21世纪高等院校教材

力学与电磁学

曹秀吉 金惠强 主编

NEUPRESS
东北大学出版社

力学与电磁学

曹秀吉　金惠强　主编

东北大学出版社

·沈　阳·

©曹秀吉　金惠强　2003

图书在版编目(CIP)数据

力学与电磁学／曹秀吉，金惠强主编．—沈阳：东北大学出版社，2003.8
ISBN 7-81054-925-1

Ⅰ.力…　Ⅱ.曹…　Ⅲ.①力学—高等学校—教材 ②电磁学—高等学校—教材　Ⅳ.①03②0441

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 060145 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331(市场部)　83680267(社务室)
传真：024—83680180(市场部)　83680265(社务室)
E-mail：neuph@neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：东北大学印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：170mm×228mm
印　　张：23.375
字　　数：468 千字
出版时间：2003 年 8 月第 1 版
印刷时间：2003 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：2100 册
责任编辑：王兆元
责任出版：秦　力
封面设计：王金玲

定　　价：29.50 元

前　言

一般高等院校以“高素质应用型人才”为培养目标，要实现这一目标，必须有相应的培养模式，但无论采用哪种培养模式，都要求各门理论课程、各个实践环节对自己在总体知识结构、能力结构、素质结构中准确定位——地位、作用及教学目标。本书正是在学院深化教学管理体制改革——实施全面学分制、深化教育内容、方法、手段改革——的背景下编写的。

鉴于物理学在自然科学和工程技术中的基础性，及该课程在人才培养过程中的功能定位，本教材力求通过教学过程培养学生的初步工程意识与初步工程实践能力及创新思想。为配合同学们学习，在前言中谈一下学习方法。

大学物理在分析、讨论不同的研究对象时采用了不同的研究方法，这些基本的研究方法是大学物理的重要组成部分。另外，物理学作为工程技术科学的基础，除它的基本理论外，它的科学思想、科学方法也是其他工程学科科学思想和方法的基础。

1. 熟悉多种物理模型。

在一定条件下对实际物体进行抽象，把复杂的、具体的物体用简单的理想化模型来代替，从而简化条件、突出主要矛盾，便于找出其规律，这是一种科学的方法，如质点、刚体、理想气体、点电荷等。

2. 采用类比分析方法。

自然界的对称性导致了物理规律的对称性，科学家们从这一规律出发取得了巨大的成功。如库仑将电与磁类比，总结出库仑定律；法拉第进行了磁生电和电生磁的研究，揭示出具有划时代意义的电磁感应定律；其他如质点与刚体的运动规律、实物粒子的波粒二象性与波的波粒二象性等，都可以通过类比的方法加深理解和升华认识。

3. 深刻理解物理概念。

物理概念是物理学的重要组成部分，深刻理解这些概念是学好物理学的基础，一般要从以下几个方面来理解和掌握这些概念：

①为什么要引入这一物理概念？

②该物理概念的物理意义是什么？

③该物理概念的定义条件是什么？

④该物理概念的定义是什么？

⑤该物理概念的定义式是什么？

⑥该物理概念的单位与量纲是什么？

物理中的概念较多，掌握起来似乎很难，但对每一概念都从上述几方面去分析、理解和记忆，养成这种习惯就能取得好的效果。

4. 牢固掌握基本规律。

物理规律是对物质运动规律的科学总结，理解和掌握这些基本规律，应用于科学探索和工程实际，是学习物理的目的之一，对物理规律的理解应包括规律的适用条件、规律的物理本质及对物理规律数学表达式的理解和应用。

5. 提高物理实验技能。

物理学是一门实验科学，物理规律的发现和物理理论的建立都是以实验为基础并受到实践检验的，物理实验是学生进入大学后受到系统的实验技能训练的开端，通过大学物理实验课程，理解实验原理，熟悉常用仪器的基本原理和性能，掌握使用方法，初步了解一些物理量的测量方法，培养并逐步提高学生观察和分析实验现象的能力及理论联系实际的独立工作能力，树立初步的工程意识。在实验课的学习中，要做到：

