

邹国棠 王政 程明 著

# 混沌电机驱动 及其应用

Chaotic Drives and Their Applications

 科学出版社  
www.sciencep.com

# 混沌电机驱动及其应用

Chaotic Drives and Their Applications

邹国棠 王 政 程 明 著

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书总结了著者所在课题组在电机驱动中混沌方面十多年的研究成果,内容涉及多种电机驱动中混沌的鉴别、分析、控制以及工业应用;在深化以往对常用永磁同步电机和感应电机的混沌现象分析和抑制的基础上,又将混沌研究延伸到采用不同控制方法的直流电机、开关磁阻电机、同步磁阻电机、双凸极永磁电机、单相罩极感应电机中。本书突破性地将电机驱动中混沌运动运用到工业应用中,在电机驱动中混沌的应用方面开辟了一条新的途径;不仅利用解析求解和数值计算对多种电机驱动中混沌进行了详细分析,同时还提供了大量的实验数据进行验证,供读者了解在电机驱动中混沌研究方面的最新进展。

本书可作为高等院校自动控制、电气工程等学科高年级本科生和研究生的参考书,也可供从事电机驱动控制、非线性控制等技术领域的研究人员、工程师与工程管理人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

混沌电机驱动及其应用=Chaotic Drives and Their Applications/邹国棠,王政,程明著. —北京:科学出版社,2009

ISBN 978-7-03-024584-7

I. 混… II. ①邹…②王…③程… III. 电机-控制系统-研究  
IV. TM301.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 074689 号

责任编辑:耿建业 裴 育 / 责任校对:张 琪  
责任印制:赵 博 / 封面设计:王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2009 年 5 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2009 年 5 月第一次印刷 印张:11 1/4

印数:1—2 500

字数:210 000

定价:40.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈双青〉)

## 序

目前，相对论、量子力学与混沌科学被誉为自然科学界的三大发现，而混沌科学更被认为是 20 世纪物理学的第三次革命。其涉及随机性与确定性、有序和无序、简单性和复杂性、稳态和动态、整体性与局部性等范畴，对整个自然科学的发展有极其深远的影响。

在工程学上，电气工程、机械工程与土木工程是当今三大工程学科，而电气工程更被广泛认为是最前沿的工程学科，它涉及电机、电子、计算机、能源、通信、资讯科技等领域，并与生物科技及纳米科技紧密联系，对整个社会的进步和人类生活的改善，有着重大的贡献。

当今的学术研究，既不应杂乱无章、缺乏聚焦，也不该固步自封、自我束缚，我们应该找出一个在交叉学科中有意义的课题，为追求学术知识和改善人类生活作出同样贡献。该书的课题正是一前沿的交叉学科，它不仅结合了抽象的混沌科学与实用的电气工程，同时亦充分利用混沌的特性去改进电机驱动的性能。

该书作者一直从事电机驱动方面的研究，成就卓越。近十年，他们集中研究混沌和电机驱动的关系，开拓了一个新的研究领域，并推导出创新的电机驱动品种——混沌电机驱动。可以这样说，该书明显有别于在混沌科学已出版的纯理论性著作和在电气工程上较为传统而偏向实用的书籍。这也正是该书值得推荐之原因，也是我写序的原因。最后，我深信该书将会给广大读者以新的启示和思维，为促进混沌电机驱动及其应用发挥出积极的作用。

陳清泉

中国工程院院士  
英国皇家工程院院士

2009 年 2 月

## 前 言

混沌是一门抽象的科学，它既包含艰深的理论，又涉及复杂的数学，其研究重点是运用理论来解释科学现象。然而，电机驱动是一门实用的学科，主要用来改善人类的生活条件，它的研究重点在如何加强其实用性与普及性。本书把这两门看似不相关的学科联系在一起，深入浅出地探讨这一新兴的交叉研究领域，从而推导出一种崭新品种的电机驱动——混沌电机驱动。这种混沌电机驱动能充分利用混沌的特性和优点，如确定性、近似随机性、拉伸与折叠及宽带频谱等，并能有效地改善电机的电磁兼容性及优化其运作效率。

作者所在课题组在混沌电机驱动方面的研究已超过十年，当中的研究课题包括如何鉴别和分析各种各样电机驱动的混沌现象、怎样控制或抑制电机驱动的混沌现象，以及如何利用或特意制造混沌来改善电机驱动的运作等。在这十年里，课题组在混沌电机驱动方面共发表了 20 篇期刊文章、26 篇会议文章，并申请专利 4 项。在此，衷心感谢课题组各成员，特别是陈基和博士、高原博士、叶霜博士，他们在混沌电机驱动方面的研究作出了实质而有意义的贡献，其研究成果更被广泛地纳入本书中。

