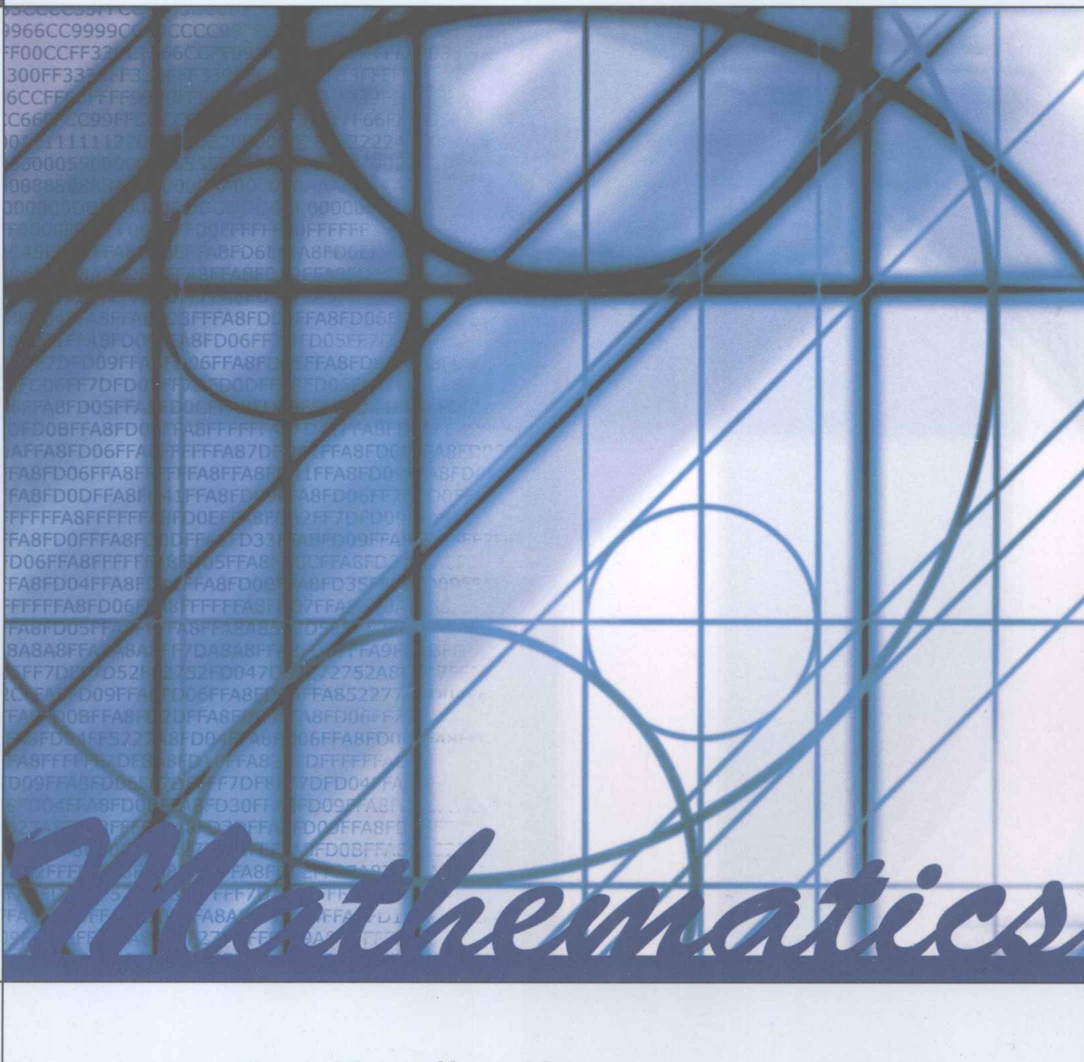
全国高职高专教育“十一五”规划教材

工程数学



主编 黄炜

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国高职高专教育“十一五”规划教材

工　程　数　学

主　编　黄　炜
副主编　王子燕　张　博
陈从科　姚红梅
主　审　李志林　赵成辉

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是根据教育部《关于加强高职高专教育人才培养工作的意见》，在编写了《高等数学》的基础上，围绕培养高等技术应用性人才的目标，根据专业的需求编写而成. 它是作者研究国内外优秀数学教材和高职高专数学课程的现状，改革创新、努力建设精品课程的结果.

