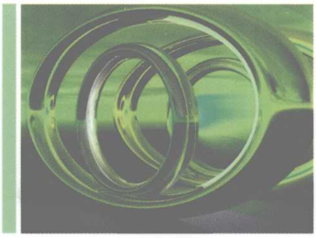
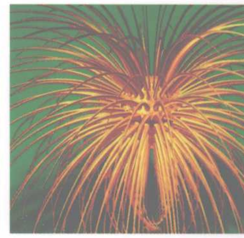
高等教育“十一五”规划教材





公共基础课教材系列

大学数学

DAXUE SHUXUE

李　刚／主编

科学出版社
www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材

公共基础课教材系列

大学数学

李　刚　主编
黄松奇　张新敬　副主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书体系结构严谨，教学内容优化；重视基础，突出方法，着眼思想，着力数学素质的培养.

本书涵盖微积分、线性代数和概率统计初步，共分10章，内容包括：预备知识、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程、向量代数与空间解析几何、二元函数微积分基础、无穷级数、线性代数初步、概率统计初步.

本书可作为高等院校的教材或参考书，也可供技术人员、自学者及进一步深造的读者参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学/李刚主编. —北京：科学出版社，2008
(高等教育"十一五"规划教材·公共基础课教材系列)
ISBN 978-7-03-022662-4

Ⅰ.大… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第116429号

责任编辑：沈力匀 王 超 周 恢/责任校对：赵 燕
责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年8月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2008年8月第一次印刷 印张：23 1/4
印数：1—4 000 字数：551 000

定价：38.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)
销售部电话 010-62136230 编辑部电话 010-62135235 (VP04)

前　言

本书是根据原国家教委颁发的“高等学校数学课程教学基本要求”和科技人才对数学素养的要求，本着面向21世纪深化课程体系和教学内容改革的目的，在吸收国内外相关教材长处的基础上组织编写的. 本书的突出特点是：

(1) 体系结构严谨，教学内容优化.

数学分析、几何、代数、概率是现代数学的基础，现代数学的发展趋势表现在它们之间的相互交叉、相互渗透. 因此，在本书的编写过程中，作者注重各分支的有机结合，连续与离散的有机结合，相关内容的内在联系与合理融合，同时对教学内容进行适当地引伸. 例如，将不定积分和定积分合为一元函数积分学，把相通的方法类比地给出，从而使本书符合学习的优化规律，条理清晰，避免重复；同时在线性代数中引入了线性规划的方法，以期拓宽学生的知识面，并体现了内容和方法的可拓展性，起到了抛砖引玉的效果.

(2) 重视基础，突出方法、思想，着力数学素质的培养.

本书对大学数学所需的基础知识叙述详尽，由浅入深. 在全书中突出思想、方法的必要性和灵活性，从实践出发培养学生的数学思维方法和应用素质. 例如，极限的概念是大部分学生学习和教师授课时较为头疼的内容，本书先以直观的方法给出极限概念的外在表现，然后从理论的角度给出分析定义，既强调了基础的重要性，也降低了理解难度，同时渗透了逼近的思想.

(3) 适当穿插阅读材料、应用实例，提高趣味性，升华意识和能力.

兴趣是最好的老师. 本书适当增加了名人名言、数学家简介等阅读材料，可以使学生在学习知识的同时，了解数学理论知识的来龙去脉；此外，在对每一部分的思想方法深入探讨后，增加了数学建模的实例，使数学理论可以应用于实践.

(4) 内容必需而够用，注重教学适用.

随着高等教育改革的发展，对学生知识面的拓展要求增高，相应地不得不压缩授课课时. 为适应这种要求，本书以必需为底，够用为限，尽可能使得结构严谨、论证简明、叙述清晰、例题典型、内容丰富，同时不加重教师授课和学生学习的负担，满足学生对必备知识的需求，注重教学的适用性.

