　吴薇薇　雷仲魁　著

国家自然科学基金资助项目

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是作者在国家自然科学基金三次资助下进行随机网络中阻塞流理论与应用研究的研究报告.全书分上中下三篇,共12章.上篇主要介绍阻塞流的基本理论,包括网络饱和流、阻塞流、完全截面、阻塞截面等基本概念、定义及其相互关系,研究了确定阻塞截面多种算法,还探讨了求解网络最大阻塞流(最大流)和最小阻塞流(最小流)的算法,并用网络随机流动仿真模型进行了仿真验证;中篇介绍阻塞流在交通网络防阻塞设计、改造和运行控制中的应用及考虑阻塞的最短时间流问题,探讨仿真方法在优化改造中的应用;下篇利用无环最小支撑流的模型来解决在一般图中构造哈密顿轨(或圈)问题的研究结果,提出了构造哈密顿轨(或圈)的自组织算法并论证了算法的多项式性质,在其实证研究中通过大约12 000个网络实例和解决一般图中哈密顿圈问题研究的结果,验证了算法的有效性.此外,还探讨了象棋盘中马步哈密顿圈和广义哈密顿圈问题及其解法.附录中给出了几种网络生成器算法源程序清单和若干特殊图中哈密顿圈解的数据.

本书可供从事图论、网络流理论、计算复杂性、运筹学、组合数学、哈密顿圈和算法设计研究的工作者和研究生参考.

图书在版编目(CIP)数据

阻塞流理论及其应用/宁宣熙等著.—2版.—北京:科学出版社,2009
ISBN 978-7-03-023598-5

Ⅰ.阻… Ⅱ.宁… Ⅲ.交通-阻塞-理论研究 Ⅳ.U491.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第194139号

责任编辑:王伟娟/责任校对:刘小梅
责任印制:张克忠/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年5月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2009年4月第 二 版 印张:17 1/2
2009年4月第二次印刷 字数:338 000

印数:1 501—4 000

定价:39.00元

绪　论

1. 流通网络中的阻塞现象及阻塞流理论的起源

在经典的运筹学理论中，网络流理论是发展最快的分支之一. 到目前为止，应该说，无论从理论上还是实际应用上，网络流模型都是一个很成熟的模型. 它的建立和求解算法的不断改进，为解决很多实际问题（如管道和通信网络的设计与优化等）提供了十分有用的工具. 然而，在已建立的这种网络流理论中，研究的仅仅是网络流现象中的个别特殊的流动. 例如，最大流问题，它是研究通过一个流通网络的最大流量问题. 为了达到网络最大流，网络中的每一个流动单元都必须按指定的路线运动，否则就会发生阻塞而达不到最大流，这是在以人为主体的交通网络中经常遇到的现象，特别是在紧急疏散网络中. 例如，在如图 0-1 所示的最简单的流通网络中，弧旁的数字为流量/容量，假设以人/分钟为单位. 当从 s 点进入网络的流量为 40 人/分钟，并等量地分配在 sA，sB 中时，如果人们沿 s—A—t 和 s—B—t 两条路线流动到终点 t，那么流过网络的总流量是 40 人/分钟，达到了网络的最大流(图 0-1 (a)). 但在实际流动中，由于无人引导，也可能发生这样的情况：进入 sA 的 20 个人在 A 点分流，可能会有 10 人进入 AB 弧，另外 10 人进入 At 弧. 如果这些来自 AB 弧的 10 个人强行进入 Bt 弧，那么 sB 弧中的流动就被阻塞了，这时通过网络的总流量只有 30 人（图 0-1 (b)）. 在最坏的情况下，当进入 sA 弧的 20 人，在 A 点全部进入了 AB 弧且在 B 点又强行进入了 Bt 弧，那么通过网络的总流量只有 20 人，这是该网络最严重的阻塞情况（图 0-1 (c)）. 应当说，后两种情况下的流量也是该网络在一定情况下（即阻塞情况下）的极值流，因为在不加任何阻止人们在 A 点进入 AB 弧（或者说强迫已进入 AB 弧的人们返回，从 At 走）的干涉下，该网络中的流动也达到了饱和，不可能再增加流量. 在本书中定义其为网络的饱和流，或称为阻塞流、极值

