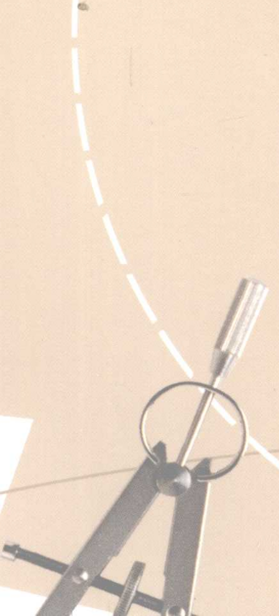
单墫 主编

数学奥林匹克

命题人讲座

集合与对应

单墫 著



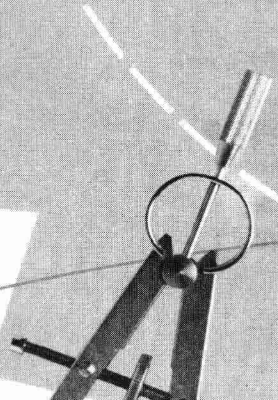
上海科技教育出版社

单墫 主编

数学奥林匹克命题人讲座

集合与对应

单墫 著



上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

集合与对应/单墫编著. 一上海:上海科技教育出版社,2009.1

(数学奥林匹克命题人讲座/单墫主编)

ISBN 978-7-5428-4645-7

Ⅰ.集… Ⅱ.单… Ⅲ.数学课—中学—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 106308 号

数学奥林匹克命题人讲座

集合与对应

单 墫 主编

单 墫 著

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 技 教 育 出 版 社 出版发行

(上海市冠生园路 393 号 邮政编码 200235)

www.ewen.cc www.sste.com

全国新华书店经销 上海市印刷七厂有限公司印刷

开本 890×1240 1/32 印张 11.625 字数 298 000

2009 年 1 月第 1 版 2009 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5428-4645-7/O·570

定价:27.00 元

丛书序

读书，是天下第一件好事。

书，是老师。他循循善诱，传授许多新鲜知识，使你的眼界与思路大开。

书，是朋友。他与你切磋琢磨，研讨问题，交流心得，使你的见识与能力大增。

书的作用太大了！

这里举一个例子：常庚哲先生的《抽屉原则及其他》(上海教育出版社，1980 年)问世后，很快地，连小学生都知道了什么是抽屉原则。而在此以前，几乎无人知道这一名词。

读书，当然要读好书。

常常有人问我：哪些奥数书好？希望我能推荐几本。

我看过的书不多。最熟悉的是上海的出版社出过的几十本小册子。可惜现在已经成为珍本，很难见到。幸而上海科技教育出版社即将推出一套"数学奥林匹克命题人讲座"丛书，帮我回答了这个问题。

这套丛书的书名与作者初定如下：

陆洪文	《解析几何》
施咸亮	《代数函数与多项式》
熊　斌	《函数迭代与函数方程》
陈　计　季潮丞	《代数不等式》
曹　纲　叶中豪	《重心坐标与平面几何》
冯志刚	《初等数论》
单　墫	《集合与对应》《数列与数学归纳法》
刘培杰	《组合问题》
任　韩　田廷彦	《图论·组合几何》

唐立华　　　　　《向量与立体几何》

邵嘉林　　　　　《复数·三角函数》

显然，作者队伍非常之强。老辈如陆洪文先生、施咸亮先生都是博士生导师。他们不仅在代数数论、函数逼近等领域的研究上取得了卓越的成绩，而且十分关心数学竞赛。中年如陈计先生于不等式，叶中豪先生于平面几何，都是国内公认的首屈一指的专家。其他各位也都是当下国内数学奥林匹克的领军人物。如熊斌、冯志刚是 2008 年 IMO 中国国家队的正副领队、中国数学奥林匹克委员会委员。他们为我国数学奥林匹克做出了重大的贡献，培养了很多的人才。2008 年 9 月 14 日，“国际数学奥林匹克研究中心”在华东师范大学挂牌成立，担任这个研究中心主任的正是多届 IMO 中国国家队领队、华东师范大学数学系副教授熊斌。又如邵嘉林先生，他指导过的张成同学获得了第 49 届 IMO 的金牌。

这些作者有一个共同的特点：他们都为数学竞赛命过题。

如：

设数 a 具有以下性质：对于任意四个实数 x_1, x_2, x_3, x_4，总可以取整数 k_1, k_2, k_3, k_4，使得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}((x_i-k_i)-(x_j-k_j))^2\leqslant a,$$