全书以大学数学的培养要求为主要编写主线，涵盖了极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程、向量代数与空间解析几何、二元函数微积分基础、无穷级数、线性代数初步、概率统计初步等内容. 本书编写分工如下：各章的数学模型实例及阅读材料由黄海洋编写，其他内容编写者为李刚（第0章、第1章和第8章）、黄松奇（第2章）、张新敬（第3章）、王霞（第4章、第7章）、赵玲玲（第6章）、辛向军（第5章、第9章9.1～9.3）、邢培旭（第9章9.4～9.6），书中插图由黄海洋和李刚共同绘制，附录由邢培旭和李刚共同整理. 李刚制定了编写大纲和编写方案，张新敬和赵玲玲通阅了部分初稿，李刚和黄松奇通阅了终稿，最后由李刚统一定稿.

在本书的编写过程中，参考了国内外部分优秀教材和文献，在此对原作者表示衷心的感谢. 本书还得到了郑州轻工业学院等单位的大力支持和帮助，在此表示诚挚的谢意. *在本书历经 3 年的试用过程中，得到了试用本书初稿的老师和众多同行、专家的指点和帮助，在此一并表示感谢!*

限于作者水平有限，书中疏漏和不当之处在所难免，敬请专家、学者和广大使用者提出宝贵意见. 我们的电子邮箱是:leagong@zzuli.edu.cn.

目　　录

数学是这样一种东西：她提醒你有无形的灵魂，她赋予她所发现的真理以生命；她唤起心神，澄净智慧；她给我们的内心思想添辉；她涤尽我们有生以来的蒙昧与无知.

——普洛克拉斯

第0章　预备知识

0.1　集合与区间

0.1.1　集合的概念

把某些确定属性的对象汇集成一个整体，称之为**集合**，通常用大写字母 $A,B,\cdots$ 或带下标的大写字母 $A_1,B_1,\cdots$ 表示，集合中的各个对象称为集合的**元素**，通常用小写字母 a，$b,\cdots$ 或带下标的小写字母 $a_1,b_1,\cdots$ 表示. 如果 a 是 A 的一个元素，记作 $a\in A$，读作 a 属于 A，否则记作 $a\notin A$，读作 a 不属于 A.

自然数集 $\mathbf{N}$：全体自然数 $0,1,2,\cdots$ 构成的集合；

整数集 $\mathbf{Z}$：全体整数构成的集合，$\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集，$\mathbf{Z}^-$ 表示负整数集；

实数集 $\mathbf{R}$：全体实数构成的集合，$\mathbf{R}^+$ 表示正实数集，$\mathbf{R}^-$ 表示负实数集；

复数集 $\mathbf{C}$：全体复数构成的集合；

有理数集 $\mathbf{Q}$：全体有理数构成的集合，$\mathbf{Q}^+$ 表示正有理数集，$\mathbf{Q}^-$ 表示负有理数集.

集合可以用列举法（枚举法）表示，就是将集合中的元素全部列出，两边用“$\{\}$”表示其为一个整体，元素间用逗号隔开，如 $A=\{a,b,c,d\}$，$N=\{0,1,2,\cdots\}$. 在用列举法表示集合时，一般对元素之间的次序没有要求，对重复的元素通常看作同一个元素，在集合中用到省略号时，省略的部分必须满足一般的可认知性.

集合还可以用描述法表示. 该方法的一般形式是 $A=\{x\mid p(x)\}$，其中 x 表示 A 中的元素，$p(x)$ 表示 A 中的元素 x 满足的条件，即集合中所有元素具有的共性，如 $B=\{x|3\leqslant x\leqslant 5,x\in\mathbf{R}\}$ 表示了大于等于 3，且小于等于 5 的全体实数的集合. 一般在不致混淆的情况下，可以省去“$x\in\mathbf{R}$”，记作 $B=\{x|3\leqslant x\leqslant 5\}$.

我们把不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$；而把所研究问题的全体元素组成的集合称为全集，记作 E 或者 U；含有有限个元素的集合称为有限集；含有无限个元素的集合称为无限集.

