中学数学疑难题解九大法

王恩基　杨成华 编著

广西民族出版社

中学数学疑难题解九大法

王恩基　杨成华　编著

广西民族出版社

中学数学疑难题解九大法

王恩基 杨成华 编著

☆

广西民族出版社出版

广西新华书店经销

广西中医骨伤科函授学院印刷厂印刷

●

开本787×1092 1/32 7.5印张 160千字

1989年11月第1版 1989年11月第1次印刷

印数：1—5,000册

ISBN7-5363-0679-2/G·279 定价：3.00元

前　言

本书根据现行教学大纲、教材和近十多年高考题频繁出现的热点题（数学方法）并与我们积卅年教学经验融铸而成。

本书对高考常见的数学方法：分析法、综合法、比较法、放缩法、配方法、待定系数法、反证法、数学归纳法、递推数列、充要条件及标准化题的解题方法，从编入本书的一道道高考题再现，读起来引人入胜，兴趣倍增，又从书中足够的类题中扩大眼界，回味无穷。

本书编法与一般复习资料不同：教材中不尽善之处都有补充，使读者得到满足；教材中的难点，本书着墨点明突破；教材已有的理论，本书不再重述，珍惜每位读者的宝贵时光；教材中分散的知识点捏成一线，举一反三，易于领会，加深理解；既注重双基训练和知识复盖面又注意高考水准之要求，无疑是编法的革新追求。

愿本书是高中师生的良师益友。在编写过程中，由于时间仓促，缺点和错误在所难免，恳望读者给予批评指正。

编　者

1989年11月

目　　录

第一章　比较法

在求证不等式成立时，比较法是最基本的，也是常用的方法。可分为下面两种方法进行：

1、若$x-y\geqq 0$，则$x\geqslant y$，一般叫作差比较法.

2、若$x>0,y>0$，且$\frac{x}{y}\geqslant 1$，则$x\geqslant y$，一般叫作商比较法.

1、作差比较法

例1．若$x>0,y>0$,则$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$（当且仅当$x=y$时，取等号）.

证明：作差比较

$$\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2},$$

当$x\neq y$时，$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2>0$,

$$\therefore \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}>0.$$

当$x=y$时，$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=0$.

$$\therefore \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}=0,$$

故$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$成立.

例2．求证$ab+bc+ca\leqslant a^2+b^2+c^2$

证明：$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2-2ab+b^2+c^2-2bc+c^2+a^2-2ca)$

$=\dfrac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

又$(a-b)^2\geqslant0,(b-c)^2\geqslant0,(c-a)^2\geqslant0$。

$\therefore\dfrac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant0$。

即$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\geqslant0$，

故原不等式成立，显然，当$a=b=c$时，不等式取等号。

例3．已知$x\neq y$，求证：$x^4+y^4>x^3y+xy^3$。

证明：$x^4+y^4-x^3y-xy^3$

$$=x^3(x-y)-y^3(x-y)$$

$$=(x-y)(x^3-y^3)$$

$$=(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$$，

$\therefore x\neq y$，即$(x-y)^2>0$。

又 $\because x^2+xy+y^2=(x+\dfrac{y}{2})^2+\dfrac{3}{4}y^2$。

如果$y\neq0$，那么$x^2+xy+y^2>0$，

如果$y=0$，那么$x\neq0$　$\therefore x^2+xy+y^2=x^2>0$。

$\therefore(x-y)^2(x^2+xy+y^2)>0$，

即$x^4+y^4>x^3y+xy^3$。

注意：对次数较高的不等式，常用比较法证之。

2、作商比较法

例4．若$a>b>0$，则$a^n>b^n$（n是大于1的整数）．

证明：

$\frac{a^n}{b^n}=(\frac{a}{b})^n$,

又∵$a>b>0$，则$\frac{a}{b}>1$.

∴$(\frac{a}{b})^n>1$,

即$\frac{a_n}{b^n}>1$，所以$a^n>b^a$.

例5．若$a>b>0$，求证：$a^ab^b>a^b\cdot b^a$.

证明：$\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}b^{b-a}=(\frac{a}{b})^{a-b}$,

又∵$a>b>0$，∴$\frac{a}{b}>1$，且$a-b>0$,

∴$(\frac{a}{b})^{a-b}>1$,

即$\frac{a^ab^b}{a^bb^a}>1$，就是$a^ab^b>a^bb^a$.

练习一

1．已知$a>0$，$b>0$，$a\neq b$.

求证：$a^n+b^n>a^{n-1}b+ab^{n-1}$，其中$n$是大于1的整数.

2、设$0<x<1$，$a>0$，$a\neq 1$，比较$|log_a(1-x)|$与$|log_a(1+x)|$的大小，（要写过程）

（1982年高考理科第五题）.

3．设$a>0$，$a\neq 1$，$t>0$，比较$\frac{1}{2}log_a t$与$log\frac{t+1}{2}$的大小，并证明你的结论.

