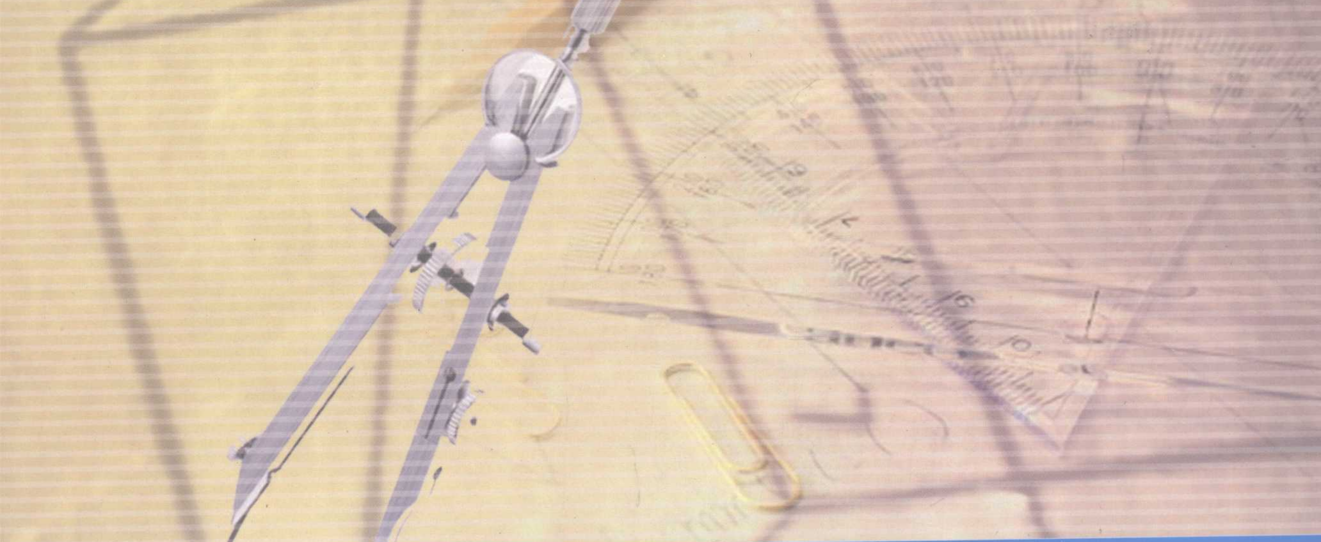
21世纪高职高专精品教材



GAODENGSHUXUE

高等数学（下）

于海波　齐振东　主编

新华出版社

高等数学(下)

主　编　于海波　齐振东

副主编　崔丽娜　韩建玲

于　萍　胡柏新

编　委　邵会伟　钟艳林

新华出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/于海波,齐振东主编. —北京:新华出版社,2008.6

ISBN 978-7-5011-8389-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①于… ②齐… Ⅲ.高等数学—高等学校—技术学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 077036 号

高等数学

主　　编:于海波　齐振东

责任编辑:李树林

出版发行:新华出版社

地　　址:北京石景山区京原路 8 号

网　　址:http://press.xinhuanet.com

　　　　　http://www.xinhuapub.com

邮　　编:100040

经　　销:新华书店

印　　刷:北京佳艺丰印刷有限公司

开　　本:787 mm×1092 mm　1/16

印　　张:18.75

字　　数:300 千字

版　　次:2008 年 6 月第一版

印　　次:2008 年 3 月北京第一次印刷

书　　号:ISBN 978-7-5011-8389-0

定　　价: 32.00 元

图书如有印装问题,请与印刷厂联系调换　电话:(010)51287083

前　言

《高等数学》是高等职业院校一门重要的基础课，这本高职高等数学教材围绕高职培养目标，体现了“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，我们在总结多年的高职高专数学教学经验、探索高职高专数学教学的发展动向、分析国内外同类教材发展趋势的基础上，编写而成的，供理工类高职高专各专业学生使用。

本书内容的选择一是根据职业教育“以就业为导向”的特点，突出教学的应用功能；二是服从于高职的培养目标，根据教学的实际需要，从宽从简、讲情概念、强化应用的原则，注意与普通高中教育数学课程的衔接，适当降低理论要求，重视应用，不过分强调理论的完整性和理论的严谨性。教学内容编排力求采用具体抽象应用的思路，注意由浅入深，由易到难，循序渐进，符合学生的认识规律和接受能力。在内容编排的逻辑结构和体系上做一些调整，对传统内容适当地削弱，对保留的传统内容力求使用现代的思想、方法和语言，做到有新意。增加课程弹性，适当安排选修内容，将数学建模的思想渗透到每章，充分体现数学的应用性。为此，确立编写本书的指导思想为：重视概念、强调应用、侧重计算。本书的特色也体现在下述几个方面：

