



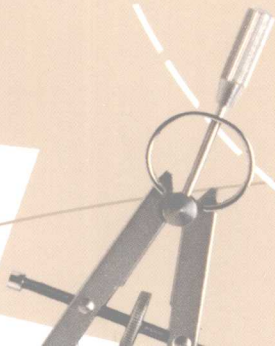
单 堦 主 编

 数学奥林匹克
命题人讲座

集合与对应

单 堦 著

上海科技教育出版社



单 樽 主 编

 数学奥林匹克

命题人讲座

集合与对应

单 樽 著

上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

集合与对应/单增编著. —上海:上海科技教育出版社,
2009.1

(数学奥林匹克命题人讲座/单增主编)

ISBN 978-7-5428-4645-7

I. 集... II. 单... III. 数学课—中学—教学参考资料
IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 106308 号

*** 数学奥林匹克命题人讲座 ***

集合与对应

单 增 主 编

单 增 著

上海世纪出版股份有限公司 出版发行
上海科技教育出版社

(上海市冠生园路393号 邮政编码 200235)

www.ewen.cc www.sste.com

全国新华书店经销 上海市印刷七厂有限公司印刷

开本 890×1240 1/32 印张 11.625 字数 298 000

2009年1月第1版 2009年1月第1次印刷

ISBN 978-7-5428-4645-7/O · 570

定价:27.00 元

丛书序

读书,是天下第一件好事。

书,是老师。他循循善诱,传授许多新鲜知识,使你的眼界与思路大开。

书,是朋友。他与你切磋琢磨,研讨问题,交流心得,使你的见识与能力大增。

书的作用太大了!

这里举一个例子:常庚哲先生的《抽屉原则及其他》(上海教育出版社,1980年)问世后,很快地,连小学生都知道了什么是抽屉原则。而在此以前,几乎无人知道这一名词。

读书,当然要读好书。

常常有人问我:哪些奥数书好?希望我能推荐几本。

我看过的书不多。最熟悉的是上海的出版社出过的几十本小册子。可惜现在已经成为珍本,很难见到。幸而上海科技教育出版社即将推出一套“数学奥林匹克命题人讲座”丛书,帮我回答了这个问题。

这套丛书的书名与作者初定如下:

- | | |
|---------|-------------------|
| 陆洪文 | 《解析几何》 |
| 施咸亮 | 《代数函数与多项式》 |
| 熊 斌 | 《函数迭代与函数方程》 |
| 陈 计 季潮丞 | 《代数不等式》 |
| 曹 纲 叶中豪 | 《重心坐标与平面几何》 |
| 冯志刚 | 《初等数论》 |
| 单 墀 | 《集合与对应》《数列与数学归纳法》 |
| 刘培杰 | 《组合问题》 |
| 任 韩 田廷彦 | 《图论·组合几何》 |

唐立华 《向量与立体几何》

邵嘉林 《复数·三角函数》

显然,作者队伍非常之强。老辈如陆洪文先生、施咸亮先生都是博士生导师。他们不仅在代数数论、函数逼近等领域的研究上取得了卓越的成绩,而且十分关心数学竞赛。中年如陈计先生于不等式,叶中豪先生于平面几何,都是国内公认的首屈一指的专家。其他各位也都是当下国内数学奥林匹克的领军人物。如熊斌、冯志刚是2008年IMO中国国家队的正副领队、中国数学奥林匹克委员会委员。他们为我国数学奥林匹克做出了重大的贡献,培养了很多的人才。2008年9月14日,“国际数学奥林匹克研究中心”在华东师范大学挂牌成立,担任这个研究中心主任的正是多届IMO中国国家队领队、华东师范大学数学系副教授熊斌。又如邵嘉林先生,他指导过的张成同学获得了第49届IMO的金牌。

这些作者有一个共同的特点:他们都为数学竞赛命过题。

如:

设数 a 具有以下性质:对于任意四个实数 x_1, x_2, x_3, x_4 ,总可以取整数 k_1, k_2, k_3, k_4 ,使得

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 4} ((x_i - k_i) - (x_j - k_j))^2 \leq a,$$

求这样的 a 的最小值。

这是施咸亮先生供给我国国家集训队选拔的试题。

又如:

设 $S = \{1, 2, \dots, 2005\}$ 。若 S 中任意 n 个两两互素的数组成的集合中都至少有一个素数,试求 n 的最小值。

这是唐立华先生供给西部数学奥林匹克的试题。

叶、熊、冯等几位先生供给竞赛的题举不胜数,这里就不罗列了。

命题人讲座,是田廷彦先生的创意。

命题人写书,富于原创性。有许多新的构想、新的问题、新的解法、新的探讨。新,是这套丛书的一大亮点。读者一定会从这套丛书中学到很多新的知识,产生很多新的想法。

新,会不会造成深、难呢?

