全国高职高专教育"十一五"规划教材

高等数学（上册）

主　编　李文丰
副主编　唐仙芝

高等教育出版社
Higher Education Press

全国高职高专教育“十一五”规划教材

高等数学

（上册）

李文丰 主 编
唐仙芝 副主编

高等教育出版社

内容提要

本书是全国高职高专教育“十一五”规划教材，是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在认真总结高职高专院校数学教学改革经验的基础上，结合对国内外同类教材发展趋势的分析而编写的。本书旨在以清晰、简洁的方式阐述高等数学的“基本概念、基本思想、基本方法”，坚持贯彻以应用为目的，以必需、够用为度的原则，强调数学思想的本质及数学的实用性，淡化数学的严密性、系统性及计算的技巧。

全书分上、下两册，上册内容包括一元函数微积分、微分方程、数学软件应用等；下册内容包括空间解析几何、多元函数微积分、级数、拉普拉斯变换、线性代数、概率统计、数学模型等。本书可作为高等职业技术学院、高等专科学校、成人高等学校等院校各专业的高等数学教材，也可作为工程技术人员知识更新的数学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册/李文丰主编．—北京：高等教育出版社，2008．10

ISBN 978－7－04－025505－8

Ⅰ．高…　Ⅱ．李…　Ⅲ．高等数学－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 147087 号

策划编辑　邓雁城　　责任编辑　邓雁城　　封面设计　张志奇
责任绘图　吴文信　　版式设计　余　杨　　责任校对　张　颖
责任印制　陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市白帆印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2008 年 10 月第 1 版
印　　张	14.75	印　　次	2008 年 10 月第 1 次印刷
字　　数	270 000	定　　价	21.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　25505－00

前言

"高等数学"是高职高专院校必修的一门公共课，是学生学习有关专业知识、专门技术，提高文化素质及获取新知识能力的重要基础，同时也是学生将来生活、工作实践中的一个重要工具。数学教育在高等职业教育中起着至关重要的作用。

本书是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在认真总结高职高专院校数学教学改革经验的基础上，结合对国内外同类教材发展趋势的分析而编写的。本书旨在以清晰、简洁的方式阐述高等数学的"基本概念、基本思想、基本方法"，坚持贯彻以应用为目的，以必需、够用为度的原则，强调数学思想的本质及数学的实用性，淡化数学的严密性、系统性及计算的技巧。

本教材主要突出以下特点：

(1) 每章篇头都给了一个阅读材料，目的是激发学生对本章内容的兴趣，同时也为高等数学中的主要知识提供一个生动、直观的介绍。

(2) 力求从源于实际的问题引入基本概念，突出问题的实际背景。尽量采用"提出问题—分析问题—解决问题"的途径讲清抽象的数学概念。通过基于"直觉的体验"认识过程，使学生可以更容易地理解掌握数学知识。

(3) 在内容的展开上重视数学在生活实践中的应用，突出数学建模的思想，旨在提高学生认识、分析和解决实际问题的能力，把数学这一工具融入到学生的生活实践中。

(4) 采用模块化结构。上册内容为高职高专院校各专业必修的，下册内容可根据不同需要进行选讲。

参加本书编写的院校有：黄河水利职业技术学院、河南大学、华北水利水电学院、郑州电力高等专科学校、郑州铁路职业技术学院、福建交通职业技术学院等。

本书由黄河水利职业技术学院的李文丰担任主编，并承担全书的框架结构

安排及统稿、定稿工作。本书副主编为黄河水利职业技术学院的唐仙芝。

参加本书编写的人员有（按章节顺序排列）

第一章	裘敬华	第二章	郝振莉
第三章	梁宏伟	第四章	高　杰
第五章	杨盛用	第六章	王大鹿
第七章	张志峰	第八章	吕良军
第九章	李文丰	第十章	周晓峰　荆一昕
第十一章	戴建锋　刘　岩	第十二章	朱冬梅
第十三章	刘春新	第十四章	董晓娜
第十五章	张玉祥	第十六章	唐仙芝
第十七章	陶小林　李　峰		