本书共八章，内容有行列式、矩阵、线性方程组、线性经济模型简介、概率初步、数理统计初步、拉普拉斯变换与傅里叶变换、数学实验——MATLAB软件在工程数学中的应用（上机实验）及附录等. 各章基本独立成体系，便于模块化教学，可依据专业需要灵活选用.

本书的基本教学时数为60学时左右，适用于工科类的机械、数控、电子、计算机、电气自动化等专业，也适合成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校作为工程数学课程的教材使用，也可作为相关人员的参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

工程数学/黄炜主编. —北京：高等教育出版社，2008.6

ISBN 978-7-04-024080-1

Ⅰ. 工… Ⅱ. 黄… Ⅲ. 工程数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ. TB11

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第096383号

策划编辑 邓雁城 **责任编辑** 邓雁城 **封面设计** 顾凌芝 **责任印制** 蔡敏燕

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号		021-56969109
邮政编码	100011	**免费咨询**	800-810-0598
总　　机	010-58581000	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	021-56965341		http://www.hep.com.cn
			http://www.hepsh.com
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		
排版校对	南京理工大学印刷厂		
印　　刷	上海华文印刷厂		
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2008年7月第1版
印　　张	18.75	**印　　次**	2008年7月第1次
字　　数	458 000	**定　　价**	24.00元

凡购买高等教育出版社图书，如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请在所购图书销售部门联系调换。

物料号　24080-00

前言

工程数学是研究客观规律性的数学分支，是高职教育的重要基础课，它不仅为后续专业课提供必要的工具，同时也是培养专业技术人才素质的重要组成部分，因此成为高职高专教育工科各专业的一门必修的技术基础课.

根据教育部《关于加强高职高专教育人才培养工作的意见》，围绕培养高等技术应用型人才的目标，遵循突出应用性、实践性的原则，结合多年的教学工作实践，我们编写了这本教材.

作为一门技术基础课，工程数学应该突出基础理论知识的应用和实践能力的培养. 因此，在教材内容的安排上，我们以基本应用为主干，适度精简了基础部分的教学内容，主要介绍线性代数、概率论与数理统计方法中的基础知识. 对于数理统计部分，也努力做到在讲清基本数学思想、指明基本原理与结论的基础上，以介绍常用的统计推断方法为主. 相应地，例题、习题、自测题的选配均以帮助学生理解数学概念，理解数学建模思想，掌握常用方法为目的.

本书编写时力求简明、通俗易懂、结合专业、重点突出. 在编写过程中，贯彻"以应用为目的，以必须、够用为度和少而精"的原则，以教师好教、学生好学为目标，结合最新制定的教学大纲，吸收各地同类教材，同类课程教改的经验，对传统的工程数学教材削枝强干，深入浅出，淡化理论推导，不追求严格论证，强调几何、物理、经济和实际背景的诠释，在保证科学性的基础上注意讲清概念，注重对学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养.

本教材共八章，内容有行列式、矩阵、线性方程组、线性经济模型简介、概率初步、数理统计初步、拉普拉斯变换与傅里叶变换、数学实验——MATLAB 软件在工程数学中的应用（上机实验）及附录等专业学习所需的内容. 本教材的基本教学时数为 60 学时左右，适用于工科类各专业. 其中数学实验——MATLAB 软件在工程数学中的应用，易教易学，可发挥计算机软件的作用，有效地培养学生应用现代化计算工具解决各种实际问题的能力，望有条件的院校不要随意删减.

本书各章几乎独立成体系，便于模块化教学，各学校可依据专业需要，灵活选用. 同时，教材富有弹性，对带有"*"的内容可根据实际情况选学（须加学时）.

为了便于学生了解各章教学内容的知识结构及其相互联系，从而更清晰地掌握基本知识以及应用技能，我们在前七章后精心设计了"本章小结"，可帮助学生更清楚明了地把握知识要点，更深刻地理解该章主要学习内容.

书中所选习题、检测题较为新颖，适用面广，是为了巩固概念和提高能力而编写的，供学生练习和检测之用. 本书后面附有正态分布等表、习题参考答案与提示，以方便学生使用.