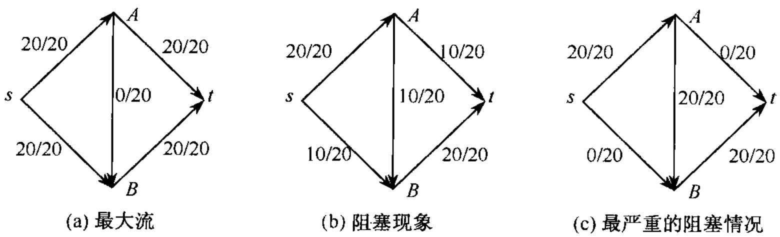

图 0-1　最简单网络中的阻塞流动

流. 具有最大流值的阻塞流即是网络的最大流，它和经典网络流理论中的最大流是完全相同的一个概念. 而具有最小流值的阻塞流（即最严重阻塞情况下的极值流）则定义为网络的最小流，这是一个经典网络流理论中无法表述的一个新概念.

除了流通网络，在通信网络的设计与运作中也有信息流的阻塞与信息传递的可靠性问题. 例如，图 0-2 所示的城市间通信网的通信线路问题.

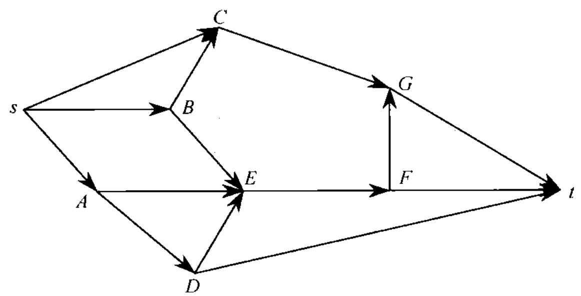

图 0-2　通信网络

从图 0-2 可知，$s—t$ 两城市间同时通话的最多线路是 3 条：它们是 $s—C—G—t$，$s—B—E—F—t$ 和 $s—A—D—t$. 但是如果某一次通信是通过线路 $s—A—E—F—G—t$ 进行的，那么在这种情况下，$s—t$ 之间的另外两条通信路线就被阻塞了，这种情况下的通信线路只有一条.

以上这些来自实际的问题都说明，经典网络流理论已不能解决社会和管理实践中所遇到的一些新问题，它需要向新的研究方向发展，这正如在自然科学的其他学术领域一样，研究非确定性、非线性、多值性已成为当代科学发展的新趋势. 阻塞流理论就是网络流规划理论中的非确定性、多值性研究领域中的一个新分支.

2. 阻塞流理论研究在国内外的发展现状

阻塞流（blocking flow）这个名词最早见于网络最大流算法的有关文献中，它是求解网络最大流算法迭代中的一个过渡解. 网络最小流的概念首见于 20 世纪 80 年代初，在 V. V. Malyshko 和 F. Harary 撰写的两篇内部研究报告中提出了网络最小流问题，证明了它是一个 Np-Hard 问题. 这一发现要归功于日本中央大学伊理正夫教授，是他的同事提供的信息并将其复印件寄给了作者. 可能是由于它们是内部报告，因此对外界影响较小. 从 1992 年作者受现代交通阻塞现象的启发，提出了阻塞流动问题，并在 1993 年召开的系统科学与系统工程国际会议（北京）上发表了论文“运输网络在紧急状态下的最大流问题”. 随后在

国家自然科学基金的资助下，对阻塞流理论进行了系统的研究，提出了有关的概念和定义，证明了阻塞流的基本定理，并用饱和流模型成功地解决了有向网络中的最小流问题，为建立阻塞流理论进行了开拓性的工作. 最近，这一新的研究领域也引起了国内有关学者的注意，如郑州大学林诒勋等在他们的论文《紧急网络中的最小饱和流问题》中也探讨了最小饱和流的性质以及它与最大流的关系等方面的问题.