北京航空航天大学的李心灿教授认真细致地审阅了本书书稿，提出了不少独到的建议，编者在此特别表示感谢。在本书编写过程中，编者参阅了一些教材和著作，并得到黄河水利职业技术学院等院校有关领导和专家的大力支持和帮助，高等教育出版社也对本书的出版给予了高度重视，在此一并深表感谢。

本书编写时间匆促，又限于编者的水平，不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编者

2008 年 7 月于开封

目录

第一章　极限与连续 …… 1
第一节　函数 …… 5
第二节　极限的概念及运算 …… 14
第三节　无穷小与无穷大 …… 20
第四节　两个重要极限 …… 25
第五节　函数的连续性 …… 29
复习题一 …… 35
第二章　导数与微分 …… 37
第一节　导数的概念 …… 41
第二节　函数的求导法则 …… 46
第三节　隐函数、参数方程求导法 …… 52
第四节　高阶导数 …… 55
第五节　函数的微分 …… 59
复习题二 …… 63
第三章　导数的应用 …… 65
第一节　中值定理 …… 67
第二节　洛必达法则 …… 69
第三节　函数的单调性及极值 …… 73
第四节　函数图形的描绘 …… 83
*第五节　曲率 …… 90
复习题三 …… 94
第四章　不定积分 …… 96
第一节　不定积分的概念 …… 98

第二节　换元积分法…………………………………………………… 104
第三节　分部积分法…………………………………………………… 113
第四节　积分表的应用………………………………………………… 117
复习题四……………………………………………………………… 119
第五章　定积分 ………………………………………………………… 121
第一节　定积分的概念………………………………………………… 123
第二节　微积分基本公式……………………………………………… 129
第三节　定积分的计算………………………………………………… 132
第四节　广义积分……………………………………………………… 135
复习题五……………………………………………………………… 138
第六章　定积分的应用 ………………………………………………… 139
第一节　微元法、平面图形的面积…………………………………… 141
第二节　体积…………………………………………………………… 145
第三节　平面曲线的弧长……………………………………………… 149
第四节　定积分在物理中的应用……………………………………… 150
第五节　定积分在经济中的应用……………………………………… 155
复习题六……………………………………………………………… 160
第七章　微分方程 ……………………………………………………… 162
第一节　微分方程的概念……………………………………………… 165
第二节　一阶微分方程………………………………………………… 167
*第三节　可降阶的高阶微分方程……………………………………… 173
第四节　二阶常系数线性微分方程…………………………………… 175
复习题七……………………………………………………………… 180
第八章　MATLAB 软件操作及实验 ……………………………………… 182
第一节　MATLAB 的基础知识………………………………………… 184
第二节　MATLAB 在微积分中的应用………………………………… 196
附录Ⅰ　积分表 ………………………………………………………… 203
附录Ⅱ　习题答案 ……………………………………………………… 213
参考文献 ………………………………………………………………… 227

第一章

极限与连续

数学是一门研究数量关系与空间形式的科学. 现实世界是处于永恒的变化之中. 当我们从量的侧面来描述事物的变化以及他们之间的内在联系时，就形成了函数概念. 极限是探寻函数的自变量在某一变化过程中，因变量随之变化趋向的理论工具，是分析、解决动态问题的利器. 函数连续是微积分的基本概念，具有很重要的实际意义，许多问题都是在函数连续的基础上进行讨论的.

变量的数学

16 世纪，对于运动的研究成了自然科学的中心问题. 实践的需要和各门科学本身的全面发展使自然科学转向对运动及各种变化过程和各种变化着的量之间依赖关系的研究.

作为变化着的量的一般性质及它们之间依赖关系的反映，在数学中产生了变量和函数的概念，而数学对象的这种根本扩展就决定了向数学的新阶段——变量的数学的过渡.