本教材主编为黄炜，副主编为王子燕、张博、陈从科、姚红梅；第一章由姚红梅编写，第二

章由王子燕编写，第三章由李志林编写，第四章由张博编写，第五章由黄炜、陈从科编写，第六章、第七章由黄炜编写，第八章由覃东君编写，全部附录及每章的“本章小结”由黄炜编写；由黄炜提出全书编写的框架结构及大纲，并负责统稿、定稿及作图.陈军科、何彬、刘睿琼也参与了部分统稿及作图工作.

本教材由李志林、赵成辉担任主审，由马晓翊、赵金锁担任副主审，他们为本书提出了很多修改意见和建议.

编写本书参考了许多文献资料，在此对有关资料的编著者表示深切谢意，同时对本书的编写者所在院校领导的鼎力支持表示感谢，特别对高等教育出版社的大力支持表示由衷的感谢.

由于编者水平所限，错误与疏漏在所难免，欢迎各位从事职业教育的专家、教师批评指正.

编　者

2008 年 4 月

目 录

第1章

行　列　式

在工程技术、经济管理和其他生产活动中，有许多实际问题都可用线性方程和线性方程组表示，而研究线性方程和线性方程组的理论及应用的数学学科，称为线性代数，其中行列式和矩阵是线性代数两个重要的概念和工具. 本章首先给出行列式的概念，然后讨论行列式的性质和计算方法，最后给出线性方程组的克拉默法则.

§1.1　行列式的概念

在学习中，我们经常要作一些代数运算或者要解一些线性方程组，而这些代数式又不便于记忆，例如，$a_1b_2+a_2b_3+a_3b_1-a_3b_2-a_2b_1-a_1b_3$ 要真正记住的确不易. 再例如，任何一个线性方程组的解都取决于每个未知数的系数和每个方程右端的常数. 因此，寻找代数式及线性方程组未知数的系数和方程右端的常数便于记忆的方法，并用此记法研究线性方程组就是我们要解决的问题.

一、二阶与三阶行列式

1. 二阶行列式

二元线性方程组：
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases}$$

由消元法，得
$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x_1+a_{12}a_{21}x_2=b_1a_{21}, \\ a_{11}a_{21}x_1+a_{11}a_{22}x_2=a_{11}b_2, \end{cases}$$

得
$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

同理，得
$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

于是，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

为便于记忆，引进记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

定义 1　由 2^2 个数排成两行两列的正方形表，在正方形表左、右两边各加一条竖线得到一个记号，并用此记号表示主对角线上两个数的乘积减去次对角线上两个数的乘积，则此

记号叫做**二阶行列式**.记作 D,即

$$\boxed{D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1-1}$$

其中实线为主对角线,虚线为次对角线;横排叫行,竖排叫列;a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} 叫做二阶行列式的元素,用 $a_{ij}(i, j=1, 2)$ 表示,i 为行标,表明元素位于第 i 行,j 为列标,表明元素位于第 j 列;$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ 叫做行列式的展开式.

注 ① 二阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$算出来是一个数.

② 记忆方法:对角线法则.主对角线上两元素之积减去次对角线上两元素之积.

因此,上述二元线性方程组的解可表示为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

其中$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$,并令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$, $x_2=\dfrac{D_2}{D}$,称 D 为二元线性方程组的系数行列式.

例 1 解方程组$\begin{cases}3x_1-2x_2=12,\\ 2x_1+x_2=1.\end{cases}$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-24=-21,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

例 2 把 $\sin x$, $\cos x$ 作为一行,$\cos x$, $\sin x$ 作为另一行排成一个行列式,并计算此行列式表示的结果.

解 此四个元素按要求排成的行列式为

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix},$$

它表示 $\sin^2 x-\cos^2 x=-\cos 2x$，即

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}=\sin^2 x-\cos^2 x=-\cos 2x.$$

2. 三阶行列式

类似地，为讨论三元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}$

引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

定义 2 由 3^2 个数排成三行三列的正方形表，在正方形表左、右两边各加一条竖线得到一个记号，并用此记号表示

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

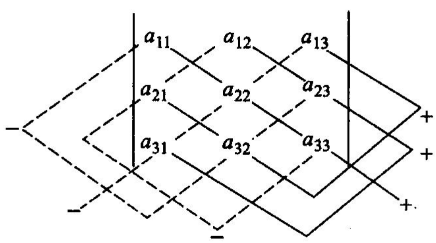
则此记号叫做**三阶行列式**，记作 D，其中数 a_{ij} $(i=1, 2, 3;\ j=1, 2, 3)$ 称为元素，i 为行标，j 为列标. 即

$$\boxed{\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}} \tag{1-2}$$

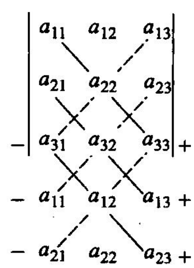
3. 三阶行列式的展开法

三阶行列式可按下面两种对角线法展开：

(1)



(2)



此两种方法表示三阶行列式是实线上三个元素的乘积取正，虚线上三个元素的乘积取负的代数和.