在国外，首先关注这一新研究领域的是日本东京中央大学的伊理正夫（Iri Mason）教授. 他以极其敏锐的眼光和视角审视了网络流规划领域这一新的发展，并把它视为 21 世纪网络流多值理论的新领域. 他在日本国内组织了相关的研究小组，开展了多方面的研究工作.

根据最近的通信和从网上获得的信息，他们的工作集中在以下两个方面：

在理论研究方面，研究在不同网络中求解网络最小流的方法. 例如，在 Tsukuba 大学的 Yamamoto 实验室，Yamamoto 正在研究用全局优化方法来求解网络最小流问题. 而在东京中央大学伊理正夫实验室，Kenichiro Takahashi 正在研究求解非循环多端网络的最小流问题. 中央大学高桥贤一郎研究了无闭路多端点网络的最小流问题. 在应用研究方面，日本筑波大学铃木助教授正在研究这种理论在交通方面的应用可能性问题，在其他国家尚未见相关的信息报道. 从以上情况来看，关于阻塞流理论的研究，在国内外都还未引起足够的重视. 为了使有关研究者对这一新的研究领域有初步了解并激发起进一步研究的兴趣，本书将介绍在国家自然科学基金资助下这一领域近十五年内的研究成果. 应当说，这些成果是不完全成熟的，但它们是作者研究工作的实录和总结，供感兴趣的同志在今后的研究工作中参考，希望它能起到抛砖引玉的作用.

3. 本书内容简介

本书是国家自然科学基金项目“阻塞流应用理论及其实证研究”（70571037）的技术总结报告，也是自 1994 年以来，在国家自然科学基金三次资助下研究阻塞流理论及其应用的总报告. 它是 2005 年出版的《阻塞流理论及其应用》的第二版. 15 年来，在 10 多名教授、副教授、博士生和硕士生的共同努力下，在这一领域取得了一点研究成果，尽管并不十分成熟，但毕竟是前人尚未深入涉足的领域. 把它们记录下来，供感兴趣的同行们参考借鉴，也是一件十分有意义的工作. 如能通过这些研究使某些研究者在相关领域中的研究工作受到启迪，或者避免某些重复的工作，撰写本书的目的也就达到了.

在第二版中，对第一版的阻塞流基础理论部分（上篇）基本未作改动，增加和修改的内容集中在阻塞流理论应用部分，它包括中篇和下篇共 7 章. 现简述各章的主要内容及研究结果.

上篇共 5 章，为阻塞流的基础理论部分.

第 1 章介绍阅读本书所必备的图论基本知识和与网络流规划相关的基本问题与主要算法，其中，最短路问题将与本书的内容有间接关系，故在此章中也作了简要介绍.

第 2 章介绍阻塞流的基本定义和基本定理，着重研究了阻塞流与阻塞截面的关系以及确定阻塞截面的数学方法.

第 3 章研究网络的最大阻塞流，即经典网络流理论中的最大流问题. 书中用饱和流的概念重新定义了网络最大流问题，给出了用饱和流的概念求解网络最大流的图单纯形算法，分析了这种方法的优点.

第 4 章专门研究网络最小阻塞流，即在最严重阻塞情况下通过网络的最大流量并定义为网络最小流，给出了求解网络最小流的分支定界法、双向增流算法和图单纯形算法，研究了求解网络无环最小流的理论和近似算法.

鉴于从理论上很难确定网络中各阻塞截面的截量数值，因而也无法确定网络中最小流的理论值. 故采用随机流动仿真的方法来验证网络最小流的理论计算值就十分必要. 第 5 章介绍随机流网络仿真的原理和基本方法，建立了随机流网络仿真模型，并对该模型的流动随机性、仿真的最小次数、网络中的回流处理等问题进行了分析，介绍了计算机仿真软件的设计方法. 对 30 个具体网络中的阻塞流仿真结果进行了统计与分析，给出了阻塞流值的概率分布规律，提出了流通网络的期望流通能力的概念，并定义了评价网络阻塞程度的网络流通性能指数.