基本知识培养目标：

(1)使学生掌握一元函数微积分学的基础知识与基本运算；有能力根据生活和工作中的实际问题所提供的条件，选择和应用有关数学模型或建立简单的数学模型；有能力利用常用的数学软件，完成必要的计算、分析或判断。

(2)使学生掌握技术数学若干领域的基本知识与基本运算，并了解其使用范围；有能力根据常规工艺、常规业务、常规管理中的实际问题所提供的条件，选择和应用相应的数学模型或建立简单的数学模型；有能力利用常用的数学软件，完成必要的计算、分析或判断。

基本能力培养目标：

(1)使学生具有进行较复杂的工程技术计算的能力及推理分析问题和解决问题的能力。

(2)不断提高学生的逻辑思维、基本运算、数形结合、空间想象及实际应用能力。

全书上下册共有11章，内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分等。

由于水平所限，加之时间仓促，书中难免存在不足甚至是错误之处，敬请读者不吝赐教。

编　者

2008年3月

目　录

第一章　微分方程

函数是研究客观事物规律性的一个重要工具，如何寻求函数关系，在实践中具有重要意义. 然而，在许多实际问题中，有时只能列出表示未知函数的导数（或微分）与自变量之间关系的等式，再从中求解得出所需的函数关系. 这种关于导数（或微分）的等式，就是微分方程，本章主要介绍微分方程的一些基本概念和几种常见微分方程的解法.

第一节　微分方程的基本概念

本节通过具体例子来说明微分方程的有关概念.

例 1　一曲线通过点(1,2)，且在该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线斜率等于该点横坐标平方的 3 倍，求这曲线的方程.

解　设所求曲线的方程为 $y=y(x)$.

根据导数的几何意义可知未知函数应满足关系式　$\dfrac{dy}{dx}=3x^2$　(1)

对(1)式两边积分，得 $y=\int 3x^2dx$，即 $y=x^3+c$　(2)

其中 C 为任意常数. 由于曲线通过点(1,2)，(或写成条件 $y\Big|_{x=1}=2$).　(3)

将条件(3)代入(2)式，得 $C=1$，于是所求曲线的方程为　$y=x^3+1$　(4)

例 2　质量为 m 的物体，受重力作用自由下落，试求物体下落的距离随时间变化的规律.

解　设所求的下落距离关于时间的函数为 $s=s(t)$. 选取坐标系，使 s 轴铅直向下，原点在起点处. 根据牛顿第二运动定律，未知函数应满足方程：　$\dfrac{d^2s}{dt^2}=g$　(5)

由于自由落体的初始位置和初始速度均为零，未知函数 $s=s(t)$ 满足条件：

$$\begin{cases} S\Big|_{t=0}=0, \\ \dfrac{ds}{dt}\Big|_{t=0.} \end{cases} \tag{6}$$

对(5)式两端积分一次，得　$\dfrac{ds}{dt}=gt+C_1$　(7)

再积分一次，得　$s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$　(8)

其中 C_1，C_2 都是任意常数.

将条件 $\dfrac{ds}{dt}\Big|_{t=0}=0$ 代入(7)式，得 $C_1=0$

将条件 $s\Big|_{t=0}=0$ 代入(8)式，得 $C_2=0$

将 C_1, C_2 的值代入(8)式，得物体下落的距离随时间变化的规律为

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 \tag{9}$$

上述两例中的关系式(1)和(5)都含有未知函数的导数，由此我们引出下面微分方程的定义.

定义 1 含有未知函数的导数(或微分)的方程叫做微分方程.

例 1 与例 2 中的(1)和(5)式都是微分方程.

微分方程中未知函数的最高阶导数的阶数，称为微分方程的阶. 例如 $\frac{dy}{dx}=3x^2$ 是 1 阶微分方程，$\frac{d^2s}{dt^2}=g$ 是 2 阶微分方程.

通常 n 阶微分方程的一般形式为 $F(x,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$.

定义 2 凡是代入微分方程，能使方程成为恒等式的函数称该函数为该微分方程的解.