物体沿给定的轨道运动，比如沿着直线运动的规律是这样决定的，即物体走过的路程随时间的增加而增加.

例如，伽利略（Galileo，意，1564—1642 年）发现了落体的规律，表示成著名的公式：

$$s=\frac{gt^2}{2}\ (g\approx 9.81\ \text{m/s}^2). \tag{1}$$

一般地，运动规律给出时间 t 内所走过的路程 s. 这里时间 t 和路程 s 是两个变量："自变量"和"因变量"，而对应于每个时间 t 有一段确定的路程 s，这个事实表示路程 s 是时间 t 的函数.

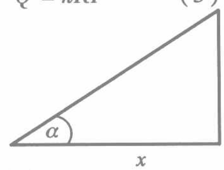
变量和函数这两个概念，无非就是具体变量（如时间、路程、速度、转动角、扫过的面积等）和它们之间的依赖关系（如路程对时间的依赖关系等）的抽象概括.

函数是一个变量对另一个变量的依赖关系的抽象模型，y 是 x 的函数这个断言，在数学中就表示：对于每个取 x 的值，对应着一个确定的 y 值.

例如，质量为 m 的物体，动能是速度 v 的函数：$E=\frac{mv^2}{2}$. (2)

导线中有电流通过时单位时间内产生的热量有公式：$Q=kRI^2$ (3)

给定锐角 α 和直角边 x 的直角三角形的面积（右图）可以表示为



$$S=\frac{1}{2}x^2\tan\alpha, \tag{4}$$

在角度 α 确定的情况下，面积是直角边 x 的函数.

式（1）—式（4）可以统一成一个公式 $y=\alpha x^2$ (5)

这就是从具体变量 t，s，E，v，Q，I 等过渡到一般变量 x 和 y，那么关于函数的数学学说研究的则是与具体量都没有联系的一般公式.

对于具体量的进一步抽象就是：不是考察 $y=\alpha x^2$，$y=\sin x$，$y=\lg x$ 等 y 对于 x 的给定依赖关系，而是考察 y 对于 x 的一般函数关系，以抽象公式 $y=f(x)$ 来表示. 这个公式的意思是：量 y 是 x 的某个函数，就是说，对于每个可以取 x 的值，依某种方法对应着一个确定的 y 值. 这些给定函数（$y=\alpha x^2$，$y=\sin x$ 等）及任意的（更准确地说，多少是任意的）函数也成了数学的研究对象.

数学中专门研究函数的领域叫做数学分析，数学分析或者有时候叫做无穷小量的分析. 这最后一个名称的来源是因为无穷小量概念是研究函数的重要工具.

函数是一个量对于另一个量的依赖关系的抽象模型，它们都是从一定的实际问题产生的，都是在一般的、抽象的形式中反映出现实世界现实的量的关系.

洗衣服中的数学

在洗衣服的时候，要先用少量的水和洗涤剂浸泡，然后再用手或洗衣机揉搓并挤“干”衣服里的水.

我们知道，挤“干”是不彻底的：衣服里始终会有残留的污水——假设其中包含洗涤剂的污物有 m_0 千克，残留的水有 w 千克.

现在的问题是，怎样合理用一定量的 A 千克水，把衣服洗得尽量干净.

我们把 A 千克水分成 n 次使用，每次用 a_1，a_2，…，a_n 千克. 经过这 n 次洗涤之后，衣服上剩下的污物可以由下面的计算得出.