中篇为阻塞流理论在交通网络防阻塞优化设计运行与控制上的应用.

第 6 章介绍交通网络防阻塞结构设计的基本原则，讲解防阻塞的最小流控制和最大流控制方法.

第 7 章建立以最小费用为目标的交通网络防阻塞设计的一般模型，用三个实例分析优化方法的合理性和可行性. 提出评价交通网络流通性能的指标，并介绍它们在评价交通网络防阻塞改造及交通网络单行道改造上的应用.

第 8 章讨论交通网络各路段内考虑阻塞影响时的最短时间流问题及最小风险时间流问题.

下篇为阻塞流理论在一般图中构造哈密顿圈上的应用研究.

将最小阻塞流模型应用在图论基础研究中是完全没有预料到的新方向. 众所周知，在一般图中寻找哈密顿圈的方法，普遍采用各种搜索技术，其存在的主要问题是算法的计算复杂性. 尽管近五十年来不少学者探索其多项式算法屡屡失败，但仍然有不少后继者还在不断探求它的好算法或较好算法. 其中，从网络最小阻塞流模型来探求结构化算法尚未见有任何文献报导. 在阻塞流理论的研究中，利用网络最小阻塞流与哈密顿轨之间的关系建立了哈密顿轨问题的无环最小支撑流模型. 通过这个模型可以把一步内构造无环最小支撑流这一难题分解成分

别可以在多项式时间内完成的两个阶段，从而为在一般图中构造哈密顿圈的技术提供了新的思路与方法. 下篇全面详细地介绍了作者经过 10 多年潜心研究这一算法的理论及进行 12000 余例实证研究的结果. 到目前为止尚未遇到反例. 作者期望通过大量的实证研究来验证这一算法的实用有效性，从而为学术研究和工程应用提供一种在一般图中构造哈密顿圈的实用有效工具. 如果这种算法能够像线性规划单纯形法那样，是一个实用的好算法，应当说这也是一个很幸运的结果. 因为有了它，不但可以在用相关定理（如范定理或者其它更新的定理）判定存在哈密顿圈的一般图中构造出至少一条具体的哈密顿圈，也可以对超出这些定理范围之外的一般图进行是否是哈密顿图的判定，这岂不也是一项有实用价值的成果. 如果这些研究结果还能进一步对数学家们在解决哈密顿图判定的理论研究上有所启迪和帮助，作者将会感到更加欣慰和满足.

第 9 章介绍通过无环最小支撑流的模型在一般图中构造哈密顿圈的自组织算法，论证了算法的多项式性质. 并通过在 12000 个有向图和一般图（包括自行设计的塔形图、四连通正多边形套装图、围城迷宫图、四正则连环图、平面和立体金字塔图、扇面蜂巢图中构造哈密顿轨（圈）问题的实证研究验证了方法的可行性和实用的有效性.

第 10 章在第 9 章的基础上，同时利用大棋盘由小棋盘链接的构造原理和方法，研究并解决广义象棋盘中的马步哈密顿圈问题、有洞棋盘中的马步哈密顿圈问题和正方棋盘中广义马步哈密顿圈问题并给出了它们的实证解，证明了这些马步哈密顿圈问题的 P 性质. 此外，用第 9 章提出的哈密顿圈构造算法在 $20 \times n(n = 5, \cdots, 100)$ 的系列大棋盘中构造哈密顿圈的实证方法，验证了该算法的快捷性.

第 11 章研究广义哈密顿圈问题. 它包括单源点多哈密顿圈和多源点多哈密顿圈问题. 给出了它们的界定和研究的实用价值，探讨了在一般图中构造广义哈密顿圈的算法.

第 12 章研究马步哈密顿圈在图像置乱加密技术上的应用，分析了传统方法的优缺点，提出了三种改进算法，提高了这一加密技术实用的可能性. 研究表明，这种加密方法的密钥库量大，安全性高，是数字图像加密传输的理想方案. 有了骑士巡游的多项式算法，及在广义棋盘和广义马步上的研究结果不但解决了它能实用的关键技术，也更加丰富了密钥库和置乱方法.