例如：函数(2)和(4)都是微分方程(1)的解，函数(8)和(9)都是微分方程(5)的解.

若微分方程的解中含有任意常数，且独立的任意常数的个数与方程的阶数相同，则称这样的解为微分方程的通解. 如函数(2)和(8)分别是方程(1)和(5)的通解.

确定微分方程通解中的任意常数的值的条件，称为初始条件. 如(3)式和(6)式. 由初始条件确定了微分方程中通解中任意常数的值后所得到的解，称为特解. 如函数(4)和(9)分别是方程(1)和(5)满足初始条件的的特解. 求微分方程满足初始条件的特解的问题，称为初值问题.

例 3 验证函数 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}$ 是方程 $y''-y'-6y=0$ 的通解，并求满足初始条件 $y\Big|_{x=0}=0, y'\Big|_{x=0}=5$ 的特解.

解 $y'=-2C_1e^{-2x}+3C_2e^{3x}$，$y''=4C_1e^{-2x}+9C_2e^{3x}$

将 y', y'' 代入方程，得

$y''-y'-6y=(4C_1e^{-2x}+9C_2e^{3x})-(-2C_1e^{-2x}+3C_2e^{3x})-6(C_1e^{-2x}+C_2e^{3x})=0$

所以函数 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}$ 是方程 $y''-y'-6y=0$ 的解. 又因为解中含有的任意常数的个数与阶数相同，且 C_1, C_2 相互独立(即 C_1, C_2 不能合并)，所以函数 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}$ 是方程的通解.

习题一

1. 指出下列等式中哪些是微分方程，并说明它们的阶数：

1) $\frac{dy}{dx}+3xy=2\sin x$　　2) $y^2+3xy-2x^3=0$

3) $5(y'')^2-y''+6y=4$　　4) $y\sqrt{1+x^2}\,dy+x\sqrt{1+y^2}\,dx=0$

5) $y'''=3xy^2-1$　　6) $dy=(1+x^2)dx$

2. 判断下列各题中的函数是否是所给微分方程的解，如果是，指出是通解还是特解（其中 C_1,C_2 为任意常数）

1) $y''+4y=0$　$y=C_1\sin(2x+C_2)$

2) $x^2y''-2y=x$　$y=x^2-\frac{x}{2}$

3) $\frac{dy}{dx}-2y=0$　$y=Ce^{2x}$

4) $y''-2y'+y=0$　$y=x^2e^x$

3. 验证：函数 $y=Cx+\frac{1}{C}$（C 为任意常数）是方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{1}{x}=\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}$ 的通解，并求满足初始条件 $y\Big|_{x=0}=2$ 的特解.

4. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程：

1) 曲线在点处的切线斜率等于该点横坐标的倒数.

2) 曲线上任一点处的切线的纵截距等于切点纵坐标的一半.

第二节 一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $F(x,y,y')=0$,本节只介绍几种常见的一阶微分方程及其解法.

一、可分离变量的微分方程

形如 $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ 的一阶微分方程,称为可分离变量的微分方程.

其解法如下:

1)分离变量,将方程的两端化为分别只含有一个变量的函数及其微分的形式

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$$

2)两边积分,得

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$$

3)求出积分,得通解 $G(y)=F(x)+c$,其中 $G(y)$,$F(x)$ 分别是 $\frac{1}{g(y)}$,$f(x)$ 的一个原函数.

例 1 求微分方程 $y'=xy$ 的通解.

解 方程化为 $\frac{dy}{dx}=xy$

分离变量,得 $\frac{1}{y}dy=xdx$

两边积分,得 $\ln|y|=\frac{1}{2}x^2+C_1$,即 $|y|=e^{\frac{1}{2}x^2+C_1}=e^{C_1}e^{\frac{1}{2}x^2}$

或 $y=\pm e^{C_1}e^{\frac{1}{2}x^2}$,因为 $\pm e^{C_1}$ 仍是任意常数,令 $\pm e^{C_1}=C$,得方程的通解为 $y=Ce^{\frac{1}{2}x^2}$

显然,$y=0$ 也是方程的解,它包含在通解之中,只要取 $C=0$ 即可.

今后为方便起见,可把 $\ln|y|$ 均写成 $\ln y$,但要明确最终结果中的 C 是可正可负的任意常数.