这套书当然会有一定的深度,一定的难度。但作者是命题人,充分了解问题的背景(如刘培杰先生就曾专门研究过一些问题的背景),写来能够深入浅出,“百炼钢化为绕指柔”。另一方面,倘若一本书十分浮浅,一点难度没有,那也就失去了阅读的价值。

读书,难免遇到困难。遇到困难,不能放弃。要顶得住,坚持下去,锲而不舍。这样,你不但读懂了一本好书,而且也学会了读书,享受到读书的乐趣。

书的作者,当然要努力将书写好。但任何事情都难以做到完美无缺。经典著作尚且偶有疏漏,富于原创的书更难免有考虑不足的地方。从某种意义上说,这种不足毋宁说是一种优点:它给读者留下了思考、想象、驰骋的空间。

如果你在阅读中,能够想到一些新的问题或新的解法,能够发现书中的不足或改进书中的结果,那就是古人所说的“读书得间”,值得祝贺!

我们欢迎各位读者对这套丛书提出建议与批评。

感谢上海科技教育出版社,特别是编辑卢源先生,策划组织编写了这套书。卢编辑认真把关,使书中的错误减至最少,又在书中设置了一些栏目,使这套书增色很多。

单 增

2008 年 10 月

前 言

这本《集合与对应》分为两个部分,第一部分为集合,第二部分为对应,由以前写的两本小册子《集合及其子集》与《对应》合并后经适当修订而成。

集合论,是全部数学的基础。

数学大师康托尔(Cantor)建立了基数、序型等重要概念,将研究从有限集推进到无限集,创立了集合论这一数学分支。

近 30 年来,随着组合数学的蓬勃发展,关于有限集及其子集族,又有很多的研究,得出了很多重要而且优美的结果。

“对应”也是一个极基本的数学概念。

人类在上古时代就已经知道把自己的手指或石子与货物(牛、羊等等)对应起来,进行计数。随着时间的推移,对应的作用越来越大,地位越来越重要。

几何中的各种变换,数学分析中的各种函数,都是对应的例子。

现代数学中,同态、同构、同伦、同胚、……,无一不是具有某种性质的对应。各种各样的“表示”,实质上也就是各种各样的对应。

为了计算一个集合的元素个数,在组合数学中,常常利用这个集合与另一个集合之间的对应关系,这种方法称为“对应原理”。

数学证明中,也常常出现“对应”这个幽灵。

法尔廷斯(G. Faltings)解决莫德尔猜想,怀尔斯(A. J. Wiles)证明费马大定理,其中都运用了一系列的对应。

这本小册子通过许多初等问题介绍了集合与对应,希望能起到抛砖引玉的作用。

特别说明,本书中所谓自然数及符号 N 均指正整数,不包括“0”。

目 录



前 言

第一部分 集合

第一讲 集合

- 1.1 集合 / 1
- 1.2 从属关系 / 2
- 1.3 包含 / 4
- 1.4 并与交 / 5
- 1.5 差与补 / 7
- 1.6 维恩图 / 8
- 1.7 有关集合的等式(I) / 10
- 1.8 对称差 / 13
- 1.9 有关集合的等式(II) / 16
- 1.10 有关集合的等式(III) / 20
- 1.11 容斥原理(I) / 23
- 1.12 容斥原理(II) / 27

第二讲 映射

- 2.1 映射 / 30
- 2.2 复合映射 / 32
- 2.3 有限集到自身的映射 / 34

- 2.4 构造映射(Ⅰ) / 36
- 2.5 构造映射(Ⅱ) / 39
- 2.6 函数方程(Ⅰ) / 42
- 2.7 函数方程(Ⅱ) / 46
- 2.8 函数方程(Ⅲ) / 51
- 2.9 链 / 54
- 2.10 图 / 58

第三讲 有限集的子集

- 3.1 子集的个数 / 62
- 3.2 两两相交的子集 / 64
- 3.3 奇偶子集 / 65
- 3.4 另一种奇偶子集 / 67
- 3.5 格雷厄姆的一个问题 / 69
- 3.6 三元子集族(Ⅰ) / 73
- 3.7 三元子集族(Ⅱ) / 76
- 3.8 施泰纳三元系 / 80
- 3.9 构造 / 84
- 3.10 分拆(Ⅰ) / 89
- 3.11 分拆(Ⅱ) / 92
- 3.12 覆盖 / 96
- 3.13 斯特林数 / 98
- 3.14 $M_{(n,k,h)}$ / 103