把含有 m_0 千克污物和 w 千克的水的衣服，放到 a_1 千克的水中揉搓以后，m_0 千克污物就均匀分布在 $(w+a_1)$ 千克的水中. 洗涤并把水挤“干”后，显然有

$$\frac{\text{原来残存污物量 } m_0}{w+a_1}=\frac{\text{衣服上尚存污物量 } m_1}{\text{拧“干”后残留水量 } w}$$

即

$$m_1=\frac{m_0 w}{w+a_1}=\frac{m_0}{\left(1+\frac{a_1}{w}\right)}.$$

用相同的方法可以得到

$$m_2=\frac{m_1}{\left(1+\frac{a_2}{w}\right)}=\frac{m_0}{\left(1+\frac{a_1}{w}\right)\left(1+\frac{a_2}{w}\right)}.$$

显然，经过 n 次洗涤并挤“干”后，衣服上残留的污物量是

$$m_n=\frac{m_0}{\left(1+\frac{a_1}{w}\right)\left(1+\frac{a_2}{w}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{w}\right)},$$

这个式子就是洗衣服的“数学模型”.

可以证明，当每次用水量 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{A}{n}$ 时，使残留的污物量最少，即

$$m_n=\frac{m_0}{\left(1+\frac{a_1}{w}\right)^n}=\frac{m_0}{\left(1+\frac{A}{nw}\right)^n}.$$

由上式可知当洗涤次数 n 增大时，残留的污物量 m_n 逐渐减小.

那么当洗涤次数 n 无限增加时，能使衣服上残留的污物无限减少吗？

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{A}{nw}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{A}{w}\cdot\frac{1}{n}\right)^{n\frac{w}{A}\cdot\frac{A}{w}}=e^{\frac{A}{w}}$. 可知，当洗涤次数无限增加时，衣服上残留的污物无限趋近于 $\frac{m_0}{e^{\frac{A}{w}}}$. 即不可能通过无限增多洗涤次数来无限减少衣服上残留的污物.

一般地，洗涤次数为 3—5 次时，衣服上残留的污物就比较接近于 $\frac{m_0}{e^{\frac{A}{w}}}$ 了. 因此漂洗衣服时，过多的增加漂洗次数并不能明显减少衣服上残留的污物量.

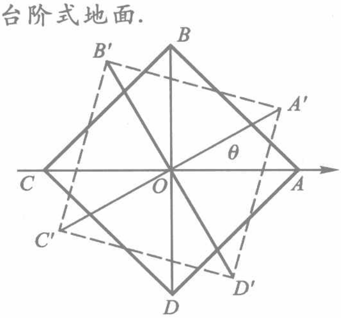
桌子摆放问题

在一块不平的地面上放一张方桌，可以将方桌绕中心转动而不需要平移就能使方桌的四脚同时着地. 对于这个似乎与数学毫无关系的问题，我们下面将利用一个巧妙而简单的数学模型给出解释.

首先，我们假设

(1) 方桌的四脚构成平面上的严格的正方形；

(2) 地面高度不会出现间断，亦不会出现台阶式地面.



如图所示，以正方形的中心为坐标原点，当方桌绕中心转动时，正方形对角线 CA 与 x 轴所成的角为 θ. 设 A、C 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$，B、D 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$，方桌在任何时刻 $g(\theta)$、$f(\theta)$ 总有一个为零，不失一般性，设 $g(0)=0$. 由假设条件 (2)，$f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 皆是 θ 的连续函数. 这样，我们把方桌问题归结为数学问题：对于连续函数 $f(\theta)$ 及 $g(\theta)$，$f(0)\geqslant 0$，且对任意 θ，皆有 $f(\theta)\cdot g(\theta)=0$. 证明：存在 θ_0 使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

证 (1) 若 $f(0)>0$，则将方桌旋转 $\frac{\pi}{2}$，这时方桌的对角线互换，故

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(0)=0,\ g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)>0,$$

构造函数 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则 $h(0)>0$，$h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

显然，$h(\theta)$ 是连续函数，由连续函数的介值定理，存在 $\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使 $h(\theta_0)=0$，

即 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$，又由于 $f(\theta_0)\cdot g(\theta_0)=0$，

故有 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

即当方桌绕中心转动 $\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 角时，方桌的四脚同时着地.

