GAODENGSHUXUE

主审　宁喜科

职业教育系列教材

高等数学

主编　程国强　张宗超

高等数学

GAODENGSHUXUE

西北大学出版社

前 言

大力发展职业教育，促进高技能人才建设，是全面落实科学发展观、贯彻以人为本、构建和谐社会的重要举措。努力推进新型工业化高技能人才培养，已经成为创新发展职业教育面临的迫切任务。本着服务教学、规范教学、提升技能的原则，宝鸡市技工培训指导中心组织全市重点技工院校有关专家、优秀教师和学科带头人，为适应新材料、新工艺、新技术的要求，依据部颁教学大纲，结合多年来职业教育的成效和经验，编写了《职业教育系列教材》。这套教材包括《机械制图》（附《机械制图习题册》）《电工电子学》《公差配合与测量技术》《工程力学》《计算机应用基础》《中高职英语》《初等数学》《高等数学》《安全教育》《职校生就业指导教程》等。

本系列教材注重实用性、系统性和科学性，突出“实用、够用、管用”的特点，紧紧围绕职业教育教学计划、教学大纲和《国家职业标准》《国家职业技能鉴定标准》，贴近学生接受能力，方便自学，对职业院校专业基础课教学、企业职工培训、社会短期培训具有实际指导意义。

教材编写前，中心多次邀请各院校专家和骨干教师集思广益，酝酿选题，明确了思路和要求。主编提出编写大纲后，经编委会成员反复讨论，并吸取多方意见修改后确定。

在教材规划和编写过程中，得到了宝鸡市劳动和社会保障局以及宝鸡技术学院、宝鸡铁路技术学院、陕西国防工业技术学院、陕西建光技工学校、陕西烽火技工学校、陕西汽车集团技工学校、宝钛集团技工学校、陕西省电子工业学校、长岭技工学校、凌云技工学校、宝成技工学校、陕西渭阳技工学校、陕西机床厂技工学校等院校领导、专家、教师的大力支持，在此一并表示感谢!

由于水平所限，书中难免疏漏和错误，恳请读者不吝赐教，以便再版时修改完善。

宝鸡市技工培训指导中心

2008 年 5 月

目录

CONTENTS

(打*号者为选学内容)

第一章 函数的极限与连续

高等数学研究的主要对象是函数，函数描述了客观世界中变量之间的依赖关系，极限揭示了函数的变化趋势，连续是函数的一个重要性态. 极限和连续是贯穿于高等数学始终的基本概念，也是学习微积分的理论基础.

§1.1 常见的初等函数

1.1.1 函数的概念

1. 函数的定义

设x和y是两个变量，D是一个给定的非空实数集合，如果对于每一个数$x\in D$，变量y按照一定法则f总有确定的数值和它对应，则我们称y是x的**函数**，记作

$$y=f(x)$$

其中x称为**自变量**，y称为**函数或因变量**. 函数的定义包括三个方面的内容:

(1) 函数的定义域：就是使函数有意义的实数的全体，也是自变量x的变化范围（即数集D）. 定义域不同，函数就不相同，如函数$f(x)=\ln x^2$与$g(x)=2\ln x$不是同一函数，因为前者的定义域是$(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$，后者的定义域是$(0,\ +\infty)$.

(2) 函数的对应关系：表明y与x之间的关系是按照一定的法则f联系起来的.

(3) 函数的值域：就是函数$y=f(x)$的定义域为D中的每一个x值，对应的函数值全体组成的数集$W=\{y|y=f(x),\ x\in D\}$. 函数的值域是由函数的定义域和对应关系所决定的，函数的值域不同，说明定义域或对应关系中至少有一个不同，所以函数也不相同.

2. 函数的表示法

函数可以用表格法、图示法、解析法等方法表示.

所谓表格法，就是把一系列自变量与对应的函数值列成表表示函数的方法. 其优点是查表容易得到函数值，如三角函数表、函数表等.

