金融数学

金融工程引论

Mathematics for Finance

An Introduction to Financial Engineering

[美] 马雷克·凯宾斯基 Marek Capiński / 托马什·扎斯特温尼克 Tomasz Zastawniak 著

中国人民大学出版社

金融学译丛

金融数学

金融工程引论

Mathematics for Finance

An Introduction to Financial Engineering

梁晶工作室
LIANGJING PUBLISHING HOUSE

[美] 马雷克·凯宾斯基 Marek Capiński / 托马什·扎斯特温尼克 Tomasz Zastawniak 著

郭多祚/校
佟孟华/译

中国人民大学出版社
·北京·

金融学译丛

图书在版编目（CIP）数据

金融数学：金融工程引论/（美）凯宾斯基，（美）扎斯特温尼克著；佟孟华译.
北京：中国人民大学出版社，2009
（金融学译丛）
ISBN 978-7-300-10161-3

Ⅰ. 金…
Ⅱ. ①凯…②扎…③佟…
Ⅲ. 金融—经济数学
Ⅳ. F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 204536 号

金融学译丛
金融数学——金融工程引论
[美] 马雷克·凯宾斯基
托马什·扎斯特温尼克 著
郭多祚 校
佟孟华 译

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http：//www.crup.com.cn		
	http：//www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	河北涿州星河印刷有限公司		
规　　格	185mm×260mm 16 开本	版　　次	2009 年 1 月第 1 版
印　　张	18.5 插页 3	印　　次	2009 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	345 000	定　　价	35.00 元

《金融学译丛》总序

金融学的核心问题是研究资本和资产的配置效率。在市场经济中，这种配置主要是通过金融市场来进行的。广义的金融市场包括证券市场、货币市场、各种形式的银行、储蓄机构、投资基金、养老基金、保险市场等等。市场的参与者包括个人、企业、政府和各种金融机构，他们在资本市场中的交易形成了资本和资产的供求关系，并决定其价格。而价格又指导着资本和资产的供求及其最终配置。资本作为经济活动和经济发展中的关键因素，其配置效率从根本上决定着一个经济的发展过程和前景。因此，一个国家或经济的金融市场的发达程度明确地标志着它的经济发展水平。

中国正处在创建和发展自己的金融市场的关键时期。在谋求经济健康而快速发展的过程中，如何充分地吸引资本、促进投资，进而达到最有效的资本资产配置，无疑是成功的关键。因此，建立一个有效的、现代化的金融体系是我们的当务之急。中国经济进一步开放和国际金融市场全球化的大趋势更增加了这个任务的紧迫性。在这一点上，现代金融理论及其在西方的应用是我们亟须了解和掌握的。

《金融学译丛》旨在把西方金融学的理论和实践方面最新、最权威和最有代表性的著作介绍给大家。我们希望这个系列能够涉及金融的各个主要领域，理论和实践并重，专业和一般兼顾。在我们所选择的书目中，既有反映最高学术水平的专著，也有西方著名商学院视作经典的教材，还有华尔街通用的金融手册。内容包括金融和证券、资产定价、投资、公司财务、风险管理和国际金融等等。但愿我们这个系列能为读者打开现代金融学知识、理论和技术宝库之窗，使它们成为发展中国金融市场的有力工具。

《金融学译丛》推荐委员会

2000 年 10 月

前 言

本书是一本绝佳的金融投资参考书，以整部书的篇幅论述了两个获得诺贝尔经济学奖的理论，涉及的领域广泛，包含很多好的方法。有多少大学本科教科书敢于这样声称？

在债券和股票价格数学模型的基础上，这两个理论始于两个不同的方向：一个是布莱克-斯科尔斯（Black-Scholes）的期权和其他衍生证券的套利定价理论；另一个是马科维茨资产组合优化（Markowitz portfolio optimisation）和资本资产定价模型（Capital Asset Pricing Model）。基于无套利理论的模型还能进一步地研究利率的期限结构。这些都是数理金融的三个重要领域，它们对现代金融市场的运作方法产生了重大影响。本书适用于大学本科二年级或三年级学生，不限于数学专业，其他专业——例如企业管理、金融学、经济学专业也同样适用。

本书内容为一年的课程，大约 100 课时讲完。只选择书中某些课题的课时较少的教师，可以自己选择合适的章节设计。书中穿插了大量的例子和练习，练习全部都有解答，并提供了大量的材料作为辅助教程，使得本书非常适于教学。