0.1.2　集合的关系与基本运算

定义 0.1　如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 中的元素，则称 A 是 B 的一个子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作 A 包含于 B，或 B 包含 A.

定义 0.2　如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 和 B 相等，记作 $A=B$，否则记作 $A\neq B$.

定义 0.3 如果 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 一个真子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

在很多文献中，对真子集和子集不做特别区分，均记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，可以根据实际问题的意义来分辨其表示的是子集还是真子集，在本书中也采用这种记法.

可以证明，$\varnothing\subset A$（A 为任意集合），$\mathbf{R}\subset\mathbf{C},\mathbf{N}\subset\mathbf{Z},\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$ 等.

集合的基本运算主要有下列几种，设 A、B 为任意集合：

(1) A 与 B 的交集：$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$（符号"$\wedge$"表示"并且"）；

(2) A 与 B 的并集：$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$（符号"$\vee$"表示"或者"）；

(3) A 与 B 的差集：$A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$（符号"$\wedge$"表示"并且"）；

(4) A 的补集：$\overline{A}=E-A$（E 是集合 A 所在的研究问题的全集）.

集合的上述运算满足一些性质，这里只给出最基本的，其中 A、B、C 是任意集合.

(1) 交换律：$A\cap B=B\cap A,A\cup B=B\cup A$；

(2) 结合律：$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C,A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

(3) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(4) 同一律：$A\cap A=A,A\cup A=A,A\cap\varnothing=\varnothing,A\cup\varnothing=A$；

(5) 零一律：$\overline{A}\cap A=\varnothing,\overline{A}\cup A=E$（$E$ 是集合 A 所研究问题的全集）；

(6) 德默根律：$\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B},\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$；

(7) 差交转化律：$A-B=A\cap\overline{B}$.

特别需要注意的是，差集运算可先利用差交转化律转换为交集形式，然后再考虑相应问题.

0.1.3 区间与邻域

在本书中常用的实数集合或其子集是区间和邻域.

若实数 $a<b$，满足条件 $a<x<b$ 的全体实数构成的集合称为一个开区间，记作 (a,b)，即 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$；满足条件 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数所构成的集合称为一个闭区间，记作 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$.

类似地，可以定义半开半闭区间 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\},(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

除了上面的有限区间外，还可以定义无限区间：

(1) $(-\infty,+\infty)=\{x|x\in\mathbf{R}\}$；

(2) $(a,+\infty)=\{x|x>a\},[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$；

(3) $(-\infty,b)=\{x|x<b\},(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$.

下面给出邻域的概念：

定义 0.4 以点 x_0 为中心，$\delta(\delta>0)$ 为半径的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，称为以点 x_0 为中心的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x||x-x_0|<\delta\}.$$

有些情形下如果不要求说明邻域半径，则可以简单记作 $U(x_0)$.

不包含邻域中心 x_0 的以点 x_0 为中心去心 δ 邻域：

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=U(x_0,\delta)-\{x_0\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta).$$

在上面的定义中用到了绝对值不等式，它们与集合对应关系如下：

$|x|<a \Leftrightarrow \{x \mid -a<x<a\}$，$|x|>b \Leftrightarrow \{x \mid x>b \vee x<-b\}$（其中，符号“$\vee$”表示“或者”，$a>0$，$b>0$）.

0.2 映射与函数

0.2.1 映射与函数的概念

定义 0.5 设 A、B 是任意两个集合，如果按照某个对应法则 f，对于 A 中的任何一个元素，在 B 中都有唯一一个元素与之对应，那么这样的对应关系称为集合 A 到集合 B 上的一个映射，记作 $f: A \to B$.

对于映射 $f: A \to B$，若 $a \in A$，在集合 B 中与之对应的元素为 b，则称 b 是 a 的象，a 是 b 的原象.

如果映射 $f: A \to B$ 满足：

(1) 对于 A 中的不同元素，在 B 中有不同的象；

(2) B 中每个元素在 A 中都有原象.