所谓图示法，就是用坐标系中的曲线或图形表示函数的方法. 其优点是形象直观、能看到函数的变化趋势，如正弦曲线、双曲线、抛物线等.

所谓解析法，就是用自变量的数学式子表示函数的方法. 其优点是便于理论推导和计算. 有些函数在其定义内要用几个式子才能完全表示，这一类函数称为**分段函数**.

3. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性：设函数$f(x)$的定义域为D，数集$X\subseteq D$，如果存在正数M，使得与任

意一个$x\in X$所对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数$f(x)$在X上有界；如果这样的M不存在，就称函数$f(x)$在X上无界.

例如，函数$f(x)=\sin x$在（$-\infty$，$+\infty$）内是有界的，因为无论x取任何实数，$|\sin x|\leqslant 1$都能成立. 这里的$M=1$. 函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在开区间（0，5）内是无界的，因为不存在这样的正数M，使$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$对于（0，5）内的一切$x$都成立.

（2）函数的单调性：设函数$f(x)$的定义域为D，区间$I\subseteq D$. 如果对于区间I上任意两点x_1及x_2，当$x_1<x_2$时，恒有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间I上是**单调递增**的；如果对于区间I上任意两个x_1及x_2，当$x_1<x_2$时，恒有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间I上是**单调递减**的. 单调递增和单调递减的函数统称为**单调函数**.

（3）函数的奇偶性：设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称（即若$x\in D$，则必有$-x\in D$）. 如果对于任意一个$x\in D$，$f(-x)=f(x)$恒成立，则称$f(x)$为**偶函数**；如果对任意一个$x\in D$，$f(-x)=-f(x)$恒成立，则称$f(x)$为**奇函数**.

偶函数的图形是关于y轴对称的；奇函数的图形是关于原点对称的.

（4）函数的周期性：设函数$f(x)$的定义域为D，如果存在一个不为零的常数T，使得对于任意一个$x\in D$有（$x\pm T$）$\in D$，且$f(x+T)=f(x)$恒成立，则称$f(x)$为**周期函数**，T称为$f(x)$的周期. 通常我们说周期函数的周期是指**最小正周期**.

例如，函数$\sin x$，$\cos x$都是以2π为周期的周期函数；函数$\tan x$，$\cot x$都是以π为周期的周期函数.

例 1-1 试确定函数$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}$与$f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$的定义域.

解 要使这一函数$f(x)$有意义，x的值就要满足不等式

$$x^2-x-6>0$$

则解得函数的定义域为$x>3$或$x<-2$，即（$-\infty$，$-2)\cup(3$，$+\infty$)，也可以用集合的形式表示为

$$D=\{x\,|\,x\in(-\infty,\ -2)\cup(3,\ +\infty)\}$$

要使这一函数$f(x)$有意义，x的值就要满足不等式组$\begin{cases}3+2x-x^2\geqslant 0,\\ x-2>0\end{cases}$即

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 3\\ x>2\end{cases}$$

则函数的定义域为$2<x\leqslant 3$，即（2，3]，也可以用集合的形式表示为

$$D=\{x\,|\,x\in(2,\ 3]\}$$

1.1.2 基本初等函数

我们把已学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**. 初等函数是最常见的函数，是微积分研究的主要对象.

（1）幂函数$y=x^a$（$a\in R$），常见的有$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{-1}$，$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$等.

（2）指数函数$y=a^x$（$a>0$且$a\neq 1$），过（0，1）点，$a>1$时为增函数，$0<a<1$时为减函数.

(3) 对数函数$y=\log_a x$ ($a>0$且$a\neq 1$)，过 (1, 0) 点，$a>1$时为增函数，$0<a<1$时为减函数.

(4) 三角函数，常见的有$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$.

(5) 反三角函数，常见的有$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot} x$.