因此上述积分过程可写为:$\ln y=\frac{x^2}{2}+\ln C$(注意常数 C 的写法)

通解为 $y=Ce^{\frac{1}{2}x^2}$

例 2 求解初值问题 $\begin{cases} y'=e^{3x-y} \\ y\Big|_{x=0}=0 \end{cases}$

解 方程可化为 $\frac{dy}{dx}=\frac{e^{3x}}{e^y}$

分离变量,得:$e^y dy=e^{3x}dx$

两边积分,得:$e^y=\frac{1}{3}e^{3x}+C$

将 $y\Big|_{x=0}=0$ 代入 $e^{y}=\frac{1}{3}e^{3x}+C$ 中，得 $C=\frac{2}{3}$

所以，初值问题的解为　$e^{y}=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{2}{3}$

例 3　求微分方程　$y(x^2-1)dy-x(y^2+1)dx=0$ 的通解.

解　分离变量，得：$\frac{y}{y^2+1}dy=\frac{x}{x^2-1}dx$

两边积分，得：$\frac{1}{2}\ln(y^2+1)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\ln C$

所以，原方程的通解为：$y^2+1=C(x^2+1)$

二、齐次方程

可化为形如$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$的微分方程叫做齐次型微分方程，简称齐次方程.

例如方程$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$，$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$都是齐次方程.

齐次方程的解法是引进新的变量 $u=\frac{y}{x}$，使方程化为可分离变量的方程，然后求解.

例 4　求方程$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$的通解.

解　由于$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$可化为$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$，故令 $u=\frac{y}{x}$，

则 $y=ux$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，将上述两式代入原方程，得：$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u}{1-u}$

整理，得：$x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{1-u}$

分离变量，得：$\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x}$，

两边积分，得 $\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln x+\ln c$

即

$$\frac{e^{\arctan u}}{\sqrt{1+u^2}}=cx$$

换回原变量，得通解为

$$e^{\arctan\frac{y}{x}}=c\sqrt{x^2+y^2}$$

例 5　求方程 $y'=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$的通解.

解　令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=ux$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，代入原方程，

得 $u+x\dfrac{du}{dx}=u+\tan u$,即 $x\dfrac{du}{dx}=\tan u$

分离变量,得 $\cot u du=\dfrac{1}{x}dx$

两边积分,得

$$\ln\sin u=\ln x+\ln C$$

整理,得 $\sin u=Cx$

换回原变量,得 $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$,即通解为 $y=x\arcsin Cx$

例 6 解初值问题:

$$\begin{cases}\left(x+y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx=x\cos\dfrac{y}{x}dy\\ y\Big|_{x=0}=0\end{cases}$$

解 方程整理,得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y\cos\dfrac{y}{x}}{x\cos\dfrac{y}{x}}=\frac{1+\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}}{\cos\dfrac{y}{x}}$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$,则 $y=ux$,$\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$,代入原方程,

得 $u+x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1+\cos u}{\cos u}$,即 $x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{\cos u}$

分离变量,得 $\cos u du=\dfrac{1}{x}dx$

两边积分,得

$$\sin u=\ln x+\ln C=\ln Cx$$

换回原变量,得通解为 $\sin\dfrac{y}{x}=\ln Cx$,

将初始条件 $y\Big|_{x=1}=0$ 代入通解,得 $C=1$

即 初值问题的解为 $x=e^{\sin\frac{y}{x}}$

三、一阶线性微分方程

在一阶微分方程中,如果未知函数及导数都是一次的,那么这类微分方程称为一阶线性微分方程,它的一般形式是

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \qquad (1)$$

其中 $P(x)$,$Q(x)$是 x 的已知函数.

如果 $Q(x)\equiv0$,则

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0 \qquad (2)$$

称为一阶线性齐次方程. 方程(2)称为与方程(1)对应的齐次线性方程.

如果 $Q(x)\neq 0$, 则$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$叫一阶线性非齐次微分方程.

对于(2), 它是一个可分离变量的微分方程. 分离变量, 得

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx$$

两边积分, 得

$$\ln y=-\int P(x)dx+\ln C$$

整理, 得齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$ (C 为任意常数)　　(3)

注意　此时 $\int P(x)dx$ 只表示 $P(x)$的一个原函数.

例 7　求方程 $y'-2xy=0$ 的通解.

解　这是一个一阶线性齐次微分方程, 其中 $P(x)=-2x$.