①充分做好实验准备；

②认真完成实验操作；

③正确分析处理实验结果。

6. 逐步树立工程意识。

因此，树立工程意识和强化工程实践能力对于实现“高素质应用型人才”的培养目标十分重要。在物理课的学习中，要树立工程意识，首先是通过理论课学习。现在的大学物理教材，每一章的内容都包括该章物理知识在工程实践中的应用，有的教材还专门用附录写出“物理学与技术”这些内容，同学们要认真阅读，很好地理解现代技术如何运用物理思想和物理规律。培养工程意识的第二种方法是进行初步工程实践，如在教师的指导下撰写科技论文，构思设计性实验，到企业、科研院所考察，参与课外科技活动等等。

本书第1~5章由曹秀吉编写，第6~9章由金惠强、关莹编写。由于编者水平所限，本书尚有不足之处，请同行批评指正。

编　者

2003年3月于沈阳

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目 录

力 学

电 磁 学

力　学

力学是研究机械运动性质与规律及其应用的一门科学。以牛顿定律为基础的力学称为经典力学。经典力学有其局限性:在高速领域被狭义相对论取代,在微观领域被量子力学取代。即使如此,经典力学还是十分重要的。经典力学是一般工程技术(例如机械制造、土木工程、航空航天工程等)的理论基础,经典力学的实用性是必须学习经典力学的首要原因,经典力学又是整个物理学的基础;动量、角动量、能量等是物理学的基本概念,动量守恒、角动量守恒、能量守恒等都是自然界的普遍规律,而这些都是经典力学的基本内容。物理学是一门改变人类世界的科学,要学好物理学首先要学好经典力学。

1　质点运动学

质点运动学侧重用几何学的观点研究质点机械运动状态随时间变化的关系。本章主要内容为:位置矢量、位移、速度和加速度等基本概念,质点的曲线运动和相对运动等。

1.1　质点运动的描述

1.1.1　参照系、坐标系、质点

自然界中所有的物体都在不停地运动,绝对静止不动的物体是不存在的。运动是物质存在的形式,是物质的固有属性,运动和物质是不可分割的。这就是运动的绝对性。例如在地面上相对静止的物体都随地球一起以$3.0\times10^4\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$的速度绕太阳运动,而太阳又以$3.0\times10^5\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$速度在银河系中运动。但是,要描述一个物体的机械运动,必须选择另一个运动物体或几个相互间相对静止的物体作为参考,再研究这个运动物体是如何相对于参考物体运动的。以

上在描述物体运动时被选作参考的物体称为参照系。

在运动学中，参照系的选择可以是任意的。在实际问题中，参照系选择既要考虑问题的性质和需要，又要力求使对运动的描述变得简单。例如，确定车辆的位置时，可选用固定于地面上的房子或路牌作参照系，这样的参照系通常叫地面参照系。在实验室中确定某一物体的位置时，可选实验室的墙壁或固定的实验桌作参照系，这样的参照系就叫实验室参照系。同一物体的运动选择不同的参照系，对物体运动描述的结果是不相同的。例如，加速上升的升降机天花板上一松动螺钉的下落过程，以升降机为参照系，螺钉的初速为零，作加速下落的直线运动；以地面为参照系，螺钉以脱落时升降机速度为初速作竖直上抛运动。在不同参照系中，对同一物体的运动具有不同的描述，叫做运动描述的相对性。运动描述的相对性表明，参照系的选择对描述一个物体的运动具有重要的意义。当研究一个物体的运动时，必须明确地选择恰当的参照系，只有选定了参照系，运动的描述才有意义。以后还会看到，凡是描述物体运动状态的物理量都具有相对性，如位置矢量、速度矢量等。