1.1.3 复合函数

如果y是u的函数$y=f(u)$，而u又是x的函数$u=\varphi(x)$，且$u=\varphi(x)$的值域包含在函数$y=f(u)$的定义域内，那么y（通过u的关系）也是x的函数，把这样的函数叫做$y=f(u)$与$=\varphi(x)$复合而成的函数，简称**复合函数**，记作$y=f[(\varphi(x)]$，其中u叫做中间变量.

例 1-2 指出下列各函数的复合过程：

(1) $y=\sin(1-x^2)$ (2) $y=\tan^2 x$ (3) $y=\sqrt{x^2+2x-8}$ (4) $y=\lg\sqrt{8x+5}$

解 (1) 函数$y=\sin(1-x^2)$ 由两个函数$y=\sin u$与$u=1-x^2$复合而成.

(2) 函数$y=\tan^2 x$由两个函数$y=u^2$与$u=\tan x$复合而成.

(3) 函数$y=\sqrt{x^2+2x-8}$由两个函数$y=\sqrt{u}$与$u=x^2+2x-8$复合而成.

(4) 函数$y=\lg\sqrt{8x+5}$由三个函数$y=\lg u$，$u=\sqrt{v}$，$v=8x+5$复合而成.

复合函数的概念应用很广，可以推广到多个变量的情形. 但在应用中应注意：①并非任意两个或多个函数都能构成复合函数，如$y=\arccos u$与$u=3x^2+5$便不能复合成一个函数，因为u的值域为 $[5, +\infty)$，不包含在$y=\arccos u$的定义域$[-1, 1]$内；②对复合函数进行分解时，每个层次都应是基本初等函数或常数与基本初等函数的四则运算式，当分解到常数与基本初等函数的四则运算式时，就不再分解了.

1.1.4 初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的，并能用一个解析式表示的函数叫做**初等函数**.

例 1-3 判断下列各函数是不是初等函数：

(1) $y=\lg(x^3+\sin x)$ (2) $y=\begin{cases}2x & x>0\\ -2x & x<0\end{cases}$ (3) $y=\begin{cases}5\sqrt{x}+3 & x>0\\ 0 & x=0\\ 6-2x & x<0\end{cases}$

解 (1) 由于函数$y=\lg(x^3+\sin x)$ 是由基本初等函数$y=\lg u$与$u=x^3+\sin x$复合而成，而$u=x^3+\sin x$是由x^3与 $\sin x$相加运算而成，因此函数$y=\lg(x^3+\sin x)$ 是初等函数.

(2) 由于分段函数$y=\begin{cases}2x & x>0\\ -2x & x<0\end{cases}$与函数$y=\sqrt{(2x)^2}=|2x|$是同一函数，可以看成是由函数$y=\sqrt{u}$与$u=x^2$复合而成，因此这是一个初等函数.

(3) 由于分段函数$y=\begin{cases}5\sqrt{x}+3 & x>0\\ 0 & x=0\\ 6-2x & x<0\end{cases}$不能用一个式子表示，因此它不是初等函数.

1.1.5 建立函数关系举例

运用数学方法解决实际问题时，首先要建立数学模型，即建立函数关系. 一般方法为：

第一，要明确实际问题中的自变量与函数，一般自变量用x，函数用y或$f(x)$表示.

第二，根据题意建立方程，从而得出函数关系$y=f(x)$.

第三，根据实际问题的要求，确定函数的定义域及值域.

例 1-4 有一块边长为m的正方形薄钢板，将它的四角剪去边长相等的小正方形制作一只无盖盒子，试将盒子的体积表示成小正方形边长的函数（图 1-1).