《1988年高考理科第五题）

第二章　分析法和综合法

1．综合法：

综合法是从命题的条件出发，经过逐步的逻辑推理，最后达到待证的结论，这种证明方法叫做综合法。这种证明方法是“由因导果”的方法，是常用的方法，其优点简明扼要。

例 1．设a、b为互不相等的正数，且$a+b=1$，则

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>4$．

已知：$a>0$，$b>0$，且$a\neq b$，$a+b=1$．

求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>4$．

证明：用综合法。

$\because a\neq b$，　$\therefore a-b\neq 0$，

则$(a-b)^2>0$。

即$a^2-2ab+b^2>0$，

$\therefore a^2+b^2>2ab$。

$\because a>0$，$b>0$，

$\therefore \frac{a^2+b^2}{ab}>2$，或$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$，

$\because a+b=1$，　　$\therefore \frac{1-b}{b}+\frac{1-a}{a}>2$．

即$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>4$．

此例说明，综合法的特点是：从"已知"看"可知"，逐步推向"结论"。其逐步推理，实际上是要寻找它的必要条件。

2．分析法

分析法是从待证的结论出发，一步一步地探索下去，最后达到命题的已知条件。从证题过程看，其思路与综合法相反，是"由果索因"，逐步倒推，最后到达已知，它是一种逆推证法。

例2．用分析法证明例1，可这样叙述：

要证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>4$成立，

只需证$\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}>4$成立，

（$\because a+b=1$）

即需证$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$成立。

只需证$a^2+b^2>2ab$成立，

（$\because a>0, b>0$）

又需证$a^2+b^2-2ab>0$成立，

即需证$(a-b)^2>0$成立，

因为由已知$a\neq b$，$\therefore (a-b)^2>0$显然成立。由此命题得证。

此例说明，分析法的特点："从结论看需知，逐步推向已知"，其逐步过程，实际上是需寻找它的充分条件。

3．如何正确使用综合法、分析法．

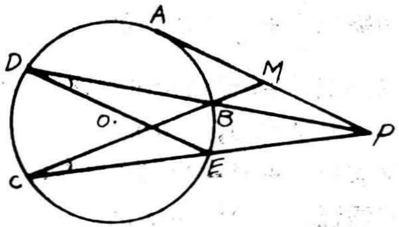
综合法、分析法各有优缺点，综合法由因导果，往往枝节横生，不易奏效，分析法执果索因，常常根底渐近，有希望成功，就表述过程而论，综合法形式简洁，条理清楚；分

析法叙述繁琐，文辞冗长，也就是说，分析法利于思考，综合法宜于表述。因此，在实际证题时，常把分析法和综合法结合起来使用，先用分析法为主辅之以综合法，寻求解题思路，再用综合法有条理地表述证明过程。

例3．自圆O外一点P作圆O的切线PA，切点为A，再由PA的中点M作圆O的割线，交圆O于B、C两点，PB、PC分别交圆O于D点和E点（如图　）求证：ED∥PA。

分析（思考方法）先从已知条件出发（综合法）、已知MA是圆O的切线，由圆幂定理可知$MA^2=MB\cdot MC$。又已知$MA=MP$，所以，$MP^2=MB\cdot MC$，到这一步，不能立即看出下边该怎么办。

又从待证的结论来想（分析法）要使ED∥PA，需证$\angle MPB=\angle BDE$。注意到同弧上的圆周角相等，只要证明$\angle MPB=\angle MCP$就可以了，而在$\triangle PMB$和$\triangle CMP$中，$\angle PMB=\angle CMP$，所以只要证明$\triangle PMB\backsim\triangle CMP$就可以了。



为此，需证明夹$\angle PMB$、$\angle CMP$的两边对应成比例$\frac{MB}{MP}=\frac{MP}{MC}$、即需证$MP^2=MB\cdot MC$。这和上面已知条件出发得到的关系一致，这样，证明的途径就找到了。

证明：∵MA是圆O的切线．

$\therefore MA^2=MB\cdot MC$．

而$MA=MP$。

$\therefore MP^2=MB\cdot MC$。

即$\frac{MB}{MP}=\frac{MP}{MC}$.

又$\angle PMB=\angle CMP$,

$\therefore \triangle PMB\backsim\triangle CMP$.

$\therefore \angle MPB=\angle MCP$.

$\because \angle MCP$与$\angle BDE$是同一弧上的圆角,

$\therefore \angle MCP=\angle BDE$

$\therefore \angle MPB=\angle BDE$

$\therefore ED\parallel PA$

注：本例以综合法入手，结合动用分析法，把“可知”和“需知”联系起来，找到了证明的方法。对于比较复杂的命题，一般可以分析法为主，辅以综合法，交替运用这两种基本方法，寻求证题线索。

例4．在$\triangle ABC$中，设a、b、c分别是角A、B、C的对边长，若a、b、c成等差数列，求证：$ctg\frac{A}{2}\cdot ctg\frac{C}{2}=3$.