参照系选定之后，为了定量地描述一个物体相对于此参照系的位置，需在此参照系上建立固定的坐标系。最常用的坐标系是笛卡儿直角坐标系。

任何物体都有一定的大小、形状和内部结构。通常情况下，物体运动时，内部各点的运动情况常常是不相同的。因此要精确描写一般物体的运动并不是一件简单的事。为使问题简化，可以采用抽象的办法：如果物体的大小和形状在所研究的问题中不起作用，或所起的作用可以忽略不计，就可以近似地把此物体看做一个没有大小和形状的理想化模型，称为质点。质点仍然是一个物体，它具有质量，同时它已被抽象化为一个几何点。质点是实际物体在一定条件下的抽象。理想化模型的引入在物理学中是一种常见的、重要的科学分析方法，在以后的课程中还将引入一系列理想模型，例如刚体、理想气体、点电荷等。把物体抽象为质点的方法具有很大的实际意义和理论价值。如在天文学中把庞大的天体抽象为质点的方法已获得极大的成功。从理论上讲，可以把整个物体看成由无数个质点所组成的质点系，从分析研究这些最简单的质点入手，就可能把握整个物体的运动，所以质点运动是研究物体运动的基础。物体抽象为质点需要注意：①同一个物体在一个问题中可抽象为质点，在另一个问题中则不能简化为质点。例如研究地球绕太阳公转时，由于地球至太阳的平均距离（约 1.5×10^{8}km）比地球的半径（约为 6370km）大得多，地球上各点相对于太阳的运动可以看做是相同的，可以把地球当作质点；但研究地球自转时，地球上各点的运动情况大不相同，地球就不能当作质点处理了。②注意区别质点与小物体。物体再小（原子核的线度约为 10^{-15}m）也有大小、形状，而质点为一几何点，它没有大小，在空间占有确切的位置。

1.1.2 位置矢量、位移

(1)位置矢量

空间任一点 P 的位置，在直角坐标系中可以用一组坐标 (x,y,z) 来表示，也可以用从坐标原点向 P 点引一有方向的线段 $\boldsymbol{r}$ 来表示。如图 1.1 所示。$\boldsymbol{r}$ 称为位置矢量，简称位矢，也叫矢径。

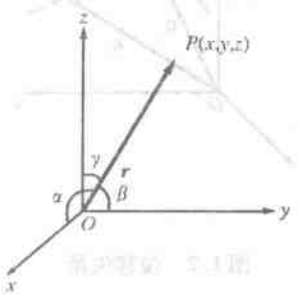

图 1.1 质点的位置表示

矢径的端点就是质点的位置，矢径的笛卡儿坐标系坐标轴上的投影分别为 x,y,z。位置矢量可表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

式中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为沿 x,y,z 轴的单位矢量。位置矢量的大小为

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

位置矢量的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

式中 α,β 和 γ 分别是 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴、y 轴和 z 轴之间的夹角。

质点运动时，质点的空间位置随时间的变化关系可用矢径或坐标表示为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

或

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{1.2}$$

式(1.1)和式(1.2)称为质点的运动方程。

当质点在 xOy 平面内运动时，则式(1.2)简化为

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

知道了运动方程，质点的整个运动情况也就清楚了，所以运动学的主要任务之一就是根据各种问题的具体条件，求解质点的运动方程。

运动质点在空间所经过的径迹称为轨道。轨道为直线的运动，称为直线运动；轨道为曲线的运动，称为曲线运动。从式(1.2)中消去 t 后可得轨道方程，而式(1.2)是轨道的参数方程。例如一运动质点的运动方程为

$$\boldsymbol{r} = a\cos\omega t\, \boldsymbol{i} + a\sin\omega t\, \boldsymbol{j}$$

由 $x = a\cos\omega t$，$y = a\sin\omega t$ 消去 t，便得其轨道方程为

$$x^2 + y^2 = a^2$$

位置矢量具有大小、方向，服从几何加法。位置矢量具有瞬时性，质点在

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

运动过程中,不同时刻的位置矢量不同。位置矢量描述质点的运动状态,前面已经讲过,它具有相对性。运动质点的某一空间位置,用不同的坐标系来描写,表达式是不一样的。

式(1.1)表明:质点的实际运动是各分运动的矢量合成,这个由空间的几何性质所决定的各分运动和实际运动的关系叫运动的叠加(或合成)原理。

(2)位移

设曲线$\overset{\frown}{AB}$是质点轨道的一部分,如图1.2所示。t时刻质点在A点处,$t+\Delta t$时刻,质点到达B点处。A,B两点的位置分别由$\boldsymbol{r}_A$和$\boldsymbol{r}_B$来表示。在Δt时间内,质点位置的变化可以用由A到B的有向线段$\overrightarrow{AB}$来表示,称为质点的位移。显然

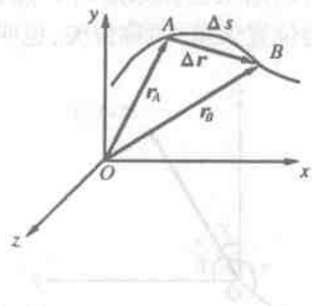

图1.2　位移矢量

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A = \Delta\boldsymbol{r} \qquad (1.3)$$