解 设剪去的小正方形的边长为x，盒子的体积为V，则盒子的底面积为$(m-2x)^2$，高为x，因此所求的函数关系为

$$V=x(m-2x)^2 \qquad x\in\left(0,\ \frac{m}{2}\right)$$

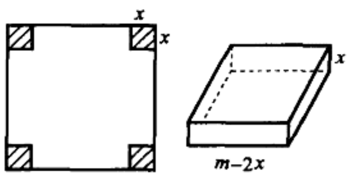

图 1-1

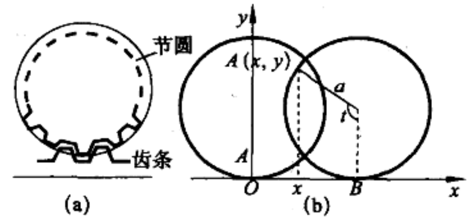

图 1-2

例 1-5 齿轮与齿条啮合运动的原理，相当于节圆在齿条的节线上滚动. 若节圆半径为R，试求节圆上一定点A的运动轨迹方程（图 1-2a).

解 这个轨迹相当是一个半径为R的圆，在一条直线上作不滑动的滚动，因此实际就是求圆上一定点A的轨迹方程（图 1-2b).

由图 1-2b 可知，直线OB=圆弧$\overline{AB}=Rt$，则A点的坐标为

$$x=RT-R\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=R(t-\sin t)$$

$$y=R+R\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=R(1-\cos t)$$

因此A点的运动轨迹方程为

$$\begin{cases} x=R(t-\sin t) & t<0 \\ y=R(1-\cos t) & t>0 \end{cases}$$

这一类曲线称为摆线. 这时变量x和y都是参数t的函数，也可认为y是x的函数（这个函数是通过t建立的)，则称此函数为由参数方程给出的函数.

习题 1.1

1. 判断下列各题中的$f(x)$与$g(x)$是否表示同一个函数？并说明理由.

   (1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $g(x)=x+1$ (2) $f(x)=\sqrt{(x-y)^2}$, $g(x)=|x-y|$

   (3) $f(x)=\lg x^{10}$, $g(x)=10\lg x$ (4) $f(x)=\ln|x|$, $g(x)=\ln x$

2. 试求下列函数的定义域:

   (1) $y=\sqrt{x^2-2x-8}$ (2) $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\lg(5-x)$

   (3) $y=\ln\sin 4x$ (4) $y=\ln(3x+2)$

3. 写出下列复合函数的复合过程:

   (1) $y=\sin^2(4x+6)$ (2) $y=\ln\cos^2(2x+5)$

   (3) $y=\tan(\sqrt[3]{3x+9})$ (4) $y=\ln(\arctan\sqrt{2x-5})$

4. 试求单位圆内接正n边形的周长C与边数n的函数关系.
5. 用铁皮做一个容积为V的圆柱形罐头筒，试将它的全面积表示成底面半径的函数.
6. 要建造一个容积为V的长方体水池，它的底为正方形. 如池底的单位面积造价为侧面单位面积造价的3倍，试建立总造价与底面边长之间的函数关系.

§1.2 极限的基本概念

我国古代哲学著作《庄子》里有一句话："一尺之棰，日取其半，万世不竭." 这句话的含意是说，如果每天剩余量为y，则y为天数n的函数，即

$y=f(n)=\frac{1}{2^n}$，当$n=1, 2, 3, 4, \cdots$时，对应的数列为

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots$$

显然，随着天数n的增多，剩余量$y=\frac{1}{2^n}$愈来愈小，并可无限趋近于零，但又永远不会等于零. 如果用数轴上的点表示数列中各项的值（图1-3)，则随着n的增大，对应点与原点O的距离愈来愈近，但永远达不到原点. 为分析这一类问题，我们引入极限的概念.

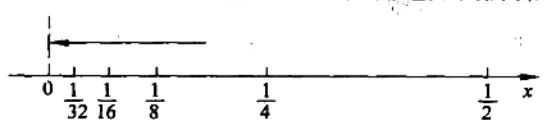

图 1-3

极限研究的是在自变量x的某一变化过程中，函数$y=f(x)$的变化趋势. 也就是讨论当自变量x在无限增大时，函数$y=f(x)$如何变化、趋向于哪一个值. 这种通过分析函数变化趋势解决问题的方法也称为极限的方法.

