高职高专公共基础课“十一五”规划教材

概率论与数理统计初步

郭明普　罗萍　主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高职高专公共基础课“十一五”规划教材

概率论与数理统计初步

主编　郭明普　罗　萍

参编　郭洪林　易存晓

主审　付木亮

机　械　工　业　出　版　社

本套教材是根据教育部制定的“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”，并按照高职高专院校的培养目标而编写的.

本套教材共分三册，即《高等数学(上)》、《高等数学(下)》、《概率论与数理统计初步》. 本书为《概率论与数理统计初步》，内容包括：概率论、数理统计初步及 MATLAB 在概率论与数理统计中的简单应用.

本书可作为高等职业院校、高等专科院校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校的数学类教材，也可作为一般工程技术人员的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计初步/郭明普，罗萍主编. —北京：机械工业出版社，2009. 2

高职高专公共基础课“十一五”规划教材

ISBN 978-7-111-25738-7

Ⅰ. 概… Ⅱ. ①郭…②罗… Ⅲ. ①概率论—高等学校：技术学校—教材②数理统计—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 194018 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
责任编辑：李大国 责任校对：纪 敬
封面设计：王伟光 责任印制：洪汉军
北京铭成印刷有限公司印刷
2009 年 2 月第 1 版第 1 次印刷
130mm × 184mm · 4. 375 印张 · 97 千字
0001—4000 册
标准书号：ISBN 978-7-111-25738-7
定价：10. 00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：(010)68326294
购书热线电话：(010)88379639 88379641 88379643
编辑热线电话：(010)88379541

前　　言

概率论与数理统计是从数量方面研究偶然现象规律性的学科．它是数学的一个有特色的分支，一方面它具有独特的概念和方法，内容丰富，结果深刻；另一方面它与其他数学分支联系密切，在自然科学、社会科学及工程技术中有着广泛的应用．数理统计是以概率论为基础，研究数据资料的收集、整理、分析与推断的科学．它着眼于根据偶然现象本身的规律性进行分析与推断，有效地利用资料信息，尽可能作出精确而可靠的结论．

本书在编写过程中，注意把数学基础理论、工程实际应用、数学软件三大模块有机结合；注重理论联系实际，由浅入深，由易到难；遵循具体——抽象——应用的原则，加强学生在素质和能力方面的培养．对数学概念和基本定理，着重阐明它们的几何意义、物理背景、经济解释以及实际应用价值等，并注意培养学生利用计算工具和数表、图表等解决工程实际问题的能力，引导学生学会探索、发现和归纳的方法，逐步培养学生的创新意识和应用数学解决实际问题的能力．书中附有丰富的例题、习题，应用实例涉及面广．

本书由河南工业职业技术学院的郭明普、罗萍主编，付木亮主审．其中第一、二章由郭洪林编写、第三章由易存晓编写．

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请同仁和读者批评指正．

编　者

目　录

第一章 概 率 论

学习目标

（1）理解随机事件、事件的关系及运算、概率的古典定义等概率的相关概念；

（2）熟练掌握概率的加法公式、条件概率公式、乘法公式、全概率公式、伯努利概型等概率计算公式和方法；

（3）理解随机变量、分布列、分布密度、分布函数、正态分布等概念，熟练掌握分布列、分布密度、分布函数及正态分布的相关计算方法；

（4）理解随机变量的数字特征的有关概念，熟练掌握期望和方差的计算方法；

（5）培养把概率知识应用于实际生活的意识与能力.

概率论是研究现实世界中随机现象统计规律性的一门学科，是近代数学的重要组成部分. 它不仅是数理统计的基础，而且在自然科学、工程技术和经济管理中有着广泛应用. 本章将介绍随机事件及其概率，随机变量及其概率分布，随机变量的数字特征等有关概率论的一些初步知识及其在实际中的一些应用.