4. 致谢

十余年一瞬间. 回想在一个非共识领域内进行探索性研究的过程，作者深深感到自主创新的乐趣、艰辛和风险. 试想，如果没有国家自然科学基金的支持，没有基金评审专家们的鼓励，这项研究恐怕早就中断了. 本课题三次获得资助，

体现了国家自然科学基金鼓励自主创新的宗旨，但限于作者的能力和水平有限，成果可能没有达到期望的水平. 再加上阻塞流理论是网络流规划中的一个新分支，其中又涉及了哈密顿圈这一图论中的难题，很可能有不少学者对研究中的某些结果有不同看法，真诚希望读者对研究工作中的不足和问题提出批评指正，以促进这一研究方向的发展. 对此，作者将不胜感激.

参加本书第二版研究与编写工作的还有宁安琪、吴薇薇、雷仲魁、商红岩、黄孝鹏、孙秋艳、张冬青等，在此，对他（她）们的积极参与和出色的工作表示衷心的感谢.

宁宣熙

2008 年 12 月

目　　录

绪论

上篇　阻塞流理论基础

第 1 章　必备的图论与网络分析知识 ······ 3
1.1　图论中常用的名词 ······ 3
1.2　最短路问题 ······ 5
1.3　最大流问题 ······ 10
1.4　最小费用流问题 ······ 17
第 2 章　阻塞流的基本理论 ······ 27
2.1　阻塞流的基本概念与定义 ······ 27
2.2　网络的理论最小流通能力与其最小完全截集的关系 ······ 35
2.3　网络理论最小流通能力的确定方法 ······ 35
2.4　阻塞流与阻塞截面 ······ 37
第 3 章　网络的最大阻塞流问题 ······ 44
3.1　最大流问题的重新定义 ······ 44
3.2　最大流问题的图单纯形算法 ······ 45
3.3　图单纯形算法的计算复杂性分析 ······ 46
第 4 章　网络的最小阻塞流问题 ······ 48
4.1　求解网络最小流的分支定界法 ······ 48
4.2　求解网络最小流的双向增流算法 ······ 51
4.3　求解网络最小流的图单纯形算法 ······ 55
4.4　关于最小流性质的讨论 ······ 59
4.5　求解网络无环最小流的近似算法 ······ 60
4.6　最小流算法的计算机实现 ······ 68
第 5 章　交通网络随机流仿真研究 ······ 72
5.1　随机流动仿真模型的建立 ······ 72
5.2　交通网络随机阻塞流仿真软件设计 ······ 75
5.3　仿真结果的分析 ······ 77

中篇　阻塞流理论在交通网络设计与运行控制中的应用

第 6 章　阻塞流理论在交通网络设计与运行控制中的应用 …………………… 87
6.1　交通网络防阻塞设计的基本准则……………………………………… 87
6.2　最小流控制………………………………………………………………… 87
6.3　最大流控制方法…………………………………………………………… 92
第 7 章　随机流动网络防阻塞优化设计和改造研究 ……………………… 97
7.1　随机流动网络防阻塞优化设计的一般模型…………………………… 97
7.2　交通网络防阻塞的优化改造…………………………………………… 99
7.3　基于评价指标对随机流动网络优化改造及运行的仿真研究 ……… 102
***第 8 章　考虑拥堵的最短时间流问题及其算法研究** ……………………… 124
8.1　考虑路段拥堵的最短时间流问题 …………………………………… 124
8.2　考虑弧段阻塞的最小风险时间流问题 ……………………………… 130