代入公式(3), 得: $y=Ce^{-\int -2xdx}=Ce^{x^2}$

当 $Q(x)\neq 0$ 时, 由于方程(2)是方程(1)在 $Q(x)\equiv 0$ 时的特殊情况, 所以(2)的通解也应是(1)的通解的特殊情况. 于是当 $Q(x)$为非零函数时, 可以设想(2)的通解公式(3)中的 C 应为 x 的函数, 即设方程(1)有形如 $y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$ 的通解.

将 $y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$ 代入方程(1) 中, 得

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}+C(x)e^{-\int P(x)dx}[-P(x)]+P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$$

即

$$C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

故

$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$$

于是得一阶线性非齐次微分方程(1)的通解公式为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(C+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right)\qquad(4)$$

其中各个不定积分都只表示了对应的被积函数的一个原函数.

上述将齐次线性微分方程的通解中任意常数 C 换成待定函数 $C(x)$, 然后求得线性非齐次方程的通解的方法, 叫做常数变易法.

例 8　求微分方程$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=3x$的通解.

解法一(常数变易法) 对应的齐次方程为$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=0$

分离变量, 得

$$\frac{1}{y}dy=-\frac{1}{x}dx$$

两边积分，得

$$\ln y = -\ln x + \ln C$$

得齐次方程的通解为

$$y = \frac{C}{x}$$

设原方程的解为 $y=\frac{C(x)}{x}$，代入原方程，得

$$\frac{xC'(x)-C(x)}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{C(x)}{x}=3x$$

化简，得 $C'(x)=3x^2$

积分，得 $C(x)=x^3+C$

代入 $y=\frac{C(x)}{x}$ 中，得 原方程的通解为

$$y=\frac{1}{x}(x^3+C)$$

解法二（公式法）$P(x)=\frac{1}{x}$，$Q(x)=3x$

代入公式(4)中，得

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(C+\int 3xe^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right)=e^{-\ln x}\left(C+\int 3xe^{\ln x}dx\right)$$

$$=\frac{1}{x}(C+x^3)$$

例 9 求解初值问题

$$\begin{cases} y'-y=e^{2x} \\ y\Big|_{x=0}=0 \end{cases}$$

解 这是一个一阶线性非齐次微分方程，其中 $P(x)=-1$，$Q(x)=e^{2x}$ 代入公式(4)，得方程的通解为

$$y=e^{-\int -dx}\left(C+\int e^{2x}e^{-\int dx}dx\right)=e^{x}\left(C+\int e^{x}dx\right)$$

$$Ce^{x}+e^{2x}$$

将 $y\Big|_{x=0}=0$ 代入，求得 $C=-1$

故此初值问题的解为 $y=e^{2x}-e^{x}$

例 10 求微分方程 $(2x-y^2)dy-ydx=0$ 的通解.

解 此方程可化为：$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x-y^2}=0$，它不是关于未知函数 y 的一阶线性微分方程.

如果将 x 看作是 y 的函数，则方程可化为

$$2x-y^2-y\frac{dx}{dy}=0$$

整理，得 $\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=-y$

这是一个一阶线性非齐次微分方程，其中 $P(y)=-\frac{2}{y}$，$Q(y)=-y$

由通解公式 $x=e^{-\int P(y)dy}\left(C+\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy\right)$ 可得

$$x=e^{-\int -\frac{2}{y}dy}\left(C+\int -ye^{\int -\frac{2}{y}dy}dy\right)=y^2\left(C-\int y\frac{1}{y^2}dy\right)$$
$$=y^2(C-\ln y)$$

四、一阶微分方程应用举例

在自然现象和工程技术中，对许多问题的研究都要归结为求解微分方程，微分方程将数学理论与实际联系到了一起.

应用微分方程解决实际问题的一般步骤为：

1)建立微分方程：根据实际问题，找出未知函数与其导数或微分之间的关系式，建立微分方程，确定初始条件.

2)求微分方程的通解：判断微分方程的类型，求出微分方程的通解.

3)确定特解：由初始条件确定所求的特解.

建立微分方程是微分方程应用中的重点，我们要根据导数的几何意义与物理意义，把实际问题中所涉及到的曲线的切线的斜率、变速直线运动中物体的速度或加速度等用相应函数的导数表示出来，再应用几何或物理中的有关知识建立微分方程.

例 11　已知一平面曲线过点(0,0)，且在其上任一点 $M(x,y)$ 处的切线斜率等于该点的横、纵坐标之和，求此曲线方程.