这本书不仅利用解析法和数值计算对混沌电机驱动进行了详细的分析，同时还提供了大量的实验数据和图像进行验证，这正是本书的独特之处，更代表了作者在这十年间的研究成果。

本书获国家自然科学基金海外及港、澳青年学者合作研究基金项目(50729702)及香港大学配对基金项目资助，特此鸣谢。再者，本书承蒙尊敬的陈清泉院士拨冗审阅，提出了许多宝贵意见，并作序，在此表示衷心感谢。

由于作者学识水平有限，书中不妥之处在所难免，敬望读者不吝赐教，给予批评指正。

邹国棠  
香港大学  
2009年2月

# 目 录

序

前言

第 1 章 引论	1
1.1 电机驱动中混沌研究的背景	1
1.2 本书的主要内容	3
1.3 混沌研究的基本理论和方法	4
1.3.1 混沌的基础概念	4
1.3.2 分岔和混沌过渡	7
1.3.3 混沌研究的常用方法	10
参考文献	14
第 2 章 直流电机驱动中的混沌现象分析	17
2.1 简介	17
2.2 系统建模	17
2.2.1 电流模式控制	17
2.2.2 电压模式控制	19
2.3 混沌分析	21
2.3.1 电流模式控制	21
2.3.2 电压模式控制	25
2.4 仿真结果	29
2.4.1 电流模式控制	29
2.4.2 电压模式控制	34
2.5 实验结果	39
2.5.1 电流模式控制	39
2.5.2 电压模式控制	41
2.6 小结	43
参考文献	43
第 3 章 交流电机驱动中的混沌现象分析	46
3.1 简介	46

3.2	感应电机驱动	47
3.2.1	数学模型	47
3.2.2	混沌分析	50
3.2.3	仿真和实验结果	50
3.3	同步磁阻电机	54
3.3.1	数学模型	54
3.3.2	局部稳定性和 Hopf 分岔	58
3.3.3	从分岔到混沌	60
3.3.4	仿真和实验结果	61
3.4	小结	67
	参考文献	67
<b>第4章</b>	<b>开关磁阻电机驱动中的混沌现象分析</b>	<b>69</b>
4.1	简介	69
4.2	PWM 电压调制控制的开关磁阻电机驱动	69
4.2.1	数学模型	69
4.2.2	混沌行为的建模	72
4.2.3	混沌分析	74
4.2.4	实验结果	77
4.3	电流滞环控制的开关磁阻电机驱动	78
4.3.1	系统方程	78
4.3.2	混沌行为的建模	80
4.3.3	非线性分析	81
4.4	小结	87
	参考文献	88
<b>第5章</b>	<b>电机驱动中混沌的控制及其应用</b>	<b>89</b>
5.1	简介	89
5.2	基于传统延时反馈的直流电机驱动中混沌控制	89
5.2.1	数学模型	89
5.2.2	控制稳定域	92
5.2.3	计算机仿真	95
5.2.4	实验结果	97
5.3	基于改进延时反馈的汽车雨刷器中混沌控制	98
5.3.1	数学模型	98

---

5.3.2 混沌分析 .....	100
5.3.3 改进延时反馈控制 .....	102
5.3.4 控制结果 .....	104
5.4 小结 .....	106
参考文献 .....	106
<b>第 6 章 基于控制方法的电机驱动混沌化 .....</b>	<b>108</b>
6.1 简介 .....	108
6.2 基于延时反馈的直流电机驱动混沌化 .....	108
6.2.1 控制原理 .....	108
6.2.2 仿真及实验结果 .....	110
6.3 基于延时反馈的永磁同步电机驱动混沌化 .....	114
6.3.1 控制原理 .....	114
6.3.2 仿真及实验结果 .....	115
6.4 基于比例延时反馈的直流电机驱动混沌化 .....	116
6.4.1 控制原理 .....	116
6.4.2 仿真及实验结果 .....	118
6.5 基于混沌速度参考的直流电机驱动混沌化 .....	119
6.5.1 控制原理 .....	119
6.5.2 仿真及实验结果 .....	120
6.6 小结 .....	121
参考文献 .....	121
<b>第 7 章 基于设计方法的电机驱动混沌化 .....</b>	<b>123</b>
7.1 简介 .....	123
7.2 双凸极永磁电机 .....	123
7.2.1 数学模型 .....	123
7.2.2 设计方法 .....	124
7.2.3 仿真结果 .....	126
7.3 单相单极感应电机 .....	129
7.3.1 数学模型 .....	129
7.3.2 设计方法 .....	130
7.3.3 实验结果 .....	132
7.4 小结 .....	135
参考文献 .....	135