下篇　阻塞流理论在一般图中构造哈密顿圈上的应用研究

第 9 章　阻塞流理论在一般图中构造哈密顿圈上的应用研究……………… 139
9.1　有向网络中哈密顿轨构造问题的网络流模型 ……………………… 139
9.2　在有向网络中构造无环最小支撑流的方法 ………………………… 141
9.3　在一般图中构造哈密顿圈的实证研究 ……………………………… 155
第 10 章　一般象棋盘中的马步哈密顿圈问题及其实证研究 …………… 204
10.1　前言………………………………………………………………………… 204
10.2　象棋盘中的马步哈密顿圈问题研究的基本理论……………………… 205
10.3　广义象棋盘中的马步哈密顿圈问题及其实证研究…………………… 209
10.4　有洞棋盘的马步哈密顿圈问题及其实证研究………………………… 212
*10.5　正方棋盘中广义马步哈密顿圈问题的若干研究结果 ……………… 224
10.6　大型象棋盘中的马步哈密顿圈实证解………………………………… 232
***第 11 章　广义哈密顿圈问题及其构造算法研究** ………………………… 233
11.1　广义哈密顿圈问题的界定及其研究的意义…………………………… 233
11.2　多哈密顿轨问题的支撑流模型及其构造算法………………………… 233
第 12 章　马步哈密顿圈(骑士巡游)在图像置乱加密技术上的应用 ……… 250
12.1　基于传统骑士巡游路线的置乱算法 ………………………………… 251
12.2　改进算法 1——改变骑士巡游矩阵 ………………………………… 254
12.3　改进算法 2——分块分层置乱的算法 ……………………………… 257
12.4　改进算法 3——骑士巡游路线与 Arnold 置乱相结合的算法 …… 260

参考文献………………………………………………………………………… 264

上篇　阻塞流理论基础

第 1 章　必备的图论与网络分析知识

1.1　图论中常用的名词

下面几章中将要涉及图论中的一些基本概念和名词，现作简要的说明.

1. 图

所谓图是由有限个代表孤立事物的点和表示事物间联系的线所构成. 在图论中，这些点称为顶点的集合，用 $V=\{v_1, v_2, \cdots\}$ 表示；顶点之间的连线称为边的集合，用 $E=\{e_1, e_2, \cdots\}$ 表示. 这个图就记为 $G=\{V, E\}$ 或 $G=\{V, E, \Psi\}$，Ψ 表示点与边之间的关系. 例如，图 1-1 所示的交通网就是图的一个典型例子，其中，S, A, B, C, D, E, T 7 个点代表 7 个城市，它们之间的边表示各城市之间的联系(如公路). 在图论中，一个顶点和一条边相连称为关联，与同一条边关联的两个顶点称为相邻，一个顶点与边关联的次数称为该顶点的次，具有奇次的顶点称为奇次点，具有偶次的顶点称为偶次点. 很显然，任何图中全部顶点次数的总和是个偶数. 图中若存在奇次点，则它们肯定是成对出现的. 图中的每条边可以用与其关联的两个顶点定义，如 $e_1=[S, A]$，$e_2=[S, B]$等. 在一般的图中，定义每条边与顶点的顺序无关，即 $e_1=[S, A]=[A, S]$. 这样的图称为无向图. 如果边是用顶点的有序对来定义，即令其一个顶点是始点，另一个顶点是终点，那么称该边为有向边，这时$[S, A]\neq[A, S]$. 全部由有向边构成的图称为有向图(图 1-2). 有向图中的边称为弧，记作(S, v_1)，(S, v_2)等.

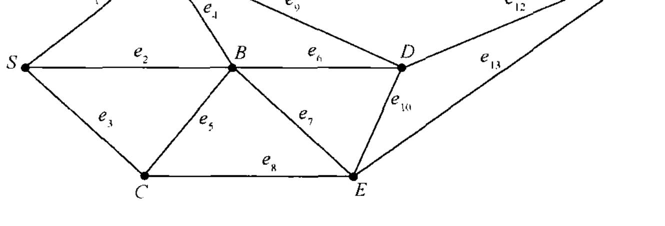

图 1-1　交通网络图

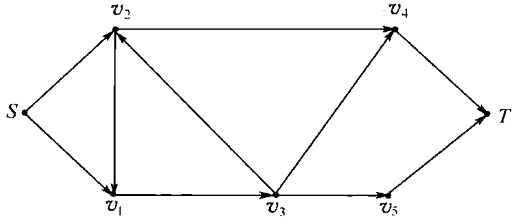

图 1-2　有向图

2. 子图和支撑子图

设有两个图 $G_1=\{V_1,E_1\}$,$G_2=\{V_2,E_2\}$. 如果图 G_1 中的点是图 G_2 中点的一部分,图 G_1 中的边是图 G_2 中边的一部分,即 $V_1\subseteq V_2$,$E_1\subseteq E_2$,则称 G_1 是 G_2 的子图,并且