解　设曲线方程为 $y=f(x)$. 由导数的几何意义知：

$y'=x+y$，即 $y'-y=x$

这是一阶线性非齐次微分方程，其中 $P(x)=-1$，$Q(x)=x$

由通解公式得

$$y=e^{-\int -dx}\left(C+\int xe^{\int -dx}dx\right)$$
$$=e^x(C-xe^{-x}-e^{-x})=Ce^x-x-1$$

又因曲线过点(0,0)，将 $x=0$，$y=0$ 代入通解中，得 $C=1$

从而所求曲线方程为 $y=e^x-x-1$.

例 12　设曲线过点(1,1)，且其上任意点处的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标，求此曲线方程.

解　设曲线方程为 $y=f(x)$，$P(x,y)$ 为其上任意一点.

则过 P 点的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$

令 $X=0$，得 $Y=y-xy'$ 为切线在 y 轴上的截距. 由所给条件得微分方程

$y-xy'=x$　即 $y'-\frac{1}{x}y=-1$

这是一阶线性非齐次微分方程，其中 $P(x)=-\frac{1}{x}$，$Q(x)=-1$.

由公式得通解

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-\int -\frac{1}{x}dx}\left(C+\int(-1)e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx\right) \\
&= x(C-\ln x)
\end{aligned}
$$

又因曲线过点(1,1),将 $x=1,y=1$ 代入通解,得 $C=1$.

所以曲线方程为 $y=x(1-\ln x)$.

例 13 设一艘轮船在水上做直线运动.当其推进器停止时船的速度为 v_0.已知船在水上运动时,所受水的阻力与船速的平方成正比(比例系数为 mk,m 为船的质量).问经过多少时间船速减为原速的一半.

解 设 $t=0$ 时,推进器停止,此时船的速度 $v\Big|_{t=0}=v_0$.船所受的外力为阻力 f.

$$f=mkv^2$$

由牛顿第二运动定律 $F=ma$,可知

$$-mkv^2=ma=m\frac{dv}{dt}$$

(由于阻力与速度方向相反,取负号)

整理得初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{dv}{dt}=-kv^2 \\
v\Big|_{t=0}=v_0
\end{cases}
$$

这是一个可分离变量的方程,通过分离变量、两边积分,得通解为

$$v=\frac{1}{kt+C}$$

将初始条件 $v\Big|_{t=0}=v_0$ 代入,得 $C=\dfrac{1}{v_0}$.

因此初值问题的解为 $v=\dfrac{v_0}{1+kv_0t}$

当 $v=\dfrac{v_0}{2}$ 时,代入上式,可求得 $t=\dfrac{1}{kv_0}$.

所以当时间经过 $\dfrac{1}{kv_0}$ 时,船速减为原速的一半.

由例 13 可以看到,在运动问题中,我们一般是由牛顿第二运动定律 $F=ma$ 出发来建立微分方程,其中 F 是物体所受的外力,加速度 $a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2s}{dt^2}$.

例 14 已知物体在空气中冷却的速率与该物体及空气两者的温度差成正比.设有一瓶热水.水温原来是 100 ℃,空气的温度是 20 ℃,经过 20 小时后,瓶内水温降到 60 ℃,求瓶内水温的变化规律.

解 设瓶内水温 y 与时间 t 之间的函数关系为 $y=y(t)$,则水的冷却速率为 $\dfrac{dy}{dt}$.在水的冷却过程中,空气的温度不变.

依题意,有

$$\frac{dy}{dt}=-k(y-20)$$

其中 k 是比例系数($k>0$). 由于 $y=y(t)$ 是单调减少的，即 $\frac{dy}{dt}<0$

所以上式右端前加负号，由此此初值问题为

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=-k(y-20)\\ y\Big|_{t=0}=100\end{cases}$$

这是一个可分离变量的微分方程.

分离变量，得　$\frac{dy}{y-20}=-kdt$

两边积分，得　$\ln(y-20)=-kt+\ln C$

整理，得　$y-20=Ce^{-kt}$

将初始条件 $y\Big|_{t=0}=100$ 代入上式，得 $C=80$

于是此初值问题的解为 $y=80e^{-kt}+20$

其中比例系数 k 可由题目中的另一条件 $y\Big|_{t=20}=60$ 来确定，即

$$60=80e^{-kt}+20$$

解得　$k=-\frac{1}{20}\ln 0.5\approx 0.0347$

因此水温与时间的函数关系为 $y=80e^{-0.0347t}+20$