$\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A$表示矢径$\boldsymbol{r}$在$\Delta t$时间内的增量,所以用$\Delta\boldsymbol{r}$表示。$\Delta\boldsymbol{r}$即质点在$t$到$t+\Delta t$这一段时间内的位移。

应该注意:

①位移表示质点位置的改变,并非质点所经历的路程。如图1.2所示,$\Delta\boldsymbol{r}$为矢量,它的量值$|\Delta\boldsymbol{r}|$即割线AB的长度,而路程Δs是标量,即曲线$\overset{\frown}{AB}$的长度。只有在时间Δt趋近于零时,Δs和$|\Delta\boldsymbol{r}|$方可视为相等。即使在直线运动中,位移和路程也是两个截然不同的概念。

②$|\Delta\boldsymbol{r}|$不等于Δr。$\Delta r=r(t+\Delta t)-r(t)$,它反映$\Delta t$时间内质点相对于原点的径向长度增加。一般地说,$|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta r$,如图1.2所示。

③位置矢量和位移在量值上都表示长度,常用单位为米(m),千米(km)和厘米(cm)。

1.1.3　速度、加速度

(1)速度

位移$\Delta\boldsymbol{r}$和发生这段位移所经历的时间Δt的比称为质点在这一段时间内的平均速度。以$\overline{\boldsymbol{v}}$表示平均速度,则

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \qquad (1.4)$$

平均速度是矢量,它的方向就是位移的方向。

当 Δt 趋于零时,式(1.4)的极限,即质点位置矢量对时间的变化率,称为质点在时刻 t 的瞬时速度,也叫即时速度,简称速度。用 $\boldsymbol{v}$ 表示速度,则

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.5}$$

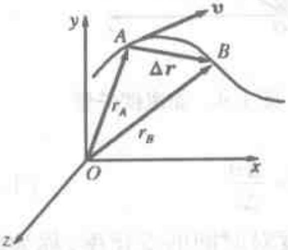

图 1.3 速度矢量

速度为矢量,速度的方向就是 Δt 趋于零时 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向,如图 1.3 所示,即质点运动轨道在 A 点的切线方向。因此,质点在 t 时刻的速度的方向就沿着该时刻质点所在处运动轨道的切线而指向运动的前方。

速度的大小叫速率,以 v 表示,则有

$$v = |\boldsymbol{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| \tag{1.6}$$

若以 Δs 表示在 Δt 时间内质点沿轨道所经过的路程,当 Δt 趋于零时,$|\Delta \boldsymbol{r}| = \Delta s$,由此可得

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.7}$$

上式表明速率的大小又等于质点所走过的路程对时间的变化率。一般地

$$v = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| \neq \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

将式(1.1)代入式(1.5),由于 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 不随时间改变,所以有

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k} \tag{1.8}$$

速度沿三个坐标轴的分量 v_x, v_y, v_z 分别为

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{1.9}$$

速度的大小为

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{1.10}$$

速度是矢量,既有大小,又有方向,服从几何加法;速率是标量,只有大小,没有方向。速度是描述质点运动状态的物理量,对于不同的参照系,质点速度的大小、方向是不同的,速度具有相对性。

在国际单位制即 SI 制中,速度的单位是米·秒$^{-1}$($\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)。

一些物体运动速度大小:光在真空中速度为 $3.0 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$,北京正负电子对撞机中电子速度为 0.999 999 98 倍的光速,空气中声速(0℃)为 $3.3 \times 10^2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$,人跑步(最大)速度约为 $11\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。

(2) 加速度

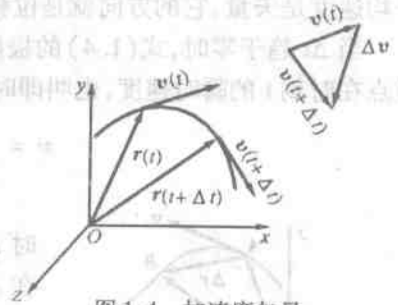

图 1.4 加速度矢量

在变速运动中，质点的运动速度是随时间变化的，而质点速度的变化情况要用加速度来表示。

若以 $\boldsymbol{v}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$ 分别表示质点在 t 时刻和 $t+\Delta t$ 时刻的速度，如图 1.4所示。则在这段时间内的平均加速度 $\overline{\boldsymbol{a}}$ 由下式定义：

$$\overline{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1.11}$$

当 Δt 趋于零时，此平均加速度的极限，即速度对时间的变化率，称为质点在时刻 t 的瞬时加速度，简称加速度，以 $\boldsymbol{a}$ 表示加速度，则有