<b>第 8 章 混沌化电机驱动在工业搅拌中的应用</b> .....	137
8.1 简介 .....	137
8.2 电气方式的混沌搅拌器 .....	138
8.3 搅拌实验比较 .....	139
8.3.1 实验安排 .....	139
8.3.2 实验结果 .....	140
8.4 小结 .....	142
参考文献.....	142
<b>第 9 章 混沌化电机驱动在工业压实中的应用</b> .....	143
9.1 简介 .....	143
9.2 电气方式的混沌压实机 .....	143
9.2.1 数学模型 .....	143
9.2.2 控制策略 .....	144
9.3 压实效果比较 .....	145
9.3.1 仿真结果 .....	145
9.3.2 实验结果 .....	146
9.4 小结 .....	149
参考文献.....	149
<b>第 10 章 混沌化开关频率在提高电机驱动中电磁兼容性的应用</b> .....	150
10.1 简介.....	150
10.2 传导性电磁干扰和机械共振.....	151
10.2.1 传导性电磁干扰 .....	151
10.2.2 机械共振 .....	151
10.3 混沌化开关频率.....	152
10.3.1 标准正弦波频率调制 .....	152
10.3.2 混沌化正弦 PWM .....	153
10.3.3 混沌化空间向量 PWM .....	155
10.4 混沌化空间向量 PWM 在感应电机驱动中的应用.....	157
10.4.1 开环感应电机驱动 .....	157
10.4.2 矢量控制感应电机驱动 .....	160
10.5 小结.....	162
参考文献.....	163
<b>附录 课题组主要成果目录</b> .....	164

# 第 1 章 引 论

## 1.1 电机驱动中混沌研究的背景

相对论、量子力学和混沌被认为是 20 世纪科学界的三个伟大发现。其中混沌是最为年轻的科学,实际上混沌(chaos)一词在 1975 年才首次提出<sup>[1]</sup>。简单地说,不同于平衡点、周期解、次谐波解和准周期解这些行为,混沌显现出一种随机但有界的稳态行为。混沌既有内随机性也有可确定性,在空间中表现出既拉伸又收缩的特性。混沌的典型特征包括连续频谱、分数维、无限自相似吸引子、正 Lyapunov 指数、正 K 熵等。在过去的四五十年中,混沌研究广泛地在各个科学领域中展开:天文、生物、物理、化学、工程、地质、数学、医学、气象,甚至是社会科学。但是起初由于混沌本身显示出的无规则性,对混沌的研究都是集中在对混沌现象的鉴别、分析和抑制上。而近年来,越来越多的关于混沌应用的研究展开,其应用的领域包括了液体搅拌<sup>[2]</sup>、大脑调节<sup>[3]</sup>、心脏调节<sup>[4]</sup>、共振抑制<sup>[5]</sup>、通信安全<sup>[6]</sup>、噪声减小<sup>[7]</sup>、故障信息诊断<sup>[8]</sup>、洗碗机<sup>[9]</sup>、风扇<sup>[10]</sup>等。

从 20 世纪 90 年代开始,混沌现象被发现同样存在于电机驱动中,随后关于电机驱动中混沌现象的研究便逐渐兴起。在开始阶段,电机驱动中混沌现象当其边界较小时,常常被误认为是噪声,而当其边界较大时,其被误认为是电机系统的一种不稳定运行。但是,和电机驱动中失步等不稳定行为不同,电机驱动中的混沌现象其实是一种复杂的稳态行为,它是不会随着时间而停止的。

电机驱动中混沌现象的研究刚开始同样是在对混沌现象的鉴别上。通过对电机驱动中混沌现象的鉴别和分析,电机系统中一些非线性现象可以被很好地解释和预测。以此为依据,在设计电机驱动的过程中,就可以很好地避免电机驱动中混沌的产生。混沌现象首先是在 PWM 电压调制的变频感应电机驱动中发现的<sup>[11]</sup>。文献<sup>[11]</sup>对电机的三种运行情况,也就是恒定负载转矩伴随非零变频器输出电压谐波、周期性负载转矩伴随零变频器输出电压谐波以及恒定负载转矩伴随零变频器输出电压谐波进行了分析,发现了 period-doubling 分岔、Neimark-Sacker 分岔和 Hopf 分岔等非线性现象。混沌现象后来又被发现存在于空间向量 PWM 调制和电流滞环控制的电压源型变频器驱动的感应电机驱动中<sup>[12,13]</sup>。在文献<sup>[14]</sup>中,混沌现象又被发现存在于直接转矩控制的感应电机驱动中。该文献在恒定转速和恒定转子磁通的假设下建立了在两个连续开关动作之间的系统动态模