学习本书的前提包括初等微积分、概率论和线性代数。在微积分方面，要求熟练掌握导数和偏导数，能够计算单变量和多变量函数的最大值和最小值、拉格朗日乘数、泰勒公式和积分。在概率论方面，要求掌握随机变量及其概率分布，尤其是二项分布和正态分布，还有期望、方差、条件概率和独立性。熟悉中心极限定理对学习本书很有用。对于线

性代数，要求读者会求解线性方程组，掌握矩阵的加法、乘法、数量运算，能够计算逆矩阵和行列式。特别地，关于概率论的参考书，我们推荐我们自己撰写的书：M. Capiński and T. Zastawniak，*Probability Through Problems*，Springer-Verlag，New York 2001.

在大量的数值例子和练习中，使用装有电子表格软件的计算机会有很大帮助，但这并不是完全必要的，在下面给出的网页中，我们提供了一些 Excel 文件，其中包括一些例子与练习的解答。

我们非常感谢奈杰尔·卡特兰德（Nigel Cutland）的提醒，使我们避免了其他一些教科书中经常会出现的错误，我们将在注 4.1 中进一步说明。我们也非常感谢我们的学生和同事对初始版本各章提出的反馈意见。我们还要感谢本书前两版的读者，尤其是安杰伊·帕尔切维斯基（Andrzej Palczewski），他提出了许多改进意见，指出了一些错误，这些错误已经在这次印刷中纠正。

热情地邀请本书读者访问网页（www. springeronline. com/1 - 85233 - 330 - 8）和点击相关的网站，查看最新的下载和更正，或者与作者交流，我们将对您提出的意见表示深深的感谢。

马雷克·凯宾斯基和托马什·扎斯特温尼克

2004 年 7 月

目 录

第 1 章 引论：简单市场模型

1.1 基本概念和假设

1 假设有两种可交易资产：一种是无风险资产；一种是风险证券。无风险资产指银行存款或是由政府、金融机构、公司发行的债券。风险证券的典型代表是股票，风险证券还可能是外币、黄金、商品，或未来的价格今天为未知的任何虚拟资产。

我们在引论中限定时间仅有两个时刻：今天，即 $t=0$；未来的某个时间，比如说一年以后，即 $t=1$。更精确和更符合实际的情况我们将在后面的各章研究。

风险证券的**头寸**（position）是指一个投资者持有的股票份额。1 股在时间 t 的价格用 $S(t)$ 表示。当前的股票价格 $S(0)$ 是已知的，但未来的价格 $S(1)$ 是未知的：可能上涨，也可能下跌。差额 $S(1)-S(0)$ 与初始价格的比即所谓的收益率，或者简称为收益，可以表示为

$$K_S=\frac{S(1)-S(0)}{S(0)}$$

它也是具有不确定性的。我们将在第 3 章中论述股票的动态价格。

无风险资产的头寸是指在银行账户中的金额。投资者可选择继续把

钱存在银行，也可选择投资债券。我们用 $A(t)$ 表示债券在时间 t 的价
2 格。与当前的股票价格一样，债券的当前价格 $A(0)$ 是已知的。但是，与股票不同，债券在时间 1 的价格 $A(1)$ 也是已知的，具有确定性。例如，$A(1)$ 是由发行债券的机构确保的支付，在这种情况下，我们说债券到期时的面值为 $A(1)$。用与股票同样的方法定义债券的收益率为

$$K_A=\frac{A(1)-A(0)}{A(0)}$$

我们将在第 2 章、第 10～11 章中详细地研究无风险资产。

我们的任务是构建金融证券市场的数学模型。关键的第一步与涉及的数学对象的特性相关。下面我们将设定一些假设，其目的是寻求现实世界的复杂性与数学模型的简化性和局限性之间的一种妥协，附加这些假设是为了模型更容易处理。这些假设反映了现在的妥协情形，但将来会被修改。

假设 1.1（随机性（Randomness））

未来的股票价格 $S(1)$ 是**随机变量**，它至少取两个不同的值。无风险证券的未来价格 $A(1)$ 是已知数。

假设 1.2（价格的正性）

所有股票和债券的价格是严格正的，即

$$A(t)>0,\ S(t)>0 \quad t=0,1$$

持有 x 股股票和 y 份债券的投资者在时间 $t=0,1$ 时的总财富为

$$V(t)=xS(t)+yA(t)$$

数对（x，y）被称为**资产组合**（portfolio）；$V(t)$ 为这个资产组合的**价值**，换言之，$V(t)$ 是投资者在时间 t 的**财富**。