第一节 随机事件

一、随机试验和随机事件

在自然界和科学实验中出现的现象，可以分为两大类：一

类是确定性现象，另一类是随机现象. **确定性现象**是指在一定条件下必然发生或必然不发生的现象. 例如下面给出的都是确定性现象：

（1）在标准大气压下，温度达到100℃时，纯水沸腾；

（2）异性电荷相互吸引；

（3）从装有 10 个黄色乒乓球的盒子里任意摸出一个是黄球.

随机现象是指在一定条件下可能发生也可能不发生的现象. 例如，下面给出的都是随机现象：

（1）投掷一枚质地均匀的骰子，出现点数为 1；

（2）某种股票明天上涨；

（3）某款手机在一天内的销售量；

（4）某射手向一目标射击，击中的环数.

人们经过长期实践并深入研究之后发现，就一次观察而言，随机现象具有偶然性，但在大量重复试验下，它的结果呈现出某种规律性. 例如，多次重复抛掷一枚质地均匀的硬币，正面和反面出现的次数大致相同，几乎各占抛掷次数的一半. 这种在大量重复过程中出现的规律性，称为**统计规律性**. 研究随机现象离不开试验或观察，这里的“试验”是一个含义广泛的概念，它包括各种各样的科学试验，甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验. 例如：

（1）投掷一枚质地均匀的硬币，观察它正面向上的次数；

（2）投掷一枚质地均匀的骰子，观察它出现的点数；

（3）一射手进行射击，直到击中目标为止，记录他的射击次数；

（4）对一批灯泡，测试每一只的寿命.

上面 4 个试验，具有以下共同特性：

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次实验的可能结果不止一个，但事前知道实验的所有结果；

(3) 每次实验之前不能确定哪一个结果一定会出现.

我们把具有上述三个特性的试验称为随机试验. 今后，我们所说的试验均指随机试验.

把随机试验的任何一个可能发生的结果，称为**随机事件**(简称**事件**)，通常用大写字母 A、B、C 等表示.

例 1　对 10 环靶射击一次，则 $A=\{$击中 5 环$\}$是随机事件，$B=\{$击中环数在 5 ~ 10 环之间$\}$也是一个随机事件.

例 2　箱内装有 10 件同型号的产品，其中 7 件是正品，3 件是次品，从中任取两件，则 $A=\{$恰有一件次品$\}$，$B=\{$两件全是次品$\}$，$C=\{$两件全是正品$\}$都是随机事件.

把随机事件中最简单的不可再分的事件称为**基本事件**(样本点)，记为 ω. 全体基本事件的集合称为这个试验的**样本空间**，记为 Ω.

例如，试验(1)中的基本结果有两个：正面和背面，即有两个基本事件，这个试验的样本空间为 $\Omega_1=\{$正面，背面$\}$.

试验(2)中的基本结果有六个："1 点"，"2 点"，"3 点"，"4 点"，"5 点"，"6 点"，分别用 1，2，3，4，5，6 来表示，这个事件的样本空间为 $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$.

同样，试验(3)、(4)的样本空间可表示为：$\Omega_3=\{1,2,3,4,\cdots\}$ 和 $\Omega_4=\{t \mid t\geqslant 0\}$.

显然，随机事件或为基本事件，或由基本事件所组成，因此随机事件是样本空间 Ω 的子集.

例 3　若在 $1,2,3,\cdots,9$ 九个数字中任取一个，则事件 A_i 表示取得大小为 $i(i=1,2,\cdots,9)$ 的数；事件 B 表示取得一个

偶数；事件 C 表示取得一个奇数，都是试验的可能结果.

例 3 中事件 $A_i(i=1,2,\cdots,9)$ 是基本事件. 事件 B 由事件 A_2，A_4，A_6，A_8 组合而成，事件 C 由事件 A_1，A_3，A_5，A_7，A_9 组合而成，这两个事件称为复合事件. 一般的，由若干个基本事件组合而成的事件称为**复合事件**.