1.2.1 数列的极限

如果当项数n无限增大时（记为$n\to\infty$)，数列$\{x_n\}$的项x_n无限接近于一个确定的常数A，那么A叫做数列$\{x_n\}$的极限，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$（或当$n\to\infty$时，$x_n\to A$).

例如，对于数列$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots$，当项数$n$无限增大时，数列中的项无限接近于1，说明这一数列的极限为1，记作$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$.

例 1-6 考察下面数列的变化趋势，试写出它们的极限:

(1) $x_n=\frac{1}{n^2}$ (2) $x_n=2-\frac{1}{3^n}$ (3) $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$ (4) $x_n=-5$

表 1-1

n	1	2	3	4	5	$\cdots$	$\to\infty$
$\frac{1}{n^2}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	$\cdots$	$\to 0$
$2-\frac{1}{3^n}$	$2-\frac{1}{3}$	$2-\frac{1}{9}$	$2-\frac{1}{27}$	$2-\frac{1}{81}$	$2-\frac{1}{243}$	$\cdots$	$\to 2$
$(-1)^n\frac{1}{n}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$\cdots$	$\to 0$
-5	-5	-5	-5	-5	-5	$\cdots$	$\to -5$

解 把这四个数列的前几项及当$n\to\infty$时的变化趋势列于表 1-1，由变化趋势可得它们的极限分别为

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{3^n}\right)=2$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}(-5)=-5$

对于数列的极限，一般有以下几种规律：

(1) 如果常数$|q|<1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

(2) 如果指数α为大于 0 的实数，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$.

(3) 常数的极限是它的本身. 即如果C为常数，则$\lim\limits_{n\to\infty}C=C$.

(4) 极限存在的数列称为收敛数列，极限不存在的数列称为发散数列.

(5) 若数列收敛则一定有界，单调有界数列一定收敛.

(6) 不是任何数列都有极限，有些数列没有极限，也说该数列的极限不存在.

例如，当n无限增大时，数列$x_n=10^n$不能无限接近于一个确定的常数，数列$x_n=5(-1)^n$在 5 和-5两个数上来回跳动，所以数列$x_n=10^n$和$x_n=5(-1)^n$都没有极限.

1.2.2 当$x\to\infty$时，函数$f(x)$的极限

如果当x的绝对值无限增大，即$x\to\infty$时，函数$f(x)$无限接近于一个确定的常数A，那么A叫做函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$($x\to\infty$时，$f(x)\to A$).

例 1-7 试求函数$f(x)=\frac{1}{1+x}$在$x\to\infty$时的极限.

解 因为当$x\to\infty$时，函数$f(x)=\frac{1}{1+x}$的值无限接近于 0，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+x}=0$.

1.2.3 当$x\to\pm\infty$时，函数$f(x)$的极限

当$x\to+\infty$时，函数$f(x)$无限接近于一个确定的常数A，那么A叫做函数$f(x)$当$x\to+\infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（当$x\to+\infty$时，$f(x)\to A$).

当$x\to-\infty$时，函数$f(x)$无限接近于一个确定的常数A，那么A叫做函数$f(x)$当$x\to-\infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$（当$x\to-\infty$时，$f(x)\to A$).

显然，由以上可得，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$的充分必要条件是

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$$

例 1-8 试求函数$\left(\frac{1}{10}\right)^x$和$10^x$在$x\to+\infty$时的极限.

解 当$x\to+\infty$时，$\left(\frac{1}{10}\right)^x$的值无限接近于常数 0（图 1-4），因此得极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^x=0$$

当$x\to+\infty$时，10^x的值无限增大，所以10^x在$x\to+\infty$时没有极限；但是当$x\to-\infty$时，$10^x\to0$，所以有极限$\lim\limits_{x\to-\infty}10^x=0$.