第一节 函 数

一、函数的概念

在某些实际问题中，往往同时有几个变量，它们彼此之间并不孤立，而是相互联系并按照一定的规律变化着.

先看几个具体例子.

例 1 某工厂用边长为 a 的正方形铁皮制造一个无盖铁盒（四角各剪去一个边长为 x 的正方形），如图 1－1.

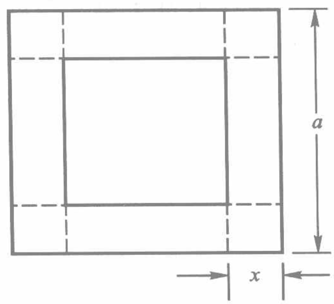


图 1－1

盒的容积 V 和高 x 存在着依赖关系：

$$V=x(a-2x)^2.$$

例 2 一笔 P_0 元的存款，年利率为 r，以复利方式计息，在 t 年后本利和为 P，则

$$P=P_0(1+r)^t.$$

例 3 黄河下游自 20 世纪 80 年代后期以来，来水量呈不断减少趋势，而且河道引水量一直保持在一个较高水平（如图 1－2）. 图中的折线表示 1950—2002 年间，黄河下游利津站与中游花园口站水量比值的对应关系.

若用 x 表示年份，y 表示利津站与花园口站年水量比，并设 $\hat{y}$ 为 y 的估计值，则 x 与 y 的估计值 $\hat{y}$ 的对应关系还可以用下列解析式模拟，如图 1－2 中的光滑曲线.

$$\hat{y}=-0.023\ 554\ 6x^2+91.693x-89\ 133.$$

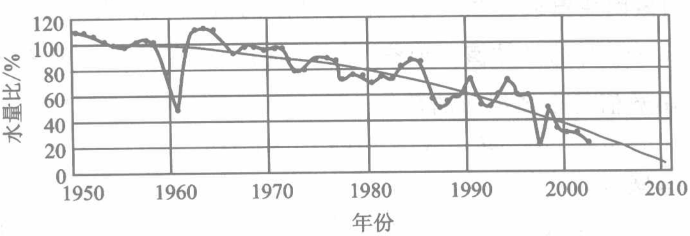


图 1－2 利津站与花园口站年水量比的历年变化

例 4 降水是自然界中发生的雨、雪、露、霜、霰、雹等现象的统称. 降水强度是指单位时间内的降水量，以毫米/分或毫米/时作为计量单位. 在实际工作中常根据降水量进行分级. 如果小雨、中雨、大雨、暴雨、大暴雨、特大暴雨等分别用 1，2，3，4，5，6 等级表示，则表 1－1 反映了 12 小时降水量 x

与降雨强度等级 y 之间的对应关系.

表 1-1　降水强度分级

12 小时降水量 x	$0.2<x\leqslant 5$	$5<x\leqslant 15$	$15<x\leqslant 30$
降水强度等级 y	1	2	3
12 小时降水量 x	$30<x\leqslant 70$	$70<x\leqslant 140$	$x>140$
降水强度等级 y	4	5	6

12 小时降水量 x 与降水强度等级 y 之间的对应关系，还可以用解析式表示：

$$y=\begin{cases}1 & 0.2<x\leqslant 5\\ 2 & 5<x\leqslant 15\\ 3 & 15<x\leqslant 30\\ 4 & 30<x\leqslant 70\\ 5 & 70<x\leqslant 140\\ 6 & x>140\end{cases}.$$

以上各例，就其具体意义来说，各不相同，但其共同的本质是：参与同一过程的变量之间是互相依赖的. 一个变量取定了一个数值，按照某种确定的对应关系，就可以求得另一个变量相应的值. 这种变量之间的依赖关系，就叫**函数**.

