



高职高专“十一五”规划教材

经济数学基础

一元函数微积分及其应用·概率论与数理统计

(附练习册)

康永强 谢广顺 岑苑君 编著



化学工业出版社

高职高专“十一五”规划教材

经济数学基础

一元函数微积分及其应用·概率论与数理统计
(附练习册)

康永强 谢广顺 岑苑君 编著



化学工业出版社

·北京·

(微区书号) 50014·00

本书是根据高职高专经济类专业数学教学的基本要求,结合高职高专数学的教学现状而编写的。全书共分四个单元,设11章,主要内容包括一元函数微分学及其经济应用、一元函数积分学及其经济应用、概率论及数理统计。

本书以“掌握概念、强化基础、培养技能”为重点,体现了高职教育以应用为目的、以必需和实用为原则的教学理念。在内容编排上,不仅注重数学课程循序渐进、由浅入深的特点,而且结合高职高专学生的学习特点,采用相对活泼的数学语言形式处理抽象概念,同时引入大量经济和生活实例,便于学生理解和掌握。为方便教学,本书还附有相应的练习册作为课程教学的同步教材。

本书可作为高等学校尤其是高职高专院校经济类专业的教学用书,也可供其他专业学生、数学教师及相关工作者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础:一元函数微积分及其应用·概率论与数理统计/康永强,谢广顺,岑苑君编著. —北京:化学工业出版社,2009.2

高职高专“十一五”规划教材
ISBN 978-7-122-04376-4

I. 经… II. ①康…②谢…③岑… III. 经济数学-高等学校:技术学院-教材 IV. F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第000375号

责任编辑:蔡洪伟 于 卉
责任校对:王素芹

文字编辑:李姿娇
装帧设计:史利平

出版发行:化学工业出版社(北京市东城区青年湖南街13号 邮政编码100011)

印刷:北京云浩印刷有限责任公司

装订:三河市宇新装订厂

787mm×1092mm 1/16 印张21 $\frac{1}{4}$ 字数542千字 2009年3月北京第1版第1次印刷

购书咨询:010-64518888(传真:010-64519686) 售后服务:010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书,如有缺损质量问题,本社销售中心负责调换。

定 价:36.00元(含练习册)

版权所有 违者必究

前 言

为了配合和适应高职经济类各专业的改革,经过广泛调研(深入中学、兄弟院校和各专业)、研讨,我们提出了《经济数学基础》课程的改革和实践方案,经过多年以来的不断修改、补充和完善,形成了《经济数学基础》课程的改革和实践的几点认识。

第一,在“工学结合的人才培养模式”的大背景下,首先要解决数学课程的定位问题。将《经济数学基础》从原来的专业基础课向基础必修课转变,并且按照基础必修课的要求进行全面改革,将过去已有的模块化数学课程向完全与专业相结合的、以便更好地服务于高职人才培养的方案转变。为此,我们编写了各专业主修和选修的数学课程教学大纲,它们不仅为学生数学素质的全面培养服务,同时能为提供优质的数学教学服务。

第二,在处理经济类数学课程的教学内容上,我们采用“降低难度不降低水平”、“淡化复杂的计算、强化基本概念和基本方法及其应用”的指导原则。

在教学内容的取舍上,彻底打破原有的数学学科体系,删减与专业应用无关的理论推导和繁琐的计算方法,将相关内容进行整合。具体地,我们对经济数学课程内容进行了如下几方面的改革:对函数概念,以函数关系的模式为中心,通过分类和归纳,将基本初等函数与复合函数融合在一起,为微分和积分部分打好基础,对于经济中的常用函数更加强调经济函数间的关系;对连续函数的概念采用描述化;弱化导数及其相关概念的理论,在一元函数微分部分的计算,采用运算模式化(导数运算模式和微分运算模式)过程,以此将导数和微分的公式和运算法则融合为一体,极大地缩短了学习过程,突破了过去学习隐函数的导数、高阶导数等内容的难度;弱化极值部分的理论,首先将单调性和极值的概念进行整合,从分界点出现的各种类型出发,建立直观的极值概念,然后从函数的形状(单调性和凹向性)上认识函数的极值和最值;降低洛必达法则的要求,将极值判断方法引向经济中的最值问题,边际和弹性更注重对于其经济涵义的理解和掌握;在一元函数积分部分,强调了微分运算和积分运算的联系,同时将微分运算模式思想引入积分运算模式,大大提高了学生掌握积分方法的效率,另外将定积分的精确定义改用公式来定义,强调定积分应用中的微元法,再次将重点集中到积分在经济中的应用上;引入数学模型的有关知识,增加了大量的实际问题的例题;概率论部分更加强调对实际随机问题的思考和解决;数理统计部分在内容上用分类法思想将参数估计和假设检验相结合。

第三,在教学内容的组织上强调基本概念的建立和基本方法的掌握,突出基本运算能力的培养,强化基本概念和方法的实际应用。在课堂教学的改革上,通过传统的“理论教学”与现代的“案例教学”相结合,将数学知识的应用作为教与学的中心。我们将专业课和生活中所涉及的有关数学问题,作为数学课程概念的引入和方法的应用,增加了学生数学学习的兴趣,在应用中掌握概念和方法,以此保证“降低难度不降低水平”。

第四,在本书的编写中注重科技精神与人文精神的结合,加强数学教育中的人文关怀。根据高职教育的特点,在编写时注重教学内容的思想性,培养学生的辩证观。“变”与“不变”、“匀速”和“变速”、“直与曲”,在一定条件下可以转换,结合数学教学,不失时机地进行辩证法的教育。用辩证唯物主义的观点武装学生的头脑,使学生用联系的、变化的观点去分析、认识世界,而不是孤立地、静止地去看事物。同时也在教学过程中,与学生交流