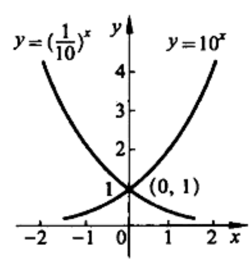

图 1-4

例 1-9 试求函数$f(x)=\arctan x$分别在$x\to+\infty$，$-\infty$，∞时的极限.

解 因为$\tan\frac{\pi}{2}\to+\infty$，$\tan\left(-\frac{\pi}{2}\right)\to-\infty$，所以得极限

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}\qquad\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

而$x\to\infty$时，函数$f(x)=\arctan x$不能无限接近于同一个确定的常数，所以当$x\to\infty$时，函数$f(x)=\arctan x$的极限不存在.

1.2.4 当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限

若函数$f(x)$在点x_0的左右近旁有定义（点x_0可除外），且当$x\to x_0$时，函数$f(x)$无限接近于一个确定的常数A，则A叫做函数$f(x)$在$x\to x_0$时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\quad（或当x\to x_0时，f(x)\to A）$$

这里函数$f(x)$在点x_0处可以是没有定义的，但这与极限存在与否并无关系. 极限刻画了函数$f(x)$在x趋于点x_0时的变化趋势，与函数在点x_0处的函数值不是一回事，不要混淆.

例 1-10 试求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to3}(3x+2)$ (2) $\lim\limits_{x\to x_0}x$ (3) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$ (4) $\lim\limits_{x\to0}\sin x$ (5) $\lim\limits_{x\to0}\cos x$

解 (1) 当x无限接近于 3，即$x\to3$ 时，$3x+2$ 无限接近于 11，所以得极限

$$\lim_{x\to3}(3x+2)=3\times3+2=11$$

(2) 当x无限接近于定值x_0，即$x\to x_0$时，函数$f(x)=x$也无限接近于定值x_0，所以得极限

$$\lim_{x\to x_0}x=x_0$$

(3)尽管这一函数在$x=2$处无定义，但当x无限接近于 2，即$x\to2$ 时，$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$无限接近于 4，所以得极限

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=4$$

(4) 当$x\to0$ 时，$\sin x$无限接近于 0，所以得极限

$$\lim_{x\to0}\sin x=0$$

(5) 当$x\to0$ 时，$\cos x$无限接近于 1，所以得极限

$$\lim_{x\to0}\cos x=1$$

1.2.5 当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的左极限与右极限

如果当$x\to x_0^-$时，函数$f(x)$无限接近于一个确定的常数A，那么A叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\quad（或f(x_0-0)=A）$$

如果当$x \to x_0^+$时，函数$f(x)$无限接近于一个确定的常数A，那么A叫做函数$f(x)$当$x \to x_0$时的右极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad (\text{或} f(x_0+0) = A)$$

显然，由以上可得，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$的充分必要条件是

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

上面$x \to x_0^-$（或x_0-0）表示x从x_0的左侧无限趋近于x_0；$x \to x_0^+$（或x_0+0）表示x从x_0的右侧无限趋近于x_0.

例 1-11 试求图 1-5 中五个函数$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，$f_4(x)$，$f_5(x)$分别在$x \to 2^+$，$x \to 2^-$，$x \to 2$ 时的极限.

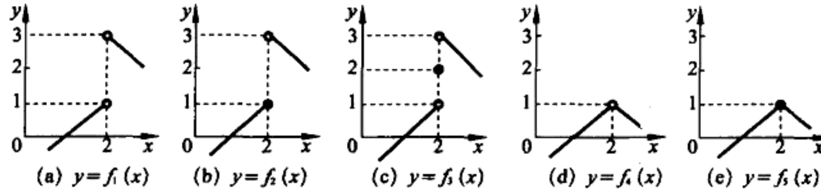

图 1-5

解 从图 1-5 中可以看出$f_1(x)$的左、右极限为

$$\lim_{x \to 2^-} f_1(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 2^+} f_1(x) = 3$$

由于$f_1(x)$当$x \to 2$ 时的左、右极限虽然存在但不相等，所以极限$\lim\limits_{x \to 2} f_1(x)$不存在.