注　① 三阶行列式算出来也是一个数.

② 记忆方法:对角线法则.

对于三元线性方程组,若其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0,$$

可以验证,方程组有唯一解,

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中,$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

例 3　把三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+a_2y+a_3z=0, \\ b_1x+b_2y+b_3z=1, \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

的未知数的系数按方程组中的位置写成三阶行列式,并展开.

解　按要求写成的三阶行列式及展开式为

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a_1b_2+a_2b_3+a_3b_1-a_3b_2-a_2b_1-a_1b_3.$$

注意　此例的展开式就是本节开始时提到的那个代数式,用三阶行列式表示便于记忆.

例 4　计算三阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times2\times2+1\times1\times1+1\times1\times1-1\times2\times1-1\times1\times2-2\times1\times1$$

$$=4.$$

二、*n* 阶行列式

由二阶、三阶行列式的定义可得到下面的等式:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1-3}$$

公式(1-3)说明一个三阶行列式可以表示为三个二阶行列式的代数和. 如果 $n-1$ 阶行列式已经定义,则不难理解 n 阶行列式.

定义 3 由 n^2 个数排成 n 行 n 列的正方形表,在正方形表左、右两边各加一条竖线得到一个记号,则此记号叫做 **n 阶行列式**. 记作 D,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1-4}$$

按公式(1-3), n 阶行列式(1-4) 应当表示 n 个 $n-1$ 阶行列式的代数和,为此,我们引进余子式和代数余子式的概念.

三、n 阶行列式的余子式和代数余子式

在行列式(1-4)中,把元素 a_{ij} 所在行所在列的元素划去,剩余元素保持原有相对位置所组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij},而称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

定理 1 n 阶行列式等于行列式某一行(或某一列)的各元素与其对应的代数余子式乘积的和. 即

$$\boxed{D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)} \tag{1-5}$$

或

$$\boxed{D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)} \tag{1-6}$$

注意 ① 由定义 1、定义 2 和定义 3 知,行列式都表示一个代数式,此代数式的值称为行列式的值.

② n 阶行列式($n\geqslant 4$) 不能按对角线法展开,只能按定理 1 逐次降阶展开.

例 5 把行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ 按第一列展开计算.

解

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &= 1\times\begin{vmatrix} b & b^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} a & a^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix} \\ &= bc^2-b^2c-ac^2+a^2c+ab^2-a^2b \\ &= (abc-b^2c-ac^2+bc^2)+(ab^2-a^2b+a^2c-abc) \\ &= c(ab-b^2-ac+bc)-a(ab-b^2-ac+bc) \\ &= (a-b)(b-c)(c-a).\end{aligned}$$

习 题 1.1

1. 求下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} \tan\alpha & -1 \\ 1 & \tan\alpha \end{vmatrix}$.

2. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix}$.

3. 用行列式解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 60I_1 - 20I_2 - 120 = 0, \\ -20I_1 + 80I_2 + 60 = 0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x - 3y = 9k, \\ 4x - y = 8k. \end{cases}$

4. 已知线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

若用 D 表示未知数的系数组成的行列式，$D_j(j = 1, 2, 3)$ 表示 D 中把第 j 列的元素用 b_1, b_2, b_3 依次替换而其余元素不变的行列式，试写出 D 及 D_j.

5. 按第 3 行展开行列式 D，并求值

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

§1.2 行列式的性质

一、转置行列式

定义 1 将行列式 D 的行与相对应的列互换所得到的行列式称为行列式 D 的**转置行列式**，记为 D^{T}，即行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的转置行列式为 $D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

二、行列式的性质

性质 1 行列式 D 的值与它的转置行列式 D^{T} 的值相等.

由此可知，行列式对行成立的性质对列也一定成立. 因此，下面诸性质的叙述都以行为例，对列不再赘述.