则称映射 f 建立了集合 A 和集合 B 之间的一个一一对应关系，也称 f 是集合 A 到集合 B 上的一一映射. 例如，

(1) 设 $A=\{-2,1,0,1,2\}$，$B=\{0,1,2,3,4\}$，法则 f 为求平方，则这种对应关系就是一个映射，但不是一一映射；

(2) 设 $A=\{$数轴上的点$\}$，按照通常数轴上的点和实数的对应关系，映射 $f: \mathbf{R} \to A$ 是一个一一映射.

定义 0.6 设 A、B 是 $\mathbf{R}$ 的任意两个非空子集，那么 A 到 B 上的映射 $f: A \to B$ 称为 A 到 B 上的一个函数，通常记作 $y=f(x)$ $(x \in A)$.

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，显然 $y \in B$；在给定自变量一个具体取值 x_0 时，通过对应法则 f 得到因变量的取值 y_0，称之为函数在该值下的函数值，即 $y_0=f(x_0)$；自变量的所有可能取值的集合称为函数的定义域，记作 D_f，显然 $D_f=A$；因变量的所有可能取值的集合称为函数的值域，记作 R_f，显然 $R_f \subset B$. 例如，

(1) 一次函数. 函数 $y=f(x)=ax+b \quad (a \neq 0)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域也是 $\mathbf{R}$；

(2) 二次函数. 函数 $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，当 $a>0$ 时，值域是 $\left\{y \,\middle|\, y \geqslant \frac{4ac-b^2}{4a}\right\}$，当 $a<0$ 时，值域是 $\left\{y \,\middle|\, y \leqslant \frac{4ac-b^2}{4a}\right\}$.

一般地，如果不做特别说明，就认为使函数表达式有意义的 x 的取值范围就是定义域，例如，写出 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 就认为函数 f 的定义域是 $[-2,2]$，而不再在式子中直接写出.

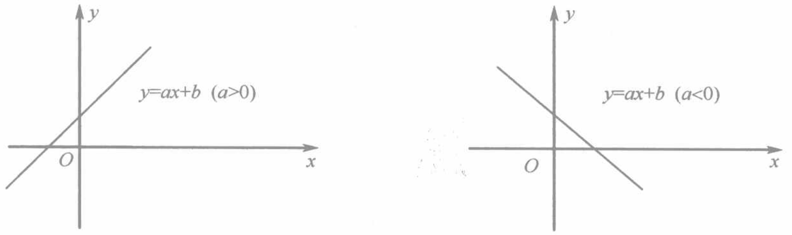
上述例子中表示函数的方法称为解析法或公式法，此外常用的方法还有表格法、图示法等.

表格法就是将自变量和因变量的取值对应列表（表 0.1），它的优点是使用方便，有利于查找，但对应数值不完全，不便于对函数的性态作进一步研究.

表 0.1

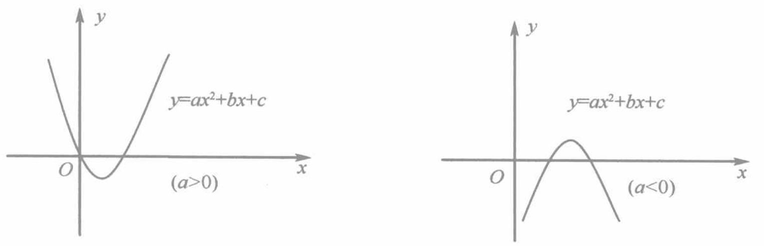
x	1	2	0.5	-1	18
$y=f(x)$	10	18	6	0.9	-1

图示法表示函数也称为函数的图像或图形，它是函数在给定的坐标系下点的集合. 例如，一次函数的图像是直线（图 0.1），二次函数的图像是抛物线（图 0.2)等. 图示法的优点是直观明显，能直接看出函数的变化情况，但不能进行准确地计算，也不便于理论推导.