同理可得其他函数的极限，列于表 1-2 中.

表 1-2

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$
$x=2$	无定义	1	2	无定义	1
$x \to 2^-$	1	1	1	1	1
$x \to 2^+$	3	3	3	1	1
$x \to 2$	不存在	不存在	不存在	1	1

习题 1-2

1. 试分析下列数列的变化趋势，如果有极限，写出它们的极限值：

(1) $x_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$ (2) $x_n = \frac{1}{1+n^2}$ (3) $x_n = \frac{n+2}{n^2}$ (4) $x_n = \frac{n^2}{n+2}$

(5) $x_n = (-2)^n$ (6) $x_n = (-n)^n$ (7) $x_n = 5 - \frac{1}{n}$ (8) $x_n = \frac{4n-1}{5n+1}$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$ (10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$

2. 试分析下列函数的变化趋势，如果有极限，写出它们的极限值:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}5x$ (2) $\lim\limits_{x\to x_0}C$（C为常数）(3) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x$ (4) $\lim\limits_{x\to 45^\circ}\tan x$

(5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ (6) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3}{4+x}$ (7) $\lim\limits_{x\to -\infty}e^x$ (8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}$

3. 试分析下列函数的极限是否存在，为什么?

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x}{1+x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ (4) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$

4. 试作下列函数的图像，求极限$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$是否存在？若存在，等于多少？

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}-x-1 & x<0\\ -x & x\geqslant 0\end{cases}$ (3) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ \sqrt{x} & x\geqslant 0\end{cases}$

§1.3　极限的运算

1.3.1　极限的运算法则

如果函数$f(x)$与$g(x)$在$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时都存在极限，则它们的和、差、积、商（分母的极限不为 0 时）在$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时也存在极限，并且分别等于它们极限的和、差、积、商.

如果　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，那么

法则 1　$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$

法则 2　$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$

法则 3　$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{A}{B}$　$(B\neq 0)$

法则 1，2 可推广到有限个具有极限的函数，我们可以进一步得到两个推论:

推论 1　$\lim\limits_{x\to x_0}[Cf(x)]=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$（$C$为常数）

推论 2　$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^n$（$n$为正整数）

这三个法则、两个推论对于$x\to x_0$或$x\to\infty$的函数或数列均成立.

例 1-12　试求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(x^3+2x^2-5x-2)$ (2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2+x^3}{5-x}$ (3) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$ (5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+7x-8}{2x^2+9x+2}$ (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^5+2x+5}{x^7+3x-4}$

解　由极限的法则及推论得

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(x^3+2x^2-5x-2)=\left(\lim\limits_{x\to 3}x\right)^3+2\left(\lim\limits_{x\to 3}x\right)^2-5\lim\limits_{x\to 3}x-2=3^3+2\times 3^2-5\times 3-2=28$

(2) 因为分母$\lim\limits_{x\to 2}(5-x)=3\neq 0$，则可以应用极限运算的法则 3 得

$$\lim_{x\to 2}\frac{2+x^3}{5-x}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2+x^3)}{\lim\limits_{x\to 2}(5-x)}=\frac{2+2^3}{5-2}=\frac{10}{3}$$

(3) 因为分母$\lim\limits_{x\to 4}(x-4)=0$，不能直接应用极限运算的法则 3，由于在$x\to 4$ 的过程中$x\neq 4$，也就是$x-4\neq 0$，因此可以在分子、分母中约去非零的公因子，得

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+4)(x-4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=8$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$