性质 2 互换行列式的两行，行列式变号，而绝对值相等.

性质 3 行列式有两行元素相同，则行列式的值为零.

性质 4 行列式中某一行的各元素同乘以一个数 k，等于用数 k 乘原行列式. 或者说，行列式某一行的各元素有公因子 k，则此公因子可提到行列式记号外.

性质 5 行列式中有两行对应元素成比例，则行列式的值为零.

性质 6 行列式某一行的元素全为零，则行列式的值为零.

性质 7 行列式中某一行元素都是二项之和，则行列式等于相应两个行列式之和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 8 把行列式某一行的各元素乘以同一个数 k 后加到另一行对应元素上，行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

为了以后计算方便，我们引进以下记号：

交换第 i 行(或列) 和第 j 行(或列)，记为 $r_i \leftrightarrow r_j$(或 $c_i \leftrightarrow c_j$)；

第 i 行(或列) 上各元素乘以 k 加到第 j 行(或列) 对应元素上，记为 $r_i \times k + r_j$(或 $c_i \times k + c_j$)；

第 i 行(或列) 各元素乘以 k，记为 $r_i \times k$ (或 $c_i \times k$).

例 1 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

解 将第 2、3、4 行同时加到第 1 行，得

$$D = \begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{各行减去第 1 行}} 7\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 7 \times 1 \times 3 \times 3 \times 3 = 189.$$

例 2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$ $(a\neq b)$.

解 $D=\begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{vmatrix}=(a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix}$

$$=(a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}=(a+3b)(a-b)^3.$$

例 3 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 101 & 199 & 302 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 100+1 & 200-1 & 300+2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 100 & 200 & 300 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$=100\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0+\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=3.$$

三、三角行列式

定义 2 如果一个行列式主对角线及其一侧的元素不全为零,另一侧的元素全为零,则此行列式称为三角行列式.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-7}$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-8}$$

都是三角行列式.行列式(1-7)称为**下三角行列式**,行列式(1-8)称为**上三角行列式**.不难计算三角行列式的**值等于主对角线上所有元素的乘积** $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

例 4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\-3&0&2&1\\3&0&3&2\\-1&-1&0&2\end{vmatrix}.$$

解 此行列式计算时,可以反复地应用性质 8 把行列式化为三角行列式,即

$$D=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\-3&0&2&1\\3&0&3&2\\-1&-1&0&2\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_1\times(-3)+r_3\\ r_1+r_4}]{r_1\times 3+r_2}\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&6&2&4\\0&-6&3&-1\\0&1&0&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&0&3\\0&-6&3&-1\\0&6&2&4\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2\times 6+r_3]{r_2\times(-6)+r_4}-\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&0&3\\0&0&3&17\\0&0&2&-14\end{vmatrix}\xlongequal{r_3\times\left(-\frac{2}{3}\right)+r_4}-\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&0&3\\0&0&3&17\\0&0&0&-\frac{76}{3}\end{vmatrix}$$

$$=-3\times\left(-\frac{76}{3}\right)=76.$$

例 5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}-2&1&3&1\\1&0&-1&2\\1&3&4&-2\\0&1&0&-1\end{vmatrix}.$$

解 注意到行列式的第 4 行有两个零元素,因此,可按第 4 行展开计算,展开前还可化简 D.

$$D=\begin{vmatrix}-2&1&3&1\\1&0&-1&2\\1&3&4&-2\\0&1&0&-1\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+c_4}\begin{vmatrix}-2&1&3&2\\1&0&-1&2\\1&3&4&1\\0&1&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}-2&3&2\\1&-1&2\\1&4&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3\times 2+r_1]{r_3\times(-1)+r_2}\begin{vmatrix}0&11&4\\0&-5&1\\1&4&1\end{vmatrix}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}11&4\\-5&1\end{vmatrix}=31.$$

例 6 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}.$$

解 $\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\substack{\cdots\cdots \\ r_n+r_1}]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+r_1}} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots\cdots \\ c_1\times(-1)+c_{n-1} \\ c_1\times(-1)+c_n}]{\substack{c_1\times(-1)+c_2 \\ c_1\times(-1)+c_3}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} [a+(n-1)b]$$

$$= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例 7 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4+c_3]{c_1+(-2)c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 40.$$