第四讲 各种子集族

- 4.1 S 族 / 107
- 4.2 链 / 111
- 4.3 迪尔沃思定理 / 116
- 4.4 李特尔伍德—奥福德问题 / 119

- 4.5 I 族 / 123
- 4.6 EKR 定理的推广 / 129
- 4.7 影 / 133
- 4.8 米尔纳定理 / 137
- 4.9 上族与下族 / 140
- 4.10 四函数定理 / 144
- 4.11 H 族 / 149
- 4.12 相距合理的族 / 154

第五讲 无限集

- 5.1 无限集 / 160
- 5.2 可数集 / 163
- 5.3 连续统的基数 / 167
- 5.4 基数的比较 / 170
- 5.5 直线上的开集与闭集 / 176
- 5.6 康托尔的完备集 / 179
- 5.7 库拉托夫斯基定理 / 182

第二部分 对应

第六讲 映射的应用

- 6.1 映射与一一对应 / 192
- 6.2 淘汰赛 / 195
- 6.3 锯立方体 / 196
- 6.4 棋盘上的方格 / 197
- 6.5 对称 / 199
- 6.6 集合自身的对称 / 200
- 6.7 自然数的因数 / 202

- 6.8 国际象棋中的象 / 204
- 6.9 “连城”游戏 / 206
- 6.10 加德纳的游戏 / 208
- 6.11 穿过多少个方格 / 209
- 6.12 恒等映射 / 211
- 6.13 复合映射 / 212
- 6.14 逆映射 / 213
- 6.15 单射 / 215
- 6.16 密码 / 217
- 6.17 魔术师 / 219
- 6.18 让你猜不出 / 220
- 6.19 一个较复杂的例子 / 222

第七讲 计数

- 7.1 阿凡提的驴 / 225
- 7.2 乘法原理 / 226
- 7.3 因数的个数 / 228
- 7.4 映射的个数 / 229
- 7.5 吃巧克力的方案 / 231
- 7.6 排列 / 232
- 7.7 河马 / 234
- 7.8 圆周上的排列 / 236
- 7.9 组合 / 238
- 7.10 加法原理 / 241
- 7.11 问题举隅(Ⅰ) / 244
- 7.12 问题举隅(Ⅱ) / 248
- 7.13 两个几何问题 / 250
- 7.14 最短路线 / 252
- 7.15 允许重复的组合 / 254

- 7.16 线性方程的整数解 / 256
- 7.17 关于集合的一个问题 / 258

第八讲 卡塔兰数

- 8.1 n 边形的剖分 / 261
- 8.2 添括号 / 262
- 8.3 惠特沃思路线 / 264
- 8.4 圆周上的点 / 266
- 8.5 互不相交的弦 / 268
- 8.6 找零钱的问题 / 270
- 8.7 有序数组的个数 / 272
- 8.8 排队问题 / 274
- 8.9 不与 $y=x$ 相交的路线 / 276
- 8.10 投票记录 / 277
- 8.11 夏皮罗路线 / 280

第九讲 表示

- 9.1 表示与坐标 / 284
- 9.2 猜年龄的奥妙 / 286
- 9.3 自然数的其他表示 / 287
- 9.4 斐波那契数 / 290
- 9.5 两种状态 / 293
- 9.6 奇偶性 / 294
- 9.7 抽屉原则 / 297
- 9.8 表数为 $2^j \cdot i$ / 300
- 9.9 运算 / 301
- 9.10 同余 / 303
- 9.11 同态 / 304
- 9.12 中国剩余定理 / 305

- 9.13 群 / 306
- 9.14 缩系 / 308
- 9.15 洗牌问题 / 310
- 9.16 紧凑的日程表 / 311
- 9.17 图形的妙用 / 313
- 9.18 横竖一样 / 315
- 9.19 图论问题 / 317
- 9.20 外切的圆 / 319
- 9.21 兰福德问题 / 321
- 9.22 斯科伦问题 / 325

参考答案及提示 / 333



第一部分 集合

第一讲 集合

1.1 集合



具有某种性质的事物,它们的全体称为一个**集合**. 这些事物称为这个集合的**元素**.

集合简称为**集**. 元素简称为**元**.

例如,某一学校的学生组成一个集合. 某国的官员组成一个集合. 地球上的老鼠组成一个集合等等.

正整数(自然数)组成一个集合,通常记为 N .

整数组成一个集合,通常记为 Z .

有理数组成一个集合,通常记为 Q .

实数组成一个集合,通常记为 R .

复数组成一个集合,通常记为 C .

平面上的点组成一个集合,通常称为平面点集.

集合 A 中的元素,如果有无限多个,那么 A 称为**无限集**;如果 A 中的元素仅有有限多个,那么 A 称为**有限集**.