(5) 这类问题可先将分子、分母同除以分母的最高次幂x^2，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+7x-8}{2x^2+9x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{7}{x}-\frac{8}{x^2}}{2+\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3+7\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-8\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}2+9\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{3}{2}$$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^5+2x+5}{x^7+3x-4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x^6}+\frac{5}{x^7}}{1+\frac{3}{x^6}-\frac{4}{x^7}}=\frac{0+0+0}{1+0}=0$

1.3.2 两个重要极限

1. 极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

如果取一系列x趋近于零的数值时，就得到一系列$\frac{\sin x}{x}$的对应值，作曲线如图 1-6 所示. 明显地，当x无限趋近于零时，$\frac{\sin x}{x}$的值无限趋近于 1. 可以证明，$x\to 0$ 时，$\frac{\sin x}{x}$的极限存在且等于 1，即$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

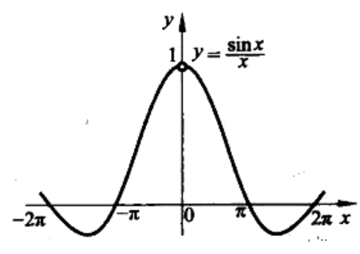

图 1-6

例 1-13 试求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{3x}$ (3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}$ (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{2x}\right)$ (5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\arcsin x}{2x}$

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3}{4}\times\frac{\sin 3x}{3x}\right)=\frac{3}{4}\lim\limits_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{4}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{1}{\cos 2x}\right)=\frac{2}{3}\lim\limits_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\lim\limits_{2x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}=\frac{2}{3}\times 1\times\frac{1}{1}=\frac{2}{3}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)=\frac{1}{4}\times\lim\limits_{\frac{x}{2}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{4}$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{2x}\right)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\frac{1}{2x}\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

(5) 如果设 $\arcsin x=t$，则$x=\sin t$，而且在$x\to 0$ 时$t\to 0$，因此可以得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\arcsin x}{2x}=\lim_{t\to 0}\frac{3t}{2\sin t}=\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\frac{3}{2}$$

2. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$或$\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$

如果取一系列x趋近于∞的数值时，就得到一系列$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$的对应值，列于表 1-3. 明显地，当$x$无限趋近于$\pm\infty$时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$的值无限趋近于 $2.71828\cdots=e$. 可以证明，$x\to\infty$时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$的极限存在且等于$e$，即$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

如果设$u=\frac{1}{x}$，则当$x\to\infty$时，$u\to 0$，于是得到$\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$.

表 1-3

x	$-\infty\leftarrow\cdots$	-1000000	-10000	-10	1	10	10000	1000000	$\cdots\to+\infty$
$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	$\cdots$	2.71828	2.71840	2.86797	2	2.59374	2.71815	2.71828	$\cdots$

例 1-14 试求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+1}{x^4}\right)^{x^4+5}$ (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+1}\right)^{x+1}$

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x\times(-2)}=\left[\lim\limits_{-x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+1}{x^4}\right)^{x^4+5}=\lim\limits_{x^4\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{x^4}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^5=e\times(1+0)^5=e$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{3}+\frac{2}{3}}$

$$=\lim_{\frac{3x+1}{3}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x+1}{3}}\right)^{\frac{3x+1}{3}}\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x+1}\right)\right]^{\frac{2}{3}}=e\times(1+0)^{\frac{2}{3}}=e$$

或设$\frac{3}{3x+1}=u$，则$x=\frac{1}{u}-\frac{1}{3}$，$x+1=\frac{1}{u}+\frac{2}{3}$而且在$x\to\infty$时$u\to 0$，因此可以得到

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x+1}\right)^{x+1}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}+\frac{2}{3}}$$

$$=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{2}{3}}=e\times(1+0)^{\frac{2}{3}}=e$$

习题 1-3

1. 试求下列数列的极限值:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n+1)}{n^2}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$

2. 试求下列函数的极限值:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3-3x^2+6}{4x^4+5x^3+2}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin x}$ (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+6x+2}{4x^2-2x+8}$

(4) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ (5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^3 x}{\tan x-\sin x}$ (6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$