求这样的 a 的最小值。

这是施咸亮先生供给我国国家集训队选拔的试题。

又如：

设 $S=\{1,2,\cdots,2005\}$。若 S 中任意 n 个两两互素的数组成的集合中都至少有一个素数，试求 n 的最小值。

这是唐立华先生供给西部数学奥林匹克的试题。

叶、熊、冯等几位先生供给竞赛的题举不胜举，这里就不罗列了。

命题人讲座，是田廷彦先生的创意。

命题人写书，富于原创性。有许多新的构想、新的问题、新的解法、新的探讨。新，是这套丛书的一大亮点。读者一定会从这套丛书中学到很多新的知识，产生很多新的想法。

新，会不会造成深、难呢？

这套书当然会有一定的深度，一定的难度。但作者是命题人，充分了解问题的背景(如刘培杰先生就曾专门研究过一些问题的背景)，写来能够深入浅出，“百炼钢化为绕指柔”。另一方面，倘若一本书十分浮浅，一点难度没有，那也就失去了阅读的价值。

读书，难免遇到困难。遇到困难，不能放弃。要顶得住，坚持下去，锲而不舍。这样，你不但读懂了一本好书，而且也学会了读书，享受到读书的乐趣。

书的作者，当然要努力将书写好。但任何事情都难以做到完美无缺。经典著作尚且偶有疏漏，富于原创的书更难免有考虑不足的地方。从某种意义上说，这种不足毋宁说是一种优点：它给读者留下了思考、想象、驰骋的空间。

如果你在阅读中，能够想到一些新的问题或新的解法，能够发现书中的不足或改进书中的结果，那就是古人所说的“读书得间”，值得祝贺！

我们欢迎各位读者对这套丛书提出建议与批评。

感谢上海科技教育出版社，特别是编辑卢源先生，策划组织编写了这套书。卢编辑认真把关，使书中的错误减至最少，又在书中设置了一些栏目，使这套书增色很多。

单　墫

2008 年 10 月

前　言

这本《集合与对应》分为两个部分，第一部分为集合，第二部分为对应，由以前写的两本小册子《集合及其子集》与《对应》合并后经适当修订而成。

集合论，是全部数学的基础。

数学大师康托尔(Cantor)建立了基数、序型等重要概念，将研究从有限集推进到无限集，创立了集合论这一数学分支。

近 30 年来，随着组合数学的蓬勃发展，关于有限集及其子集族，又有很多的研究，得出了很多重要而且优美的结果。

“对应”也是一个极基本的数学概念。

人类在上古时代就已经知道把自己的手指或石子与货物(牛、羊等等)对应起来，进行计数。随着时间的推移，对应的作用越来越大，地位越来越重要。

几何中的各种变换，数学分析中的各种函数，都是对应的例子。

现代数学中，同态、同构、同伦、同胚、……，无一不是具有某种性质的对应。各种各样的“表示”，实质上也就是各种各样的对应。

为了计算一个集合的元素个数，在组合数学中，常常利用这个集合与另一个集合之间的对应关系，这种方法称为“对应原理”。

数学证明中，也常常出现“对应”这个幽灵。

法尔廷斯(G. Faltings)解决莫德尔猜想，怀尔斯(A. J. Wiles)证明费马大定理，其中都运用了一系列的对应。

这本小册子通过许多初等问题介绍了集合与对应，希望能起到抛砖引玉的作用。

特别说明，本书中所谓自然数及符号 N 均指正整数，不包括“0”。

目 录

第三讲 有限集的子集

第四讲 各种子集族

第八讲 卡塔兰数

第九讲 表示

第一部分　集合

第一讲　集　合

1.1　集　合

知识桥

具有某种性质的事物，它们的全体称为一个**集合**. 这些事物称为这个集合的**元素**.

集合简称为**集**. 元素简称为**元**.

例如，某一学校的学生组成一个集合. 某国的官员组成一个集合. 地球上的老鼠组成一个集合等等.

正整数(自然数)组成一个集合，通常记为 **N**.

整数组成一个集合，通常记为 **Z**.

有理数组成一个集合，通常记为 **Q**.

实数组成一个集合，通常记为 **R**.

复数组成一个集合，通常记为 **C**.

平面上的点组成一个集合，通常称为平面点集.

集合 A 中的元素，如果有无限多个，那么 A 称为无限集；如果 A 中的元素仅有有限多个，那么 A 称为有限集.

用 $|A|$ 表示 A 的元数(即元素的个数). 对于无限集，$|A|=\infty$(无穷大).