(1) 若 $V_1=V_2$,$E_1\subset E_2$,则称 G_1 是 G_2 的支撑图. 在图 1-3 中,G_1 是 G_2 的支撑子图.

(2) 若 $V_3\subset V_2$,$E_3\subset E_2$,则称 G_3 是 G_2 的真子图. 在图 1-3 中,G_3 是 G_2 的真子图.

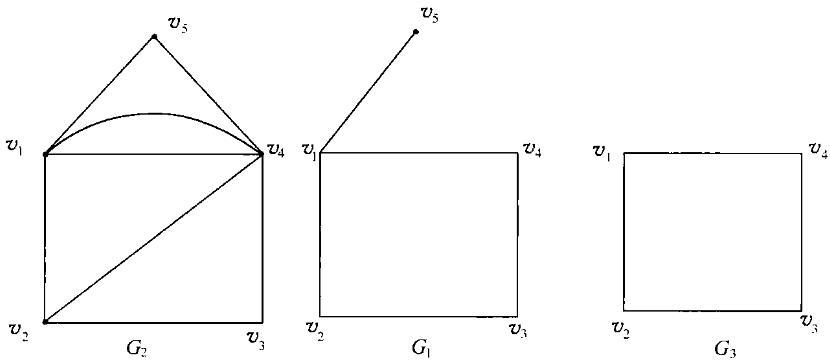

图 1-3　子图和支撑子图

3. 网络图

如果在上面的图中赋予各边一定的物理量,如表示两顶点之间的距离,这样的图称为网络图. 与各边有关的物理量称为该边的权,权可以是距离,也可以是时间、费用、容量等.

4. 链、路、圈和回路

在图中,任意两点之间由顶点和边相互交替构成的一个点不重复的序列称为

初等链. 例如，图 1-1 中，$A,e_4,B,e_5,C,e_8,E,e_{13},T$ 就是顶点 A 和 T 之间的一条初等链. 在本书中，如不特别说明时，将初等链简称为链.

在有向图中，如果链中每条边的方向是和链的走向一致，则该链称为路，例如，图 1-2 中，$S\to v_2\to v_4\to T$，$S\to v_1\to v_3\to v_2\to v_4\to T$ 都是由 S 到 T 的通路.

起点和终点相同的链称为闭链或圈，起点和终点相同的路称为回路.

5. 连通图和简单图

在一个图中，如果任意两点之间都有一条链相连，则称此图为连通图，否则称为非连通图. 图 1-1 和图 1-2 都是连通图. 如果去掉图 1-1 中的 e_{11},e_{12} 和 e_{13} 三条边，则成为非连通图.

一条边的两个端点是同一点时称为自环，两个顶点之间若有多条边时，则称为多重边. 既有自环又有多重边的图称为一般图，无自环也无多重边的图称为简单图.

1.2　最短路问题

1. 什么是最短路问题

在网络分析中最常见的是最短路问题. 假定图 1-4 是一个由城市 v_1 到城市 v_7 的有向交通图，弧旁的数字表示各条路线的距离，那么最短路问题就是寻找一条从城市 v_1 到城市 v_7 的最短路径. 如果弧旁的数字不是代表距离而是时间，那么所求的最短路是指总时间最短；如果弧旁的数字代表费用，那么最短路问题就是求一系列活动的总费用最少. 因此在这里最短路的概念是广义的. 把与弧相连系的距离、时间、费用等称为弧的权，那么最短路问题一般可描述如下：

设 v_A 和 v_B 是图 $G=\{V,E\}$ 中的任意两点，各边上的权为 w_{ij}（$[v_i,v_j]\in E$），最短路的问题就是寻找从 v_A 到 v_B 的道路 P，使该路的路权之和 $W(P)=\sum\limits_{[v_iv_j]\in P} w_{ij}$ 为最小.