(a) (b)

图 0.1



(a) (b)

图 0.2

本书在兼用表格法和图示法的情况下，主要是以解析法表示函数的，它便于理论分析、推导和计算. 例如，

(1) 绝对值函数

$$y=f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases},$$

$D_f=(-\infty,+\infty)$，$R_f=[0,+\infty]$（图 0.3）；

如果一个函数在其定义域的不同子集上，用不同的解析式表示，这样的函数称为分段函数，相应的子集的共同端点称为该函数的分段点，以后会经常遇到这种函数.

(2) 符号函数

$$y=f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases},$$

$D_f=(-\infty,+\infty)$，$R_f=\{-1,0,1\}$（图 0.4）；

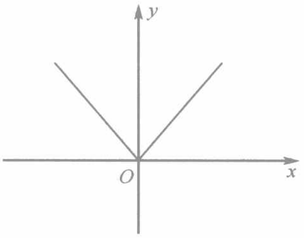


图 0.3

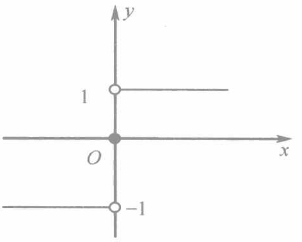


图 0.4

(3)取整函数

$$y = f(x) = [x],$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,即若 $x = n + r$ ($n \in \mathbf{Z}, 0 \leqslant r < 1$), 则$[x]=n$.

$D_f = \mathbf{R}, R_f = \mathbf{Z}$(图 0.5).

【例 0.1】 用解析法表示图 0.6 给出的图像的函数.

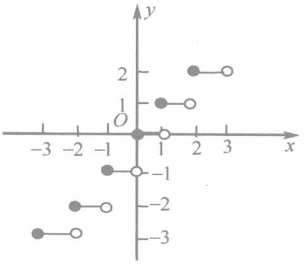


图 0.5

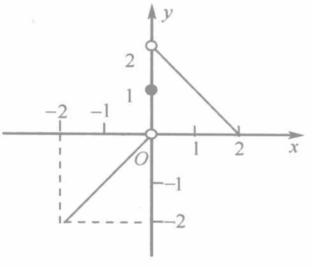


图 0.6

解:这是定义域在 $[-2,2]$ 上的函数,当 $x \in [-2,0]$ 时, $y = x$;当 $x = 0$ 时, $y = 1$;当 $x \in (0,2]$ 时, $y = 2 - x$, 所以

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-2,0) \\ 1, & x = 0 \\ 2 - x, & x \in (0,2] \end{cases}.$$

有必要指出的是,函数的解析形式也是多种多样的,上面给出的解析式都是能明显地将因变量表示成自变量的表达式形式,这样的函数通常称为显函数.有些函数不容易或者表示成显函数的形式比较麻烦,通常用方程的形式表达出来,例如,圆的方程 $x^2 + y^2 = r^2$,但是该方程实际上也解析地表达了函数 $y = y(x)$, 称这样能表示成方程 $F(x) = 0$ 所确定的函数为隐函数.

另外,还有一类通过中间变量来表达函数关系的函数,如 $\begin{cases} y = a\sin t \\ x = a\cos t \end{cases}$ (a 为常数),这样的表示方法通常称为参数方程表示的函数.

0.2.2 函数的运算与反函数

1. 函数的四则运算

由函数的定义可知,如果两个函数 f 、g 的定义域相同,且对应法则也相同,则称这两个函数相同.

设两个函数 f 与 g 是定义在 D_f 、D_g 上的一元函数，且 $D_f \cap D_g \neq \varnothing$，则可定义 f 与 g 的四则运算如下：

(1) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad (x \in (D_f \cap D_g))$；

(2) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad (x \in (D_f \cap D_g))$；

(3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \quad (x \in (D_f \cap D_g)$ 且 $g(x) \neq 0)$；

(4) $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad (x \in D_f, \lambda \in \mathbf{R})$.