随机试验中，必然会发生的事件称为**必然事件**. 样本空间 Ω 也是一个随机事件，由于每次试验总是 Ω 中的一个基本事件发生，即 Ω 必然发生，所以 Ω 为必然事件(通常也用 Ω 表示必然事件). 肯定不会发生的事件称为**不可能事件**，记为 $\varnothing$.

例如，投掷一枚质地均匀的骰子，“点数不大于 6”是必然事件，“点数大于 6”是不可能事件. 显然，必然事件与不可能事件所反映的现象是确定性现象，并不具有随机性，但确定性现象可以作为随机现象的特例来研究.

二、事件的关系与运算

在随机试验中有许多事件发生，而这些事件之间往往又有联系. 研究事件之间的各种关系与运算，可以帮助我们更深刻地认识随机事件.

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称**事件 A 包含于事件 B**，或称**事件 B 包含事件 A**，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 即 A 中的每一个基本事件都属于 B，如图 1-1 所示.

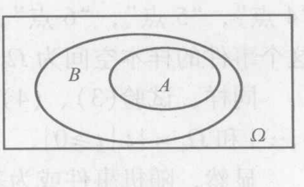

图 1-1

例如，投掷一枚骰子，设 $A=\{$出现 4 点$\}$，$B=\{$出现偶数点$\}$，则有 $A\subset B$.

由事件包含关系的定义，对任何事件 A，都有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称**事件 A 和事件 B 相等**，记为 $A=B$

事件相等说明事件所包含的基本事件是相同的.

2. 事件的和(或并)

事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件，称为**事件 A 与事件 B 的和(或并)事件**，记为 $A\cup B$(或 $A+B$)(图 1-2 中的阴影部分). 因此，事件的和可以描述为：当且仅当事件 A，B 中至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生. 即 $A\cup B=\{A,B$ 至少有一个发生$\}$.

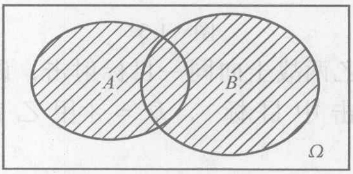

图 1-2

例如,投掷一枚骰子,设 $A=\{$出现奇数点$\}$，$B=\{$出现点数不超过 4$\}$，则 $A\cup B=\{$出现点数不超过 5$\}$.

由和事件的定义和图 1-2 不难看出：

(1) $A\subset(A\cup B)$，$B\subset(A\cup B)$；

(2) 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$；

(3) $A\cup\Omega=\Omega$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup A=A$.

若事件 C 表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生，则

$$C=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i.$$

3. 事件的交(或积)

事件 A 与事件 B 同时发生的事件，称为**事件 A 与事件 B**

的交(或积)，记为$A\cap B$(或AB)(图1-3中的阴影部分). 因此，事件的交可以描述为：当且仅当事件A，B同时发生时，事件$A\cap B$发生. 即

$$A\cap B=\{A\text{ 发生且 }B\text{ 发生}\}.$$

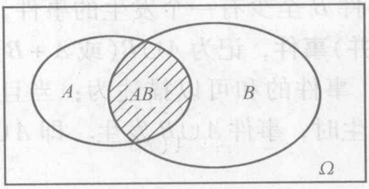

图　1-3

例如，甲、乙两战士向同一目标射击，设$A=\{$甲击中目标$\}$，$B=\{$乙击中目标$\}$，$D=\{$甲乙都击中目标$\}$，则$D=A\cap B$.

再如，投掷一枚骰子，设$A=\{$出现奇数点$\}$，$B=\{$出现点数不超过4$\}$，则$A\cap B=\{$出现点数1或3$\}$.

不难得出：

(1) $(A\cap B)\subset A$，$(A\cap B)\subset B$；

(2) 若$A\subset B$，则$A\cap B=A$；

(3) $A\cap\Omega=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap A=A$.

若事件C表示n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的积事件，则

$$C=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i.$$

4. 差事件

事件A发生而事件B不发生的事件，称为**事件A与事件B的差事件**，记为$A-B$(图1-4中的阴影部分).