型,通过在每个磁链区域内相同磁链位置处对系统状态进行采样,获得系统的庞加莱映射,从而确定了系统动态方程的特征值。同时,最大 Lyapunov 指数证明了混沌现象的存在。在文献[15]中,通过调节外加输入电压的频率,准周期和混沌行为又被发现存在于混合步进电机中。利用赝相空间重构技术,电机系统的吸引子通过实验方法重构获得,分形维和正 Lyapunov 指数证明了混合步进电机中混沌现象的存在。在永磁同步电机驱动方面,混沌现象首先被发现存在于开环控制的表贴式永磁同步电机中<sup>[16]</sup>。通过适当的时间坐标变换和状态量变换,零输入电压和零负载转矩情况下的电机动态模型可等值为著名的 Lorenz 方程,从而验证该永磁同步电机系统中存在奇异吸引子。在文献[17]中,对表贴式永磁同步电机中混沌的研究又延伸到非零输入电压和非零负载转矩的情况。通过解析方法<sup>[18]</sup>,求得了电机系统中发生 pitchfork 分岔和 Hopf 分岔的电机参数阈值。在文献[19]中,混沌研究又延伸至嵌入式永磁同步电机中。数值仿真揭示了当嵌入式永磁同步电机的参数变化时,电机中将通过阵发途径导致混沌现象的产生。

因为电机驱动中混沌现象表现出随机状的振荡行为,后来出现了一批如何抑制并避免电机驱动中混沌现象的研究成果。在文献[20]中,一种非线性的电流控制器用来抑制永磁同步电机驱动中的混沌现象。通过适当地调节控制器的增益,永磁同步电机驱动中的混沌运动可以被有效地稳定成匀速运动。在文献[21]中,一种反步控制方法用来抑制永磁同步电机驱动中的混沌运动,其关键为强迫电机系统由混沌运动区域进入相邻的恒速运动的吸引区域。和滑模控制方法相比较,这种反步控制方法可以更加平滑地使系统进入稳定状态。为了克服反步法控制器结构复杂的缺点,文献[22]提出了一种自适应的动态表面控制方法以抑制永磁同步电机驱动中的混沌。Lyapunov 渐进稳定性分析法被用来证明该方法的稳定性。此外,还出现了一些智能的方法,如基于模糊 Lyapunov 函数的控制方法,来抑制永磁同步电机驱动中的混沌运动<sup>[23]</sup>。

另一方面,据作者所知,在电机驱动中对混沌现象的应用早前仅有使用混沌 PWM 来降低电机驱动中的电磁干扰<sup>[24]</sup>。这种混沌 PWM 通过在电机中产生混沌的开关频率来扩宽电机输入电压的开关型谐波,达到减小电机驱动中电磁干扰的目的。但是,已有的混沌 PWM 方法只是针对开环控制的电机驱动来设计的,并未考虑到电机驱动闭环控制效果及机械共振等实际问题。同时,混沌具有可确定性又看似随机的特性,已经证明有很多工业应用可在混沌状态下更好地工作。但是,早前很多关于混沌在工业中的应用都是通过机械的方式来实现,有体积较大、不灵活的缺点。若人为地在电机驱动中产生混沌运动并应用到这些工业中,将实现一种电气式混沌化,必将增强混沌应用的控制性和灵活性。因此,这一部分的研究将会是未来一段时间内在电机驱动中混沌研究方面的重点。

## 1.2 本书的主要内容

本书大致总结了著者所在课题组在电机驱动中混沌方面十几年的研究成果,内容涉及多种电机驱动中混沌的鉴别、分析、控制以及工业应用。在深化以往对常用永磁同步电机和感应电机的混沌现象分析和抑制的基础上,本书更将混沌研究延伸到采用不同控制方法的直流电机、开关磁阻电机、同步磁阻电机、双凸极永磁电机、单相罩极感应电机中。而且,本书突破性地将电机驱动中混沌运动运用到工业应用中,在混沌的应用方面开辟了一条新的途径。本书不仅利用解析求解和数值计算对多种电机驱动中的混沌进行了详细分析,同时还提供了大量的实验数据进行验证,供读者了解在电机驱动中混沌研究方面的最新进展。本书共分 10 章:

第 1 章,介绍了用于混沌分析的一些基本理论和方法。首先介绍了混沌的一些基础概念,包括自治系统、非自治系统、庞加莱映射、极限集及吸引子、混沌非奇异吸引子及奇异非混沌吸引子。其次介绍了动态系统中常见的不同类型的分岔,包括了局部分岔和全局分岔。最后介绍了混沌研究的一些基本方法,包括了时域波形和轨迹的直接观测、功率谱分析、稳定分析、Lyapunov 指数、分形维和膜相空间重构。