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1.12}$$

加速度是矢量，是速度对时间的变化率，因此，不论是速度的大小发生变化，或者是速度的方向发生变化，或者是速度的大小和方向同时发生变化，都有加速度。

把式(1.5)代入式(1.12)得

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.13}$$

把式(1.8)代入式(1.12)得

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \tag{1.14}$$

加速度沿三个坐标轴的分量分别为

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2},\quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2},\quad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.15}$$

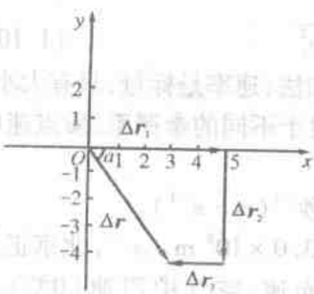

图 1.5 例 1.1 图

加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1.16}$$

加速度的单位是米·秒$^{-2}$($\mathrm{m \cdot s^{-2}}$)。

例 1.1 汽车向东行驶 5 km，又向南行驶 4 km，再向西行驶 2 km，求汽车合位移的方向和大小。

解 取向东为 x 轴的正方向，向北为 y 轴正方向建立直角坐标系，如图 1.5 所示，则对

第一位移矢量 $\Delta \boldsymbol{r}_1$ 有 $\Delta x_1 = 5\ \mathrm{km}$, $\Delta y_1 = 0$;

对第二位移矢量 $\Delta \boldsymbol{r}_2$ 有 $\Delta x_2 = 0$, $\Delta y_2 = -4\ \mathrm{km}$;

对第三位移矢量 $\Delta \boldsymbol{r}_3$ 有 $\Delta x_3 = -2\ \mathrm{km}$, $\Delta y_3 = 0$。

由位移定义得

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} = \Delta x\,\boldsymbol{i} + \Delta y\,\boldsymbol{j}$$

$$|\Delta \boldsymbol{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

此处

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 5 + 0 - 2 = 3\ \mathrm{km}$$

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 = -4\ \mathrm{km}$$

$$|\Delta \boldsymbol{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5\ \mathrm{km}$$

合位移与 x 轴夹角为

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \arctan\left(\frac{-4}{3}\right) = -53.1°$$

例 1.2 一质点在 Oxy 平面内运动，其运动方程为 $x = 4t$, $y = 6 - 2t^2$，式中 x, y 以 m 计，t 以 s 计。

①求质点的轨道方程；

②求 2 s 末质点的位置矢量、速度和加速度；

③在什么时刻，质点的位置矢量与速度矢量相互垂直？

④在什么时刻，质点离原点最近？其距离是多少？

解 ①由运动方程 $x = 4t$ 和 $y = 6 - 2t^2$ 消去 t 得轨道方程为

$$y = 6 - 2t^2 = 6 - 2\left(\frac{x^2}{16}\right) = 6 - \frac{x^2}{8}$$

②位置矢量 $\boldsymbol{r} = 4t\boldsymbol{i} + (6 - 2t^2)\boldsymbol{j}$，第 2 s 末位置矢量 $\boldsymbol{r}(2)$ 为

$$\boldsymbol{r}(2) = 8\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$$

速度矢量 $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 4\boldsymbol{i} + (-4t)\boldsymbol{j} = 4\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j}$，第 2 s 末速度 $\boldsymbol{v}(2)$ 为

$$\boldsymbol{v}(2) = 4\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j}$$

加速度矢量 $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -4\boldsymbol{j}$，第 2 s 末加速度仍为 $-4\boldsymbol{j}$，本题加速度大小为 $4\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$，方向沿 y 轴负方向。

③由 $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{v}$ 得 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = 0$，即 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = xv_x + yv_y = 0$，由此得

$$4t \times 4 + (6 - 2t^2) \times (-4t) = 16t - 24t + 8t^3 = 8t^3 - 8t = 0$$

由上式解得 $t_1 = 0$, $t_2 = 1\ \mathrm{s}$, $t_3 = -1\ \mathrm{s}$（舍去）；所以 $t = 0$ 和 $t = 1\ \mathrm{s}$ 时位置矢量与速度矢量相互垂直。