分析：先从求证结论出发，看需知，要证$ctg\frac{A}{2}\cdot ctg\frac{C}{2}=3$，即证$cos\frac{A}{2}\cdot cos\frac{C}{2}=3\cdot sin\frac{A}{2}\cdot sin\frac{C}{2}$，只须证$cos\frac{A-C}{2}=2cos\frac{A+C}{2}$，到此，该证什么暂不易找到，怎么办？

又从已知出发看“可知”，由a、b、c成等差，根据正

弦定理可知$sinA+sinC=2sinB$， 因$sinB=sin(A+C)$，将等式两边变形得

$2sin\frac{B+C}{2}\cdot cos\frac{A-C}{2}=4sin\frac{A+C}{2}\cdot cos\frac{A+C}{2}$. 两边同除以$2sin\frac{A+C}{2}$，与上面结果一致，这样，证题途径找到了.

证明：∵a、b、c为等差数列，利用正弦定理有

$$sinA+sinC=2sinB$$
$$=2sin[n-(A+C)]$$
$$=2sin(A+C)$$

$$\therefore 2sin\frac{A+C}{2}\cdot cos\frac{A-C}{2}=4sin\frac{A+C}{2}\cdot cos\frac{A+C}{2}.$$

$$\because sin\frac{A+C}{2}\neq 0.$$

$$\therefore cos\frac{A-C}{2}=2cos\frac{A+C}{2},$$

即$cos\frac{A}{2}\cdot cos\frac{C}{2}+sin\frac{A}{2}\cdot sin\frac{C}{2}$

$$=2(cos\frac{A}{2}\cdot cos\frac{C}{2}-sin\frac{A}{2}\cdot sin\frac{C}{2}),$$

即 $cos\frac{A}{2}\cdot cos\frac{C}{2}=3sin\frac{A}{2}\cdot sin\frac{C}{2}$.

又 $sin\frac{A}{2}\neq 0$， $sin\frac{C}{2}\neq 0$，

$$\therefore ctg\frac{A}{2}\cdot ctg\frac{C}{2}=3.$$

注意： 利用正弦定理将边的关系$a+c=2b$转化为三角函

数间的关系$\sin A+\sin C=2\sin B$，这样才可通过三角函数式的变换，将已知条件推向结论。

例5．已知α、β为锐角，且

$$\begin{cases}3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1,\\3\sin2\alpha-2\sin2\beta=0.\end{cases}$$

求证：$\alpha+2\beta=\dfrac{\pi}{2}$．（1978年高考题）．

分析：假设$\alpha+2\beta=\dfrac{\pi}{2}$成立，那么，有

$\sin(\alpha+2\beta)=1$　或者$\cos(\alpha+2\beta)=0$成 立，

即$\sin\alpha\cdot\cos2\beta+\cos\alpha\cdot\sin2\beta=1$

或者$\cos\alpha\cdot\cos2\beta-\sin\alpha\cdot\sin2\beta=0$，到此，再证 什么暂不易发现了。

又从已知条件出发能推出上面两个式子中的一个。

由已知$3\sin^2\alpha=1-2\sin^2\beta=\cos2\beta$　①

$3\sin2\alpha=2\sin2\beta$

$6\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\sin2\beta$　②

①÷②，得　$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos2\beta}{\sin2\beta}$，

$\therefore\sin\alpha\cdot\sin2\beta=\cos\alpha\cdot\cos2\beta$．

$\cos\alpha\cdot\cos2\beta-\sin\alpha\cdot\sin2\beta=0$从而我们找到了证明的途径

证明：$\because 3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$，

$\therefore 3\sin^2\alpha=1-\sin^2\beta=\cos2\beta$　①

又$\because 3\sin2\alpha-2\sin2\beta=0$．

$\therefore 6\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\sin2\beta$．

$3\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin2\beta$．　②

$\because \alpha$、β为锐角，

$\therefore sin\alpha \cdot cos\alpha$和$sin2\beta$的值都不等于零。

$\therefore$①÷②，得

$$\frac{sin\alpha}{cos\alpha}=\frac{cos2\beta}{sin2\beta}.$$

$\therefore cos\alpha \cdot cos2\beta = sin\alpha \cdot sin2\beta$.

$cos\alpha \cdot cos2\beta - sin\alpha \cdot sin2\beta = 0$,

$cos(\alpha + 2\beta) = 0$.

$\because \alpha < 90^\circ$，$\beta < 90^\circ$，　$\therefore 2\beta < 180^\circ$.

$\therefore \alpha + 2\beta < 90^\circ + 180^\circ = 270^\circ$,

故$\alpha + 2\beta = 90^\circ$.

4.综合法、分析法在不等式的应用

当证不等式时用比较法和综合法较难时，可以考虑应用分析法。

例6。已知$|a|<1$，$|b|<1$，

求证：$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$.

证明：欲证$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$.　①

即证　$|a+b|<|1+ab|$,　②

可证　$(a+b)^2<(1+ab)^2$,　③

就是　$a^2+2ab+b^2<1+2ab+a^2b^2$,　④

即　$a^2+b^2<1+a^2b^2$,　⑤

但　$2ab\leqslant a^2+b^2$,　⑥

$\therefore$　$2ab<1+a^2b^2$.　⑦

即　$0<(1-ab)^2$.　⑧