第 2 章,分析了电流控制模式和电压控制模式下直流电机驱动中的混沌现象,推导了两种控制模式下直流电机驱动的庞加莱映射。通过解析法求解了直流电机驱动系统的特征倍数,获得了系统稳定运行在周期 1 状态和次谐波状态下的参数范围。数值计算和实验结果验证了理论分析。

第 3 章,分析了两种交流电机驱动中的混沌现象。首先分析了带转子电阻补偿环节的矢量控制的感应电机驱动中的混沌现象,发现通过变化电阻补偿器的增益,可使电机在周期性速度指令下产生混沌运动。其次分析了一种闭环控制的同步磁阻电机驱动中的混沌现象。通过解析方式求取了同步磁阻电机系统的特征值和 Lyapunov 指数,确定了系统产生极限环和混沌行为的参数范围。数值仿真和实验结果验证了理论分析。

第 4 章,分析了 PWM 电压调制控制和电流滞环控制的开关磁阻电机驱动中的混沌。基于开关磁阻电机的非线性磁链模型,推导了开关磁阻电机驱动的庞加莱映射及其雅可比矩阵。通过计算正常周期 1 状态的稳定性,获得了系统稳定运行的参数范围。数值仿真验证了理论分析的结果,揭示了开关磁阻电机驱动中的周期 1 状态、次谐波状态和混沌状态的存在。

第 5 章,介绍了电机驱动中混沌的控制及其应用。首先研究了采用传统延时反馈控制方法来抑制电压控制模式直流电机驱动系统中的混沌现象。利用解析的方法获得了系统中周期 1 状态和次谐波状态的参数稳定控制域,并通过数值仿真

和实验结果进行了验证。其次研究了采用改进延时反馈法控制汽车雨刷器电机来抑制雨刷器上的混沌振动。仿真结果证明了该方法不仅可以有效地稳定雨刷器上的混沌振动,还可以在不同电机输入电压的情况下减小雨刷器振幅。

第6章,介绍了电机驱动混沌化及其在工业应用方面的研究。本章中详细介绍了几种基于控制方法的电机驱动混沌化基本原理,包括用于直流电机的延时反馈控制、用于永磁同步电机的延时反馈控制、用于直流电机的比例延时反馈控制和用于直流电机的混沌速度参考控制。仿真和实验结果证明了这些方法具有良好的效果。

第7章,介绍了两种基于设计方法的电机驱动混沌化。首先介绍了通过设计双凸极永磁电机的永磁磁链和三相对称正弦输入电压的幅值,在电机中产生混沌运动。数值仿真获得了双凸极永磁电机周期1状态、次谐波状态、准周期状态和混沌状态的轨迹和庞加莱映射图。其次介绍了通过设计单相罩极感应电机的单相正弦输入电压的幅值和频率在电机中产生混沌运动。实验证明了系统在不同电压参数下发生了各种周期行为和混沌行为。

第8章,通过利用延时反馈控制方法控制永磁直流电机来驱动搅拌叶轮,实现了电气方式的混沌搅拌。实验中检测并比较了不同搅拌方法的搅拌过程,证明了混沌搅拌能够有效阻止搅拌过程中液体内部聚集区域的形成,从而比其他的搅拌方法(匀速搅拌、方波双向变速搅拌和正弦双向变速搅拌)具有更好的搅拌效果。

第9章,通过使用基于比例延时反馈控制方法和混沌参考速度控制方法控制的直流电机来驱动振动压实机,从而产生所需要的混沌振动压实效果。相比早前的基于机械方式的混沌振动压实机,这种基于控制方法的电气式混沌振动压实机结构简单,控制灵活。仿真和实验结果证明了混沌振动压实机比传统的匀速振动压实机和周期振动压实机具有更好的压实效果。

第10章,通过使用混沌幅值调制的正弦信号和混沌频率调制的正弦信号来调制SPWM和SVPWM,四种混沌PWM(CAFM-SPWM、CFFM-SPWM、CAFM-SVPWM、CFFM-SVPWM)策略用来减小感应电机驱动中的电磁干扰。本章所提出的混沌PWM策略不仅运用到开环感应电机驱动中,还运用到矢量控制感应电机驱动中,实验结果证明混沌PWM在有效减小电机驱动中电磁干扰又避免电机机械共振的同时,还可以保证电机驱动具有良好的稳态和动态运行性能。

## 1.3 混沌研究的基本理论和方法

### 1.3.1 混沌的基础概念

#### 1. 自治系统

一个 $n$ 阶自治的连续动态系统可以表示为 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 。相应的解