不含任何元素的集合，称为**空集**. 通常记为 $\varnothing$. 显然，$|A|=0$ 是 $A=\varnothing$ 的充分必要条件.

1.2 从属关系

知识桥

如果事物 a 是集合 A 的元素，那么就说“a 属于 A”或“a 在 A 中”，并记为

$$a \in A.$$

如果 a 不是 A 的元素，那么就说“a 不属于 A”，并记为

$a \notin A$(也有些书上写成 $a \overline{\in} A$).

在 A 为有限集时，我们常常将 A 的元素全部列举出来，例如

$$A=\{1,2,3\},$$

表示 A 是三元集(三个元素的集合)，它的元素是 1，2，3(即 $1\in A$，$2\in A$，$3\in A$). 又如

$$B=\{a,b,c,d\},$$

表示 B 是四元集，它的元素是 a,b,c,d.

在上述记号中，花括号内写出的元素应当互不相同，即每个元素恰出现一次. 至于元素出现的顺序，不必考虑. 我们认为

$$\{1,2,3\},\ \{1,3,2\},\ \{2,1,3\},$$
$$\{2,3,1\},\ \{3,1,2\},\ \{3,2,1\}$$

都是同一个集.

仅含一个元素的集称为单元素集，例如

$$A=\{5\}.$$

对于元素较多的集合或者无限集，常常采用下面的记号. 例如

$$A=\{a \mid a\text{ 为正偶数}\},$$

表示 A 是正偶数组成的集. 又如

$$B=\{(x,y) \mid x,y\text{ 均为整数}\},$$

表示 B 是平面上整点(格点)的集合.

在上述记法中，竖线前写一个代表元素，在竖线后面写明它所具有

的性质.

在同时讨论几个集合时，下面的从属关系表是很有用的：

表 1.2.1

集合＼元素	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
A_1	1	0	1	$\cdots$	1	0
A_2	1	1	0	$\cdots$	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	1	1	1	$\cdots$	1	0

表的 m 行(最上面一行除外)表示 m 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_m$；表的 n 列(最左面一列除外)表示 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

若 $a_i \in A_j (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)$，则在 a_i 所在列与 A_j 所在行的交叉处写上 1；若 $a_i \notin A_j$，则写上 0. 例如表 1.2.1 中，

$$a_1 \in A_1, a_1 \in A_2, \cdots, a_1 \in A_m,$$

$$a_2 \notin A_1, a_2 \in A_2, a_3 \notin A_2, \cdots, a_n \notin A_1.$$

还可看出

$$A_1 = \{a_1, a_3, \cdots, a_{n-1}\},$$

$$A_2 = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n\},$$

$$\cdots$$

$$A_m = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}\}.$$

当然，也可以用行表示元素，列表示集合，这没有实质性的不同.

1.3 包　　含

知识桥

如果集合 A 的元素都在集合 B 中，那么 A 称为 B 的**子集**，并记为

$$A\subseteq B(\text{或 } B\supseteq A),$$

读做 B 包含 A 或 A 包含于 B 中.

显然有 $A\subseteq A$，即每个集合都是它自身的子集.

如果 $A\subseteq B$，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么称 A 为 B 的**真子集**，并记为

$$A\subset B(\text{或 } B\supset A)$$

（也有些书上用 $A\subset B$ 表示 A 是 B 的子集，而用 $A\subsetneqq B$ 表示 A 是 B 的真子集），读做 B 真包含 A 或 A 真包含于 B 中. 例如

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C},$$

即自然数集是整数集的真子集，整数集是有理数集的真子集，有理数集是实数集的真子集，实数集是复数集的真子集.

如果 $A\subseteq B$ 并且 $B\subseteq A$，那么 A 的元素都是 B 的元素，B 的元素也都是 A 的元素. 因此 A，B 是同一个集合，即 $A=B$.

约定空集$\varnothing$为每一个集合的子集.

并不是任意两个集合之间都有包含关系. 例如

$$A=\{1,2\},\ B=\{4,5,6\},$$

则 A 不是 B 的子集，B 也不是 A 的子集.

显然，当 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$ 时，$A\subseteq C$，即$\subseteq$关系具有传递性.

综上所述，$\subseteq$关系具有：

(i) **反身性**，即 $A\subseteq A$；

(ii) **传递性**，即 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$ 推出 $A\subseteq C$；

(iii) $A\subseteq B$，$B\subseteq A$ 推出 $A=B$.

我们称这样的关系为**偏序关系**（或**半序关系**）.