1. 函数的定义

定义 1　设有两个变量 x 和 y，D 是一个非空实数集，如果对于任意一个 $x\in D$，按照确定的对应法则 f 都有唯一确定的值 y 与之对应，则称变量 y 是定义在 D 上的变量 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 称 D 为这个函数的**定义域**，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量或函数**. 当 x 取定 D 中的值 x_0 时，对应值 $y_0=f(x_0)$ 称为函数 y 在 $x=x_0$ 时的**函数值**，记作 $y\big|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$. 当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值的全体组成的数集

$$M=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}.$$

称为函数的**值域**.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号是 f，它表示 x 与 y 之间的对应法则，即对 x 的一种运算法则.

函数常用的表示方法有公式法（解析法）、表格法和图像法三种.

函数的定义域和对应法则是确定函数关系的两个要素. 如果两个函数的定义域和对应关系相同，它们就是相同的函数.

函数的概念蕴含着一种思想方法，即通过某一事实的信息去推知另一事实

的信息.

2. 函数的定义域

研究函数时，必须关注函数的定义域. 函数的定义域常用集合或区间表示. 后续学习中，还会用到与区间有关的一个概念——**邻域**.

定义 2 设点 x_0 和 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的实数 x 的全体叫做**点 x_0 的 δ 邻域**，记作 $U(x_0, \delta)$. 点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

点 x_0 的 δ 邻域是以 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，如图 1－3.

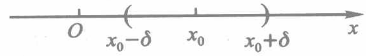


图 1－3

把邻域的中心 x_0 去掉，称为点 x_0 的去心邻域，记为 $U(\hat{x}_0, \delta)$.

例 5 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{x}{\ln(x-1)}$；(2) $y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\dfrac{x}{4}$.

解 (1) 要使该函数有意义，必须

$$\ln(x-1)\neq 0，且 x-1>0，$$

故函数的定义域为 $(1, 2)\cup(2, +\infty)$.

(2) 要使该函数有意义，必须

$$\begin{cases} x^2-4\geqslant 0 \\ -1\leqslant \dfrac{x}{4}\leqslant 1 \end{cases}，即\begin{cases} |x|\geqslant 2 \\ -4\leqslant x\leqslant 4 \end{cases}.$$

故函数的定义域为 $[-4, -2]\cup[2, 4]$.

3. 分段函数

在生产实践和科学实验中经常遇到这样的函数，自变量在不同的范围内时，函数关系由不同的解析式表示，这种函数称为**分段函数**. 例 4 中的函数就是分段函数.

例如：绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$，符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

是分段函数.

注意 分段函数在其整个定义域内是一个函数，而不是几个函数.

例 6 已知分段函数 $f(x)=\begin{cases} 2x & -1\leqslant x<0 \\ 0 & x=0 \\ x^2+2 & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$，

(1) 求它的定义域并作图；(2) 求函数值 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

解 (1) 它的定义域为 $D=[-1,0)\cup\{0\}\cup(0,1]=[-1,1]$

根据函数表达式，分段作图 1-4.

(2) 因为 $-\frac{1}{2}\in[-1,0)$，所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$.

因为 $0\in\{0\}$，所以 $f(0)=0$.

因为 $\frac{1}{2}\in(0,1]$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2=\frac{9}{4}$.

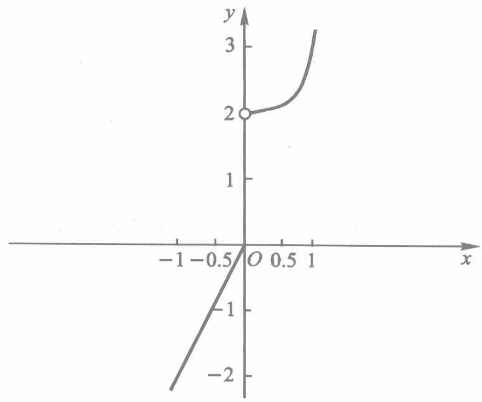


图 1-4

二、函数的性质

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若存在一个正数 M，对任意的 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称**函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有界**，如果这样的正数 M 不存在，则称**函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上无界**.