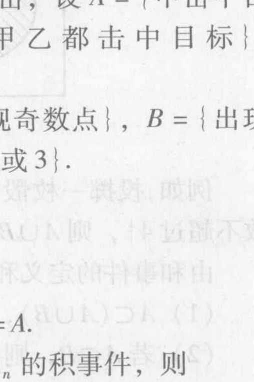

图　1-4

例如，投掷一枚骰子，设$A=\{$出

现奇数点}，$B=\{$出现点数不超过4$\}$，则 $A-B=\{$出现点数5$\}$.

5. 互不相容(互斥)事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即$AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容事件**(或称**互斥事件**)，如图 1-5 所示，图中的事件 A 与事件 B 是互不相容的.

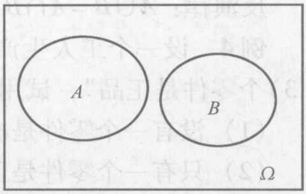

图 1-5

例如，掷一枚硬币，设 $A=\{$正面向上$\}$，$B=\{$反面向上$\}$，显然在一次试验中，A 与 B 不能同时发生，即事件 A 与事件 B 为互不相容事件.

任何两个基本事件都是互不相容事件.

6. 互逆(对立)事件

若两事件 A、B 满足 $A\cup B=\Omega$，且 $AB=\varnothing$，则称**事件 A 与事件 B 为互逆事件**(**或对立事件**)，记为$\overline{A}=B$ 或$\overline{B}=A$. 如图 1-6 所示，图中的阴影部分表示事件 A 的逆事件.

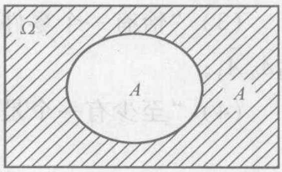

图 1-6

例如，在投掷硬币的试验中，设 $A=\{$正面向上$\}$，则$\overline{A}=\{$正面向下$\}$.

根据互逆事件的定义，可以得到：

$A\cap\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=\Omega$，$\overline{\overline{A}}=A$，$A-B=A\overline{B}$.

对于事件的运算，满足下列运算定律：

交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$；

分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

反演律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 4 设一个工人生产了三个零件，记 A_i = “第 $i(i=1,2,3)$ 个零件是正品”，试用 $A_i(i=1,2,3)$ 表示下列事件：

（1）没有一个零件是次品；

（2）只有一个零件是正品；

（3）恰有一个零件是次品；

（4）至少有一个零件是次品.

解 （1）“没有一个零件是次品”，即“全是正品”，可表示为：$A_1A_2A_3$；

（2）“只有一个零件是正品” 表示为：$A_1\,\overline{A_2A_3}\cup\overline{A_1}A_2\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$；

（3）“恰有一个零件是次品” 表示为：$\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1\,\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\,\overline{A_3}$；

（4）“至少有一个是次品” 表示为：$\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$或$\overline{A_1A_2A_3}$.

习题 1-1

1. 指出下列各事件之间的关系.

（1）10 件产品全是合格品与 10 件产品中只有 1 件废品；

（2）10 件产品全是合格品与 10 件产品中至少有 1 件废品.

2. 写出下列试验的样本空间.

（1）从 A，B，C，D 四位学生中，推选代表参加数学竞赛：

1）推选其中三位，参加学校组织的竞赛；

2）推选其中两位，一位参加省级竞赛，另一位参加全国竞赛.

（2）从盛有三个红球、两个白球的口袋中任取两球.

(3) 实测某种型号灯泡的寿命.

3. 设 A, B, C, D 表示四个事件，试用它们表示下列事件：

(1) 四个事件都不发生；　(2) 四个事件恰有一个发生；

(3) 四个事件中至少有一个发生；　(4) 四个事件中至多有一个发生.