【例 0.2】 设 $f(x) = \arcsin x, g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 求 $(f \pm g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$, $(3g)(x)$.

解：
$$(f \pm g)(x) = \arcsin x \pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ (x \in (-1,1))；$$
$$(f \cdot g)(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \ (x \in (-1,1))；$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2} \ (x \in (-1,1))；$$
$$(3g)(x) = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \ (x \in (-1,1)).$$

2. 复合函数

定义 0.7 设 $y = f(u)$，定义域为 D_f；$u = \varphi(x)$，定义域为 D_φ，值域为 R_φ，当满足 $R_\varphi \subset D_f$ 时，称 $y = f[\varphi(x)]$ 为关于 x 的复合函数，记作 $f \circ \varphi(x) = f[\varphi(x)]$，它是由 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数，其定义域为 D_φ，u 称为中间变量.

需要说明的是，定义中可以不要求 $R_\varphi \subset D_f$，只要能够满足 $R_\varphi \cap D_f \neq \varnothing$ 的条件，$y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 也可以复合，不过这时复合函数 $f \circ \varphi$ 的定义域可能不是 D_φ，而是 D_φ 的某个子集.

利用函数的复合运算的规则，还可以将 3 个或 3 个以上函数构成复合函数；也可以将一个函数分解为几个简单函数. 但必须注意的是，函数之间的复合是有条件的，不是任意 2 个函数都能复合的. 例如，函数 $y = \sin^2(\log_2 x)$ 就是由 3 个函数 $y = u^2, u = \sin v, v = \log_2 x$ 复合而成的关于 x 的复合函数；而 $y = f(u) = \log_5 u, u = \varphi(x) = -1 + \sin x$，把它们形式地复合起来为 $y = \log_5(-1 + \sin x)$ 并不是一个函数，因为 $D_f = (0, +\infty), R_\varphi = [-2, 0], D_f \cap R_\varphi = \varnothing$，所以 x 与 y 不能建立对应关系.

【例 0.3】 设 $y = f(u) = \sqrt{1+u}, u = \varphi(x) = x^2 - 5$，求复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的定义域.

解：因为 $D_f = [-1, +\infty), R_\varphi = [-5, +\infty), D_f \cap R_\varphi \neq \varnothing$，所以进行的函数复合，其定义域可以用下面 2 种方法求得.

（方法一） 由 $D_f \cap R_\varphi = [-1, +\infty)$ 作为 $u = \varphi(x)$ 的值域，解出定义域 $D_{f \circ \varphi}$，即由 $x^2 - 5 \in [-1, +\infty)$，可得 $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) = D_{f \circ \varphi}$.

（方法二） 由复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 直接求其定义域，这里 $y = f[\varphi(x)] = \sqrt{x^2 - 4}$，要求 $x^2 - 4 \geqslant 0$，即 $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) = D_{f \circ \varphi}$.

这里需要特别指出的是，用方法二比较方便，但是有可能扩大定义域. 例如，函数 $y=x$ 的定义域为 $D=\mathbf{R}$，但是，若 $y=\dfrac{1}{u}$，$u=\dfrac{1}{x}$，则可得复合函数 $y=x$，定义域变为 $D=\mathbf{R}-\{0\}$.

因此提倡用方法一，此时就是采用从外层到内层，逐层剥离的方法. 如果已知原始函数，在求复合函数的形式表达式时，采用的方法是由内层到外层，逐层代入，进行求解.

【例 0.4】 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1 \\ 0, & |x|=1 \\ -1, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解：因为 $f[g(x)]=f(\mathrm{e}^x)$，所以需要从 $|g(x)|=\mathrm{e}^x$ 与 1 的大小关系上分 3 种情况分析 x 的取值范围.

当 $x<0$ 时，$|g(x)|<1$，此时 $f(g(x))=1$；

当 $x=0$ 时，$|g(x)|=1$，此时 $f(g(x))=0$；

当 $x>0$ 时，$|g(x)|>1$，此时 $f(g(x))=-1$.