例如，$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，$x\in(-\infty,+\infty)$，所以 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，又如函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上有界，但在 $(0,2]$ 上无界.

2. 函数的单调性

如果函数 $y=f(x)$ 对区间 (a,b) 内的任意 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (\text{或}\ f(x_1)>f(x_2)).$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调增加的**（或**单调减少的**）.

在区间 (a,b) 内单调增（加）函数与单调减（少）函数统称为**单调函数**. 区间 (a,b) 称为函数 $y=f(x)$ 的**单调增（减）**区间，简称为**单调区间**.

例如，函数 $y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加，在 $(-\infty,0)$ 上单调减少.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. (1) 如果对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；(2) 如果对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如，$y=x^2$ 为偶函数，$y=x^3$ 为奇函数，$y=x^2+x^3$ 为非奇非偶函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在正数 T，$x+T\in D$，且使得 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称此函数为**周期函数**，满足这个等式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的**最小正周期**，简称**周期**.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

一个以 T 为周期的周期函数，它的图像在定义域内每间隔长度为 T 的相邻区间上，有相同的形状.

三、反函数

定义 3 函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M，如果对于 M 中的每一个 y 值（$y\in M$），都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的 x 值（$x\in D$）与之对应，那么所确定的以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，它的定义域为 M，值域为 D. 原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

习惯上，函数的自变量用 x 表示，所以反函数也可表示为 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 7 求函数 $y=2x-1$ 的反函数，并在同一直角坐标系中作出它们的图像.

解 由 $y=2x-1$ 解出 x，得 $x=\dfrac{y}{2}+\dfrac{1}{2}$

也可表示为 $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}$ 如图 1－5.

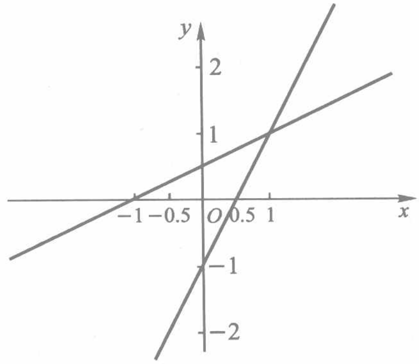


图 1－5

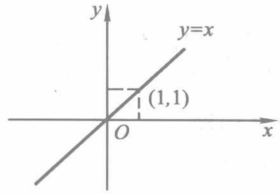
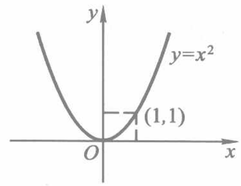
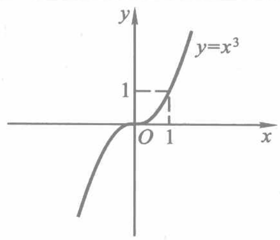
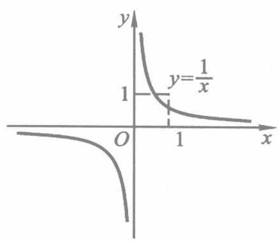
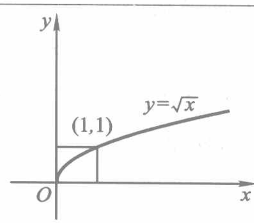
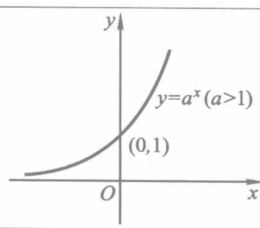
应当注意，并不是任何函数都有反函数. 例如 $y=x^2$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上就没有反函数，但如果将 $y=x^2$ 的定义域限定在 $[0,+\infty)$，则有反函数 $y=\sqrt{x}$.

四、初等函数

1. 基本初等函数

定义 4 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这五类函数统称为**基本初等函数**.

基本初等函数是今后学习的基础，相关知识见表：

	函数	定义域与值域	图像	特性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在区间 $(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$ 单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加