$\phi_t(x_0)$ 称做流。对于自治的连续系统,向量场  $f$  是不依赖于时间  $t$  的。

## 2. 非自治系统

一个  $n$  阶非自治的连续动态系统可以表示为  $\dot{x} = f(x, t), x(t_0) = x_0$ 。相应的解可以表示为  $\phi_t(x, t_0)$ 。对于非自治的连续系统,向量场  $f$  不仅依赖于状态量  $x$ , 而且依赖于时间  $t$ 。

## 3. 轨道

一个离散的动态系统可以用一个映射  $P: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  来表示,其状态方程可以表示为  $x_{k+1} = P(x_k)$ , 其中  $x_k \in \mathfrak{R}^n$  是状态的第  $k$  次迭代,  $P$  将状态  $x_k$  映射到下一个状态  $x_{k+1}$ 。因此从初始状态  $x_0$  开始,不断应用  $P$  映射迭代,从而产生一系列点  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ , 这些点集合称做轨道<sup>[25]</sup>。

## 4. 庞加莱映射

一个传统的用来离散化连续系统的方法就是庞加莱映射。庞加莱映射可以用  $(n-1)$  阶的离散映射来取代  $n$  阶的连续系统。庞加莱映射的用处正在于减小系统的阶数,并且在连续系统和离散系统之间建立了一座桥梁<sup>[25]</sup>。

对于  $n$  阶非自治系统,若其外加强迫力的最小周期是  $T$ , 最终的庞加莱映射可以定义为  $P(x) = \phi_{t_0+T}(x_0, t_0)$ 。相应的轨道  $P(x_k)$  是对某个轨迹每隔  $T$  时刻采样一次获得,这种操作和每隔  $T$  时刻的频闪观测仪的行为很相似。

对于  $n$  阶的自治系统,其对应的流  $\phi_t(x_0)$  对应着轨迹  $\Gamma$ 。当选择  $\Sigma$  作为一个  $(n-1)$  维的超平面,这样轨迹  $\Gamma$  将穿越超平面  $\Sigma$ 。令  $x_0$  为轨迹  $\Gamma$  在超平面  $\Sigma$  上的一个点,这条轨迹  $\Gamma$  从  $x_0$  开始将再次在  $x_1$  处穿越超平面  $\Sigma$ 。由于  $\phi_t(x_0)$  的连续性,从  $\Sigma$  上  $x_0$  附近的某个小的区域内出发的轨迹将会在  $x_1$  附近的某个小的区域重新穿越  $\Sigma$ 。这样,  $\Gamma$  和  $\Sigma$  定义了从  $x_0$  附近的某个邻域  $U \subset \Sigma$  到  $x_1$  附近的某个邻域  $V \subset \Sigma$  的庞加莱映射  $P$ 。图 1.1 显示了庞加莱映射的示意图。

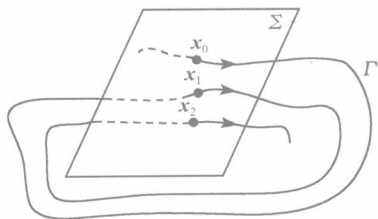


图 1.1 庞加莱映射示意图

## 5. 极限集和吸引子

如果存在某个点  $y$ , 当  $t \rightarrow \infty$  时, 轨迹  $\phi_t(x_0)$  反复地穿越  $y$  的邻域  $U$ , 这时  $y$  称做  $x_0$  的极限点<sup>[25]</sup>。所有这样点  $y$  的集合称做  $x_0$  的极限集。该极限集可以表示为一个  $x_0$  的函数  $Y(x_0)$ 。如果对于极限集  $Y$  的某个邻域  $V$ , 若对于所有的点  $x_0 \in V$ , 都使得  $Y(x_0) = Y$ , 这种极限集  $Y$  就是吸引的, 这种吸引的极限集也称做吸引

子<sup>[26]</sup>。而所有极限集  $Y$  的领域  $V$  的集合就定义为该极限集  $Y$  的吸引域。有四种常见的吸引子。

#### (1) 平衡点。

如果存在一个点  $x_{eq}$ , 该点对所有时刻  $t$  都满足条件  $x_{eq} = \phi_t(x_{eq})$ , 这样一个点  $x_{eq}$  就称做一个平衡点<sup>[25]</sup>。而对于离散系统来说, 平衡点没有对应的极限集。