用 $|A|$ 表示 A 的元数(即元素的个数). 对于无限集, $|A| = \infty$ (无穷大).

不含任何元素的集合,称为**空集**. 通常记为 $\emptyset$. 显然, $|A| = 0$ 是 $A = \emptyset$ 的充分必要条件.

1.2 从属关系



如果事物 a 是集合 A 的元素,那么就说“ a 属于 A ”或“ a 在 A 中”,并记为

$$a \in A.$$

如果 a 不是 A 的元素,那么就说“ a 不属于 A ”,并记为

$$a \notin A (\text{也有些书上写成 } a \bar{\in} A).$$

在 A 为有限集时,我们常常将 A 的元素全部列举出来,例如

$$A = \{1, 2, 3\},$$

表示 A 是三元集(三个元素的集合),它的元素是 $1, 2, 3$ (即 $1 \in A, 2 \in A, 3 \in A$). 又如

$$B = \{a, b, c, d\},$$

表示 B 是四元集,它的元素是 a, b, c, d .

在上述记号中,花括号内写出的元素应当互不相同,即每个元素恰出现一次. 至于元素出现的顺序,不必考虑. 我们认为

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 1, 3\},$$

$$\{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\}, \{3, 2, 1\}$$

都是同一个集.

仅含一个元素的集称为单元素集,例如

$$A = \{5\}.$$

对于元素较多的集合或者无限集,常常采用下面的记号. 例如

$$A = \{a \mid a \text{ 为正偶数}\},$$

表示 A 是正偶数组成的集. 又如

$$B = \{(x, y) \mid x, y \text{ 均为整数}\},$$

表示 B 是平面上整点(格点)的集合.

在上述记法中,竖线前写一个代表元素,在竖线后面写明它所具有

的性质.

在同时讨论几个集合时,下面的从属关系表是很有用的:

表 1.2.1

集合 \ 元素	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
A_1	1	0	1	$\cdots$	1	0
A_2	1	1	0	$\cdots$	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	1	1	1	$\cdots$	1	0

表的 m 行(最上面一行除外)表示 m 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_m$; 表的 n 列(最左面一列除外)表示 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

若 $a_i \in A_j$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$), 则在 a_i 所在列与 A_j 所在行的交叉处写上 1; 若 $a_i \notin A_j$, 则写上 0. 例如表 1.2.1 中,

$$\begin{aligned} a_1 \in A_1, a_1 \in A_2, \cdots, a_1 \in A_m, \\ a_2 \notin A_1, a_2 \in A_2, a_3 \notin A_2, \cdots, a_n \notin A_1. \end{aligned}$$

还可看出

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_1, a_3, \cdots, a_{n-1}\}, \\ A_2 &= \{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n\}, \\ &\cdots \end{aligned}$$

$$A_m = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}\}.$$

当然,也可以用行表示元素,列表示集合,这没有实质性的不同.

1.3 包 含



如果集合 A 的元素都在集合 B 中,那么 A 称为 B 的子集,并记为

$$A \subseteq B (\text{或 } B \supseteq A),$$

读做 B 包含 A 或 A 包含于 B 中.

显然有 $A \subseteq A$,即每个集合都是它自身的子集.

如果 $A \subseteq B$,并且 B 中至少有一个元素不属于 A ,那么称 A 为 B 的真子集,并记为

$$A \subset B (\text{或 } B \supset A)$$

(也有些书上用 $A \subset B$ 表示 A 是 B 的子集,而用 $A \subsetneq B$ 表示 A 是 B 的真子集),读做 B 真包含 A 或 A 真包含于 B 中.例如

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C},$$

即自然数集是整数集的真子集,整数集是有理数集的真子集,有理数集是实数集的真子集,实数集是复数集的真子集.

如果 $A \subseteq B$ 并且 $B \subseteq A$,那么 A 的元素都是 B 的元素, B 的元素也都是 A 的元素.因此 A, B 是同一个集合,即 $A = B$.

约定空集 $\emptyset$ 为每一个集合的子集.

并不是任意两个集合之间都有包含关系.例如

$$A = \{1, 2\}, B = \{4, 5, 6\},$$

则 A 不是 B 的子集, B 也不是 A 的子集.

显然,当 $A \subseteq B, B \subseteq C$ 时, $A \subseteq C$,即 $\subseteq$ 关系具有传递性.

综上所述, $\subseteq$ 关系具有:

- (i) 反身性,即 $A \subseteq A$;
- (ii) 传递性,即 $A \subseteq B, B \subseteq C$ 推出 $A \subseteq C$;
- (iii) $A \subseteq B, B \subseteq A$ 推出 $A = B$.

我们称这样的关系为偏序关系(或半序关系).