第二节　随机事件的概率

一、概率的统计性定义

概率论研究的是随机现象的统计规律性. 在随机试验中，不仅要关心可能出现哪些随机事件，更关心的是随机事件发生的可能性大小，因为这对人们进行预测判断更有价值. 虽然随机事件的发生具有偶然性，但随机事件发生的可能性大小是客观存在的. 从数学角度，希望能找到一个数，来刻画随机事件发生可能性大小这一客观事实，这个数称为随机事件发生的**概率**.

在随机试验中，虽然随机事件的发生具有偶然性，但在大量重复试验中，可以发现它们的发生具有某种规律性. 有的事件发生的可能性大些，有的事件发生的可能性小些. 为研究事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大，下面引入事件发生的频率的概念.

在一定条件下，设事件 A 在 n 次重复试验中发生 $k(0\leqslant k\leqslant n)$ 次，比值 $\frac{k}{n}$ 称为事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**.

历史上著名的统计学家蒲丰(Buffon)、皮尔逊(Pearson)和数学家维尼(Wein)曾进行过大量掷硬币的试验，所得结果列表如下：

试 验 者	掷 币 次 数	出现正面的次数	出现正面的频率
蒲丰	4040	2048	0. 5069
皮尔逊	24000	12012	0. 5005
维尼	30000	14994	0. 4998

从上表可以看出，虽然抛掷硬币的次数不同，正面向上的频率数也有变化，但在多次的重复投掷中，这一事件的频率(比值)却稳定在常数0. 5 附近，这个数值与人们的分析推测结果吻合，并且随试验次数的增加，这种一致性越来越好. 该例子所反映的现象具有一般性——频率稳定性. 频率稳定在某一常数附近的现象称为**频率的稳定性**. 它表明频率稳定于某一固定值是事件本身客观存在的一种固有的属性. 因此，可用这个常数对事件发生的可能性大小进行度量.

定义 1(概率的统计定义) 在相同条件下的大量重复试验中，事件 A 发生的频率总是稳定在一个确定的常数 p 附近，这个常数 p 称为事件 A 发生的**概率**，记为 $P(A)$，即

$$P(A)=p.$$

事件发生的频率和概率是两个不同的概念，既有区别又有紧密的联系. 事件的频率是试验后的统计结果，具有现实性、随机性和实证性；而事件的概率是事件未发生时的估计和预测，具有主观性、期望性和理论性，但它们又具有不可违背的一致性和趋同性.

一般来说，在试验次数相当大时，事件 A 发生的频率逐渐地逼近于事件 A 的概率，即

$$P(A)\approx\frac{k}{n}.$$

例 1 为实验炮弹在正常条件下的合格率，对 100000 发

炮弹中的100发炮弹进行发射试验，结果有90发炮弹正常，合格的频率为$\frac{90}{100}=0.9$，因此，可以认为该批炮弹的合格率基本在0.9左右，即任意从中抽取一发炮弹，能正常发射的可能性为0.9.

由概率的定义，不难验证事件的概率具有下列性质：

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) $P(\Omega)=1$;

(3) $P(\varnothing)=0$;

(4) 若$A\subset B$，则$P(A)\leqslant P(B)$;

(5) $P(A)=1-P(\bar{A})$.

二、概率的古典定义

按概率的统计性定义求概率，即用频率来确定概率往往是很困难的，甚至是不现实的. 事实上，很多随机现象不需要进行试验或观察，根据所讨论事件的特点就可直接计算事件的概率，而且与事实完全一致，甚至比试验更加精确和可信. 例如，抛掷骰子的随机试验中，$A_i=\{$出现点数为$i\}$ $(i=1,2,3,4,5,6)$是随机试验的6个基本事件，由于骰子的对称性，出现各个基本事件的可能性相同，都为$\frac{1}{6}$，这个结果是可信的，没有人会怀疑的. 这种计算方法就叫做概率的古典概型方法.

一般地，具备下面两个特点的随机试验的数学模型称为**古典概型**：

(1) 有限性——样本空间的元素(基本事件)只有有限个，即$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\cdots,\omega_n\}$;

(2) 等可能性——每一个基本事件发生的可能性都相同，即