所以

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x>0\end{cases}.$$

而对于 $g[f(x)]$，因为外层函数 $g(x)=\mathrm{e}^x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，所以复合函数的定义域区间的划分是以 $f(x)$ 定义域的划分为基准的，所以

$$g[f(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1 \\ 1, & |x|=1 \\ \mathrm{e}^{-1}, & |x|>1\end{cases}.$$

3. *反函数*

定义 0.8 设函数 $y=f(x)$ $(x\in D_f)$ 的值域为 R_f. 如果映射 $f: D_f\to R_f$ 是一一对应的关系，那么任给 R_f 中的一个元素 y（映射 f 的象），可以在 D_f 中找到唯一的 x（映射 f 的原象）与之对应. 这样又可以一个确定 R_f 到 D_f 的函数，它称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in R_f$.

一般地，习惯用 x 表示自变量，所以函数 $y=f(x)$ $(x\in D_f)$ 的反函数通常改写成 $y=f^{-1}(x)$ $(x\in R_f)$.

由反函数的定义可以看出原始函数实际上也是其反函数的反函数，所以通常也称 $y=f(x)$ $(x\in D_f)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ $(x\in R_f)$ 互为反函数.

【例 0.5】 求下列函数的反函数.

(1) $y=3x-1$ $(x\in\mathbf{R})$；

(2) $y=-\sqrt{x}$ $(x\in[0,+\infty))$；

(3) $y=x^2$.

解：(1) 为求其反函数，先解出 $x=\dfrac{1}{3}(y+1)$，再把 x 和 y 对调，得到反函数

$$y=\frac{1}{3}(x+1)\ (x\in\mathbf{R}).$$

(2) 它的值域是 $(-\infty,0]$，先解出 $x=y^2$，所以反函数是

$$y=x^2\quad(x\in(-\infty,0]).$$

(3) 这里没有特别注明函数的定义域，自然理解定义域为 $\mathbf{R}$，即函数 $f(x)=x^2$ $(x\in\mathbf{R})$，该映射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+\cup\{0\}$ 不是一个一一对应（例如定义域中的 $x=1$ 和 $x=-1$ 通过映射 f 都对应 $y=1$），所以函数 $y=x^2$ 的反函数不存在.

如果函数 $y=f(x)\ (x\in A)$ 的值域是 B，设其存在反函数为 $y=f^{-1}(x)\ (x\in B)$，则在坐标平面中，互为反函数的两个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称. 例 0.5 (1)、(2) 的函数及其反函数的对应图像分别如图 0.7、图 0.8 所示.

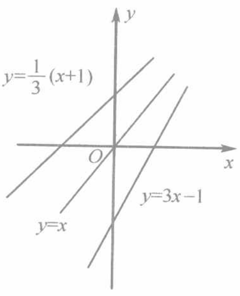


图 0.7

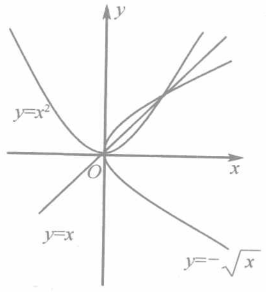


图 0.8

0.3　函数的几个简单性态

0.3.1　函数的奇偶性

定义 0.9　设函数 f 的定义域 D_f 是关于原点对称的（即对任意的一个 $x\in D_f$，必存在 $-x\in D_f$），

(1) 若对 $\forall x\in D_f$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 f 为偶函数；

(2) 若对 $\forall x\in D_f$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 f 为奇函数.

例如，$y=x^2$（图 0.9），$y=c$，$y=x^{2n}$，$y=\cos x$ 等为偶函数；$y=x^3$（图 0.10），$y=x$，$y=x^{2n+1}$，$y=\sin x$ 等为奇函数. 但是，并非任何函数都具有奇偶性，如函数 $y=[x]$，$y=\cos x+\sin x$ 就既不是偶函数也不是奇函数.