#### (2) 极限环。

如果存在一条轨迹  $\phi_t(x_0)$ , 其满足条件  $\phi_t(x_0) = \phi_{t+T}(x_0)$ , 而且对所有时刻  $t$  存在这样一个最小的周期  $T$ , 该轨迹称做周期行为。而该周期行为的吸引子是一条闭合轨迹  $\phi_t(x_0)$ , 也称做极限环。对于一个含有周期性强迫力  $T_f$  的  $n$  阶周期非自治系统, 如果轨迹周期  $T$  是  $T_f$  的  $K$  倍, 相应的系统解称做周期  $K$  行为或者是  $K$  阶次谐波<sup>[25]</sup>。对于离散系统来说, 周期行为的极限集是固定点。

#### (3) 圆环面。

如果自治系统的解对应的轨迹是多条周期轨迹的叠加, 但这些子轨迹的频率是互质的, 那么整条合成的轨迹将表现出准周期的行为。如果这些子轨迹数为  $p$ , 相应的准周期轨迹称做  $p$  次周期轨迹<sup>[25]</sup>, 相应的吸引子为  $p$  次圆环面。对于离散系统来说,  $p$  次周期行为的吸引子是一个或多个  $p-1$  型圆环面。

#### (4) 奇异吸引子。

如果解对应的轨迹相对初始状态是指数型的发散, 该极限集就是混沌的<sup>[26]</sup>。混沌轨迹显现出看似随机的行为。通常, 奇异吸引子用来描述混沌极限集的形状。对于离散系统来说, 混沌极限集是一种奇怪的形状, 这种形状和周期行为或准周期行为的简单几何形状是不同的。奇异吸引子具有十分细致的层状结构<sup>[27]</sup>。

而非吸引的极限集  $Y$  存在着稳定的和不稳定的流管。稳定的流管是满足一定条件的点  $x_0$  的集合, 这些点  $x_0$  的轨迹  $\phi_t(x_0)$  在  $t \rightarrow \infty$  时逼近  $Y$ 。而不稳定流管则是另一部分点  $x_0$  的集合, 这些点  $x_0$  的轨迹  $\phi_t(x_0)$  在  $t \rightarrow -\infty$  时刻逼近  $Y$ <sup>[25]</sup>。

### 6. 混沌的非奇异吸引子和奇异的非混沌吸引子

对于大多数微分方程, 混沌通常伴随着几何奇异性一起发生<sup>[28]</sup>。奇异吸引子既不是点的有限集合、平滑的曲线或平面, 也不是由分段连续闭合曲面形成的空间<sup>[29]</sup>。但是对于混沌吸引子来说, 其形状却可以不是奇异的。例如, Logistic 映射在  $A=4$  时具有混沌吸引子, 因为这时该吸引子具有正的 Lyapunov 指数。但是这个吸引子却不是奇异的, 因为它只有一个简单的区间, 即  $[0, 1]$ 。而且对于 Hamilton 系统, 它们可以是混沌的, 但是它们却是保守系统, 所以它们根本就没有吸引子<sup>[26]</sup>。

在另一方面, 奇怪形状的极限集但不是混沌吸引子的情况也同样存在。奇异的非混沌吸引子已经在由两个准周期频率强迫力驱动的动力学系统中发现<sup>[30]</sup>。这

种现象已经通过实验用 Lyapunov 指数、信息维、频谱和相轨迹的方法得到<sup>[31]</sup>。实验证明奇异混沌吸引子的功率谱比周期吸引子以及奇异非混沌的吸引子含有更宽且更多的谐波分量<sup>[32]</sup>。

### 1.3.2 分岔和混沌过渡

分岔是指当系统中一个或多个参数越过一个关键值时,系统的动态行为将发生本质的变化。通常,一个平衡点或固定点的出现、消失或稳定性改变时的分岔称做局部分岔。如果分岔中整条轨道或轨迹完全改变,这种分岔称做全局分岔。某个特征值变成稳定或不稳定的分岔称做连续分岔,而特征值出现或消失的分岔就称做离散分岔。为了方便介绍各种分岔,在下面的分析中假设分岔点为  $\kappa=0$  处。

#### 1. pitchfork 分岔

对于上临界的 pitchfork 分岔,若当  $\kappa < 0$  时,只有一个稳定平衡点或固定点,那么当  $\kappa > 0$  时,这个稳定的平衡点或固定点将变成不稳定的,并且可以产生两个新的稳定分支。这种上临界的 pitchfork 分岔形状上有支叉子指向了正  $\kappa$  的方向。对于下临界的 pitchfork 分岔,当  $\kappa < 0$  时,存在一个稳定的平衡点或固定点以及两个不稳定点分支,当  $\kappa > 0$  时,其中稳定的平衡点或固定点将变为不稳定的。所以下临界 pitchfork 分岔图中的不稳定点构成了一个指向负  $\kappa$  方向的叉子。上临界分岔的示意图如图 1.2(a)所示。