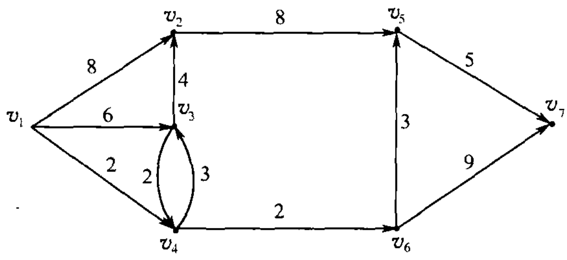

图 1-4　有向交通图

2. *求解最短路问题的基本思路*

最短路问题可以用线性规划的方法求解，但算法很不经济. 下面介绍的狄克斯托(Dijkstra)标号法是求解最短路问题的有效算法之一. 它的基本思路是逐点求最短路. 例如，图 1-4 中，如果 $v_1 \to v_4 \to v_6 \to v_5 \to v_7$ 是从 $v_1 \to v_7$ 的最短路，那么由 v_1 点出发沿这条最短路到达中间的任一点也是从 v_1 点到达该任意点的最短路. 否则在这两点之间还存在其他最短路，那么 $v_1 \to v_4 \to v_6 \to v_5 \to v_7$ 就不是从 v_1 到 v_7 的最短路，与原假设矛盾. 因此，从起点开始逐点寻找到邻近点的最短路，直到将最短路延伸到指定的终点为止，就自然找到了从起点到终点的最短路.

3. Dijkstra *算法*

求解最短路问题的标号法是 Dijkstra 于 1959 年提出的，适用于各边上的权 $w_{ij} > 0$的情况，它被公认是最有效的算法之一.

标号法是通过对图上各点进行标号来寻求最短路的方法. 每个点的标号共分两种：一种叫临时标号，用 T 表示；一种叫永久标号，用 P 表示. T 标号表示从始点到该点最短路的上界，根据到该点路线的不同有可能变化. P 标号表示从始点到该点的最短路权，它的值不再改变. 算法开始时，令 $P(v_s)=0$ 且 $T(v_i)=\infty, i=1, 2, \cdots, t$. 标号过程分两步：

第 1 步　修改 T 标号. 假定 v_i 是新产生的 P 标号点，考察以 v_i 为始点的所有弧段 v_iv_j，如果 v_j 是 P 标号点，则对 v_j 点不再进行标号；如果 v_j 点是 T 标号点，则进行如下的修改：

$$T(v_j) = \min[T(v_j), P(v_i) + w_{ij}],$$

其中，方括号内的 $T(v_j)$代表 v_j 点旧的 T 标号值.

第 2 步　产生新的 P 标号点，其原则如下：在现有的 T 标号中将值最小者改为 P 标号.

重复以上步骤直到终点的 T 标号改为 P 标号为止.

例 1-1　用图 1-4 来说明 Dijkstra 标号法的具体步骤.

首先从始点 v_1 开始，令 $P(v_1)=0$ 为永久标号，其余各点赋予 T 标号，

$$T(v_i) = \infty \quad i = 2, 3, \cdots, 7.$$

第 1 次迭代

(1) 考察以永久标号点 v_1 为始点的弧 v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4. 因为 v_2, v_3, v_4 均为 T 标号点，所以修改这 3 点的 T 标号如下：

$$T(v_2) = \min[T(v_2), P(v_1) + w_{12}] = \min[\infty, 0+8] = 8,$$
$$T(v_3) = \min[T(v_3), P(v_1) + w_{13}] = \min[\infty, 0+6] = 6,$$
$$T(v_4) = \min[T(v_4), P(v_1) + w_{14}] = \min[\infty, 0+2] = 2.$$