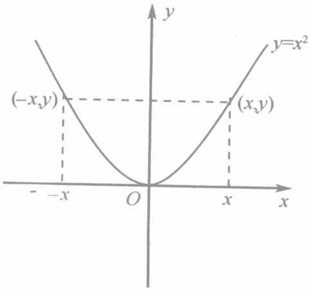


图 0.9

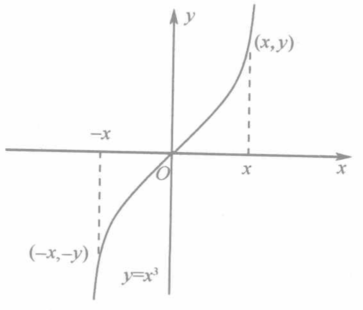


图 0.10

偶函数和奇函数的图像有如下特点：

(1) 偶函数的图像关于 y 轴对称；

(2) 奇函数的图像关于原点对称.

容易得到，若 $f(x)$、$g(x)$ 同为偶函数，并且满足 $D_f \cap D_g \neq \varnothing$，则在 $D_f \cap D_g$ 上 $f(x) \pm g(x)$、$f(x) \cdot g(x)$ 为偶函数；若两者中有一个奇函数，另一个为偶函数，则 $f(x) \cdot g(x)$ 为奇函数.

同时，不难证明："任何一个定义在关于原点对称区间上的函数，总可以表示成一个奇函数与偶函数之和".

0.3.2 函数的单调性

定义 0.10 设函数 $y = f(x)$，$\forall x_1, x_2 \in (a,b) \subset D_f$，$x_1 < x_2$，

(1) 若 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加的，否则称为单调非增的；

(2) 若 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调减少的，否则称为单调非减的.

单调增加或单调减少的函数称为单调函数. 一个函数有可能在其定义域内一部分区间上是单调增加的，而另一部分区间上是单调减少的，使函数保持单调性的自变量变化区间称为单调（增加或减少）区间.

例如，函数 $y = x$ 是单调增加函数，$y = -x$ 是单调减少函数，取整函数 $y = [x]$，在区间 $(-\infty, +\infty)$ 是单调非减函数，但不是单调增加函数. 区间 $(-\infty, 0]$、$[0, +\infty)$ 分别是函数 $y = x^2$ 的单调减少区间和单调增加区间.

单调函数的反函数一定存在，并且互为反函数的单调函数具有相同的单调性. 对于单调性的判断，当然可以利用定义来做，但是由于 x_1、x_2 取值的任意性，使得操作上有一定的困难性，等到学习了一元函数微分学后，将可以利用导数很方便的进行判断.

0.3.3 函数的周期性与有界性

定义 0.11 设函数 $y = f(x)$，若存在常数 $T \neq 0$，使得对 $\forall x \in D_f$，有 $x + T \in D_f$，并且 $f(x+T) = f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期，其中满足上述条件的最小的正数称为 $f(x)$ 的最小正周期，通常简称周期. 在本书中，除特别声明外周期均指最小正周期.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 是以 2π 为周期，$\tan x$，$\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

有必要指出的是，并非所有的周期函数一定存在最小正周期，如狄里克雷函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \in (\mathbf{R} - \mathbf{Q}) \end{cases},$$

$D_f = (-\infty, +\infty)$，$R_f = \{0, 1\}$，$f(x)$ 是非单调的偶函数，任何有理数都是其周期，但是有理数中没有最小的正数，所以没有最小正周期.

定义 0.12 设函数 $y = f(x)$，$X \subset D_f$，若 $\exists M > 0$，使 $\forall x \in X$，都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界，否则称其无界.

若将定义 0.12 中的 M 不作限制，$|f(x)| \leqslant M$ 改为 $f(x) \leqslant M$ ($f(x) \geqslant -M$)，则称 M 是函数 $f(x)$ 的一个上界（下界）. 容易证明，$f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界.