④质点到原点的距离 r 为

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{16t^2 + (6 - 2t^2)^2} = \sqrt{4t^4 - 8t^2 + 36} = 2\sqrt{t^4 - 2t^2 + 9}$$

由$\frac{dr}{dt}=0$得　　$4t^3 - 4t = 0$

解得 $t_1 = 0, t_2 = 1$ s, $t_3 = -1$ s(舍去)。而 $t_1 = 0, r_1 = 6$ m; $t_2 = 1$ s, $r_2 = 5.66$ m。所以 $t = 1$ s时质点离原点最近,距离为5.66 m。

例1.3　一质点以初速度 v_0 作直线运动,所受合外力与其速度成正比(设比例系数为 k),试求 t 时刻的速度与位置。

解　质点沿直线运动,取该直线为 x 轴,当 $t=0$ 时,$x=0$(原点)$v=v_0$。

在任意时刻 t 质点的加速度为

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv$$

分离变量　　$\frac{dv}{v} = -k dt$

积分得　　$\ln v = -kt + C$

初始条件为:$t=0$ 时,$v=v_0$,故常数 $C=\ln v_0$

代入上式　　$v = v_0 e^{-kt}$

由　　$v = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt}$

积分得　　$\int_{x_0}^{x} dx = v_0 \int_0^t e^{-kt} dt = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + C'$

代入初始条件得　　$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$

1.1.4　质点运动学的两类问题

有了运动方程,不仅可以知道质点任意时刻所处的位置,而且通过微分还可以确定其速度和加速度。反过来,若已知质点的速度或加速度,则根据初始条件、通过积分可以建立质点的运动方程。这就构成了常说的运动学的两类问题。第一类问题通过前面的例题已做过讨论,下面仅以一维运动为例说明如何建立运动方程。掌握了基本方法后,读者不难自行推广到二维和三维运动情况。

一维运动中,位移、速度和加速度各矢量全都在同一直线上,因此可以把各量当标量来处理。设质点的直线运动沿 x 轴进行,显然质点的坐标 x(质点的位置)是随时刻 t 而改变的。即

$$x = x(t)$$

x 为正值表示质点的位置在原点的右边(x 轴正向),x 为负值表示质点在原点左边。相应地,瞬时速度、瞬时加速度分别为

$$v=\frac{dx}{dt},\quad a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$$

v 和 a 的正负表示它们指向沿 x 轴正方向或沿 x 轴负方向。a 大于零或小于零并不表示质点是加速运动或减速运动。a 与 v 同向表示质点加速运动，a 与 v 反向表示质点减速运动。

例 1.4 设质点沿 x 轴作匀加速直线运动。已知其加速度 a 为一恒量，且 $t=0$ 时刻，质点的初位置为 x_0，初速度为 v_0。确定任一时刻质点的运动状态。

解 由 $a=\frac{dv}{dt}$ 得 $dv=adt$，两边积分得

$$\int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t adt$$

即
$$v-v_0=at \quad 或 \quad v=v_0+at \tag{①}$$

再由 $v=\frac{dx}{dt}$ 得 $dx=vdt=(v_0+at)dt$，然后对两边积分得

$$\int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t(v_0+at)dt$$

即
$$x-x_0=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \quad (位移公式) \tag{②}$$

或
$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \quad (运动方程) \tag{③}$$

若由
$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$

便有
$$vdv=adx$$

对两边积分
$$\int_{v_0}^{v}vdv=\int_{x_0}^{x}adx$$

得
$$\frac{1}{2}(v^2-v_0^2)=a(x-x_0)$$

或
$$v^2-v_0^2=2a(x-x_0) \tag{④}$$

以上式①，②，③，④是匀加速直线运动的基本公式。

例 1.5 如图 1.6 所示，几个不同倾角的光滑斜面，有共同的底边，顶点也在同一竖直面上。当从各斜面顶端同时释放物体(视为质点)时，试问沿哪个斜面下滑的物体最先到达底端?

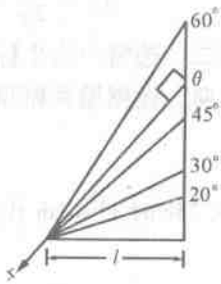

图 1.6 例 1.5 图

解 选沿倾角 θ 的斜面下滑的物体来研究，质点作匀加速直线运动。取此斜面顶端为坐标原点，x 轴沿斜面向下。沿 x 方向物体下滑的加速

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com