资产价格在时间 0～1 的增长决定着资产组合的价值变化，即

$$V(1)-V(0)=x(S(1)-S(0))+y(A(1)-A(0))$$

这个差额（可以是正的、零或负的）与初始价值的比为资产组合的收益率，即

$$K_V=\frac{V(1)-V(0)}{V(0)}$$

3 股票或债券的收益率是资产组合收益率的特殊情况（分别为 $x=0$ 或 $y=0$）。注意，因为 $S(1)$ 为随机变量，于是 $V(1)$ 及相应的 K_S 和 K_V 都是随机变量。无风险资产的投资收益 K_A 是确定性的。

例 1.1

假设 $A(0)=100$ 美元；$A(1)=110$ 美元，则债券投资的收益率为

$$K_A=0.10$$

即 10%。另外，假设 $S(0)=50$ 美元，且随机变量 $S(1)$ 取两个值，即

$$S(1)=\begin{cases}52 & \text{概率为 } p\\ 48 & \text{概率为 } 1-p\end{cases}$$

对某一个 $0<p<1$，则股票的收益率为

$$K_S=\begin{cases}0.04 & \text{如果股票上涨}\\ -0.04 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

即 4%或者−4%。

例 1.2

假设债券价格和股票价格与例 1.1 相同，则由 $x=20$ 股股票，$y=10$ 份债券构成的资产组合在时间 0 的价值（单位：美元）为

$$V(0)=2\,000$$

该资产组合在时间 1 的价值为

$$V(1)=\begin{cases}2\,140 & \text{如果股票上涨}\\ 2\,060 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

于是这个资产组合的收益率为

$$K_V=\begin{cases}0.07 & \text{如果股票上涨}\\ 0.03 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

即 7%或者 3%。

练习 1.1

假设 $A(0)=90$ 美元；$A(1)=100$ 美元；$S(0)=25$ 美元，并且假设

$$S(1)=\begin{cases}30 & \text{概率为 } p\\ 20 & \text{概率为 } 1-p\end{cases}$$

式中，$0<p<1$。资产组合由 $x=10$ 股股票，$y=15$ 份债券构成，计算 $V(0)$，$V(1)$ 和 K_V。

练习 1.2

假设股票价格和债券价格与练习 1.1 相同，计算在时间 1 的价

值为

$$V(1)=\begin{cases}1\ 160 & \text{如果股票上涨}\\ 1\ 040 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

的资产组合。这个资产组合在时间 0 的价值是多少？

尽管与实际情况相差甚远，但为了数学上的方便，我们允许资产组合中的风险资产的数量 x 和无风险资产的数量 y 为任意实数，包括负数和分数。这种想法反映在如下的假设中，这个假设对涉及的交易头寸没有附加任何限制。

假设 1.3（可分性、流动性和卖空）

一个投资者持有的股票数量 x 和债券数量 y 可以是任何数，即可以是整数、分数、正数、负数或者是零。一般说来，

$$x, y \in \mathbb{R}$$

可分性指的是投资者持有的股票数量和债券数量可以是分数。当交易量与单位价格相比很大时，我们可以认为在现实世界的交易达到了几乎完美的可分性。

对 x 和 y 的数量不加任何限制与另一个市场特征即**流动性**有关。这意味着，根据需求，任何资产都可以按照市场价格进行任意数量的买或者卖。这显然是数学上的理想化，因为实际上对交易量是有限制的。

如果在资产组合中持有的某种证券的数量是正的，我们就说投资者
5 拥有**多头头寸**。否则，为**空头头寸**，或者**卖空资产**。无风险证券的空头头寸可能涉及发行和出售债券，但实际上，通过借入现金更容易达到同样的融资效果。利率由债券的价格决定。偿还贷款及利息可以认为是**终止**空头。股票的空头头寸可以通过**卖空**来实现。这意味着投资者可以借入股票后卖出，利用得到的收益进行其他的投资。股票的所有者仍对股票拥有所有的权利，特别是有得到红利和在任何时刻卖出股票的权利。因此，投资者必须有足够的财力来履行合约，特别是能够通过回购股票并归还给股票的所有人以结清风险资产的空头头寸。类似地，投资者总可以利用归还贷款和利息来结清无风险证券的空头头寸，基于此，我们附加了如下限制。