#### 2. Fold 分岔

若当  $\kappa < 0$  时,系统没有平衡点或固定点,而当  $\kappa = 0$  时,两个新的平衡点或固定点将产生,则这两个平衡点或固定点将在  $\kappa > 0$  时分开。其中一个平衡点或固定点是稳定的,而另一个平衡点或固定点则是不稳定的。Fold 分岔的示意图如图 1.2(b)所示。

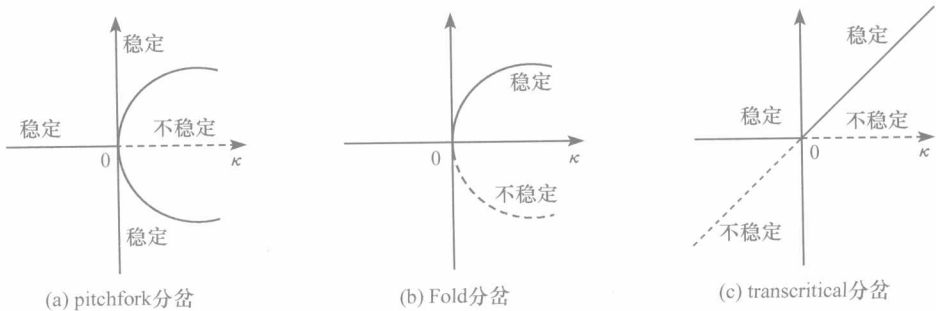


图 1.2 典型分岔示意图



### 3. transcritical 分岔

对于 transcritical 分岔,系统的两个平衡点  $x_{eq}=0$  和  $x_{eq}=\kappa$  的稳定性将在  $\kappa=0$  互换。也就是说,若当  $\kappa<0$  时,平衡点  $x_{eq}=0$  是稳定的,则当  $\kappa>0$  时,平衡点  $x_{eq}=\kappa$  是稳定的。图 1.2(c) 为 transcritical 分岔的示意图。

### 4. period-doubling 分岔

对于系统的一次迭代映射,当  $\kappa<0$  时,系统有一个稳定的固定点,而当  $\kappa>0$  时,该固定点将变为不稳定的;而对于系统的二次迭代映射,当  $\kappa<0$  时,系统有一个稳定的固定点,而当  $\kappa>0$  时,该固定点将变成不稳定的,两个新的稳定固定点将产生,因此它们形成了一个周期 2 的动态行为。这种分岔称做上界 period-doubling 分岔。对于下界 period-doubling 分岔,不稳定的周期 2 行为将发生在  $\kappa<0$  时。实际上,period-doubling 分岔和 pitchfork 分岔在形状上是相似的。

### 5. Hopf 分岔

Hopf 分岔也是和 pitchfork 分岔形状相似的分岔,不过 Hopf 分岔存在于维数高于 1 的系统中。对于上界 Hopf 分岔,当  $\kappa<0$  时,系统中仅有一个稳定的焦点,当  $\kappa=0$  时,系统中有一对共轭的特征值将穿过虚轴,因此当  $\kappa>0$  时,原来的稳定焦点将变成不稳定的,而一个新的极限环将产生。对于下界 Hopf 分岔,当  $\kappa<0$  时,存在一个稳定的焦点和一个不稳定的极限环,当  $\kappa=0$  时,它们合并并且都消失。图 1.3 为上界 Hopf 分岔的示意图。

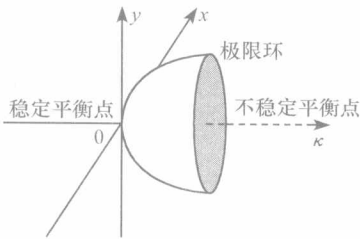


图 1.3 Hopf 分岔示意图

### 6. Neimark-Sacker 分岔

当一个极限环变成不稳定的,并且产生了一个圆环面,Neimark-Sacker 分岔即可产生。这样,系统解所对应的准周期流将出现。当一个系统对应的流中含有圆环面,相应的映射的特征值为一组大小为 1 的共轭复数。经过 Neimark-Sacker 分岔后,映射平面上将产生一个圆环。Neimark-Sacker 分岔的形状和 Hopf 分岔相似,因此也称做二次 Hopf 分岔。

### 7. 从局部分岔通往混沌的过程

由局部分岔通往混沌的过程可以分为三大类:第一类是 period-doubling 分岔途径。第二类是 Hopf 分岔的准周期途径。前面提及,经过二阶的 Hopf 分岔,也就是 Neimark-Sacker 分岔,圆环面将产生,这种新产生的圆环面将引起混沌。第