假设 1.4（偿付能力）

投资者的财富始终是非负的，即

$$V(t)\geqslant 0 \quad t=0,1$$

满足上述条件的资产组合被称为是可允许的。

在现实世界中，可能的不同价格的数量是有限的。一方面，因为这些价格是特定的十进位数字；另一方面，因为在整个世界中最终的货币数量是确定的，这提供了一个所有价格的上限。

假设 1.5（离散单位价格）

股票的未来价格 $S(1)$ 为只取有限多个值的随机变量。

1.2 无套利原则

在本节中我们将继续叙述市场的最基本假设，简单地说，我们将假设市场不允许没有初始投资的无风险利润。

例如，当市场的参与者出现错误时，可能会出现没有初始投资的无风险利润。假设纽约的交易商 A 以 $d_A=1.62$ 美元兑换 1 英镑的汇率购买
6 英镑，而交易商 B 在伦敦以 $d_B=1.60$ 美元兑换 1 英镑的汇率卖出英镑。如果是这种情况，实际上，交易商就是在分发意外之财了。一个没有任何初始投资的投资者可获得 $d_A-d_B=0.02$ 美元的利润，其方法是，同时取得交易商 B 的空头头寸和交易商 A 的多头头寸。投资者的获利需求将迫使交易商调整汇率使得这个可以获得财富的机会消失。

练习 1.3

2002 年 7 月 19 日，纽约的交易商 A 和伦敦的交易商 B 利用如下汇率交易欧元、英镑和美元：

交易商 A	买入	卖出
1.000 0 欧元	1.020 2 美元	1.028 4 美元
1.000 0 英镑	1.571 8 美元	1.584 4 美元

交易商 B	买入	卖出
1.000 0 欧元	0.632 4 英镑	0.640 1 英镑
1.000 0 美元	0.629 9 英镑	0.637 5 英镑

指出没有任何初始投资的投资者获取无风险利润的机会。

下面的例子说明了在单期简单框架下没有任何初始投资的投资者获取无风险利润的情况。

例 1.3

假设纽约的交易商 A 一年以后以汇率 $d_A=1.58$ 美元兑换 1 英镑购买

英镑，在伦敦的交易商 B 同时以汇率 $d_B=1.60$ 美元兑换 1 英镑卖出英镑；进一步假设美元可以按年利率 4%借入，英镑可在银行账户以 6%利率投资，这样也能制造没有任何初始投资的投资者获得无风险利润的机会，只是不如前面的例子那么明显。

例如，一个投资者借入 10 000 美元并能换成 6 250 英镑，然后存入一个银行账户中。一年以后，获得 375 英镑的利息，总金额将会变为 10 467.50 美元（根据年初与交易商 A 签订的协议）。归还贷款以及 400
7 美元利息之后，投资者将得到 67.50 美元的利润。

显然，一些交易商的汇率报价会发生错误，这可能会被投资者利用，要求交易商重新调整汇率，减少 d_A 或者增加 d_B 以使得利润消失。

我们将作一个假设，避免类似上面例子的情况出现。

假设 1.6（无套利原则）
不存在初始价值 $V(0)=0$ 的可允许的资产组合使得 $V(1)>0$ 具有非零概率。

换言之，如果一个可允许的资产组合初始价值为零，即 $V(0)=0$，那么 $V(1)=0$ 的概率为 1。这意味着，没有投资者获得无风险利润，而且没有初始禀赋。如果违背了这个原则的资产组合存在，则可以得到套利机会。

套利机会在实际操作中很少存在。如果打算利用套利机会，由于收益与交易量相比非常小，小投资者很难获利。另外，套利机会与上面的例子相比，更难把握。违背无套利原则的情况一般是短暂且难以把握的。活跃的投资者（称为套利者）追逐套利利润的积极性将有效地消除套利机会。

在数学模型中，排除套利十分贴近实际，这是最重要和最有效的假设。基于无套利原则的论证是金融数学的主要工具。

1.3 单期二叉树模型

在本节中，我们只考虑非常简单的例子。在这个例子中，股票价格 $S(1)$ 仅取两个不同的值，尽管非常简单，但这种情形对以后理论的发展具有特殊意义。

8 **例 1.4**
假设 $S(0)=100$ 美元，$S(1)$ 可以取两个值，即