关于哲学、历史、社会、理想及未来发展方向的认识,使学生能通过教师的全面关怀,对数学产生兴趣,以此达到数学教师的时代价值。

最后,增加了数学实验选修教学部分.此部分内容安排在学完本课程后,它将作为经济数学基础(一元函数微积分及其应用·概率论与数理统计)的内容的补充,以此来实现高职数学课程教学过程的整体优化.随着计算机及其软件产业的迅猛发展,许多学科的发展方向从定性研究转向定量研究.利用计算机可以进行数学问题的解析解和数值解,显示解的曲线形式,甚至可以进行重要的数学推导或证明.与此同时,传统高等数学教学由于其教学内容的系统性、完整性,教学培养目标的单一性和标准的共同性,以及教学过程中教学信息的单向性,而与高职教育中“宽基础,重实训”的特点有一定的出入.因此高职数学教育承受着既要保证必需够用的基础,又要与加强实训环节相适应的双重压力.我们将高职数学类课程的教学内容增加实验部分,将其分为两部分内容:数学课堂教学(即传统的数学教学)和数学实验教学.数学实验课的设置目的是通过学生使用先进的数学实验工具,加强数学理论和方法的再认识,注重学生的实践和应用能力,保证教学任务的圆满完成,实现数学教学过程的优化.作为数学实验课,应定位于作为高等数学课堂教学的辅助课程,要以高等数学的基本理论和方法为主线,培养学生的实践能力,增强数学的应用能力,培养学生的数学素质,利用先进的数学计算工具和信息传播技术,加强学生对所学理论的理解以及具备初步的探讨和解决一些典型的数学问题的能力.

本书的编写分工为:第2章~第4章、第7章~第9章由康永强编写;第1章、第5章、第6章和附录由谢广顺编写;第10章、第11章由岑苑君编写.全书由康永强统稿、定稿.本书由广东文舟图书发行有限公司策划编辑陈威参与组织.

在本书的编写过程中,我们得到了顺德职业技术学院陈栗宋院长的大力支持和热情鼓励.另外,李宏远副教授对于本书的框架和定位提出了许多建设性的意见;赖立祥副教授在本课程的教学内容处理和教学方法方面,提供了非常宝贵的经验.在此,对在本书编写过程中所有提供关心和帮助的朋友一并表示衷心的感谢.

书中难免不足之处,诚恳地希望专家和读者批评指正,以便不断修改和完善.

编著者

2008年12月

目 录

第一单元 一元函数微分学及其经济应用

第 1 章 变量之间依存关系的数学模型——函数，经济中常用的数学模型——经济函数	1
1.1 函数	2
1.1.1 函数的概念	2
1.1.2 函数的四种特性	4
1.1.3 反函数——逆向思维的实例	5
1.1.4 基本初等函数	6
1.1.5 复合函数	8
1.1.6 初等函数	10
【练习 1-1】	10
1.2 经济中常用的数学模型——经济函数	10
1.2.1 需求函数与供给函数	10
1.2.2 总成本函数和平均成本函数	12
1.2.3 收入函数	12
1.2.4 利润函数	13
【练习 1-2】	14
【习题一】	15
习题参考答案	17
第 2 章 变量无限变化和连续变化的数学模型——极限·连续	19
2.1 函数极限的概念	20
2.1.1 $x \rightarrow \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限	20
2.1.2 $x \rightarrow x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限	21
【练习 2-1】	23
2.2 无穷小与无穷大	23
2.2.1 无穷小	23
2.2.2 无穷小的性质	24
2.2.3 无穷大	25
2.2.4 无穷大与无穷小的关系	25
【练习 2-2】	26
2.3 求极限的方法——四则运算法则和两个重要极限公式	26
2.3.1 极限的四则运算法则	26
2.3.2 两个重要极限	28
【练习 2-3】	31
2.4 函数的连续性	32
2.4.1 函数的增量	32

2.4.2	函数连续的概念	32
2.4.3	连续的另一个定义	33
2.4.4	初等函数的连续性	34
2.4.5	闭区间上连续函数的性质	35
	【练习 2-4】	35
2.5	无穷小的比较	35
2.5.1	无穷小的比较	35
2.5.2	常用等价无穷小关系	36
	【练习 2-5】	38
	【习题二】	39
	习题参考答案	39
第 3 章	函数的局部变化率和改变量的估值问题——导数·微分	41
3.1	函数的局部变化率——导数	42
3.1.1	两个实例	42
3.1.2	导数的定义	43
3.1.3	曲线在已知点的切线斜率——导数的几何意义	44
3.1.4	函数 $y=f(x)$ 在区间的导数	44
3.1.5	可导与连续的关系	45
	【练习 3-1】	46
3.2	求导数的方法——求导基本公式和运算法则	46
3.2.1	导数的基本公式	47
3.2.2	导数的四则运算法则	48
3.2.3	复合函数的导数法则	49
3.2.4	隐函数的求导法	50
	【练习 3-2】	52
3.3	高阶导数	53
3.3.1	二阶导数	53
3.3.2	n 阶导数	53
	【练习 3-3】	54
3.4	函数局部改变量的估值问题——微分及其应用	55
3.4.1	微分概念	55
3.4.2	微分的计算	55
	【练习 3-4】	57
3.5	二元函数的偏导数	57
3.5.1	二元函数	57
3.5.2	二元函数的偏导数	58
3.5.3	二元函数的二阶偏导数	59
	【练习 3-5】	60
	【习题三】	62
	习题参考答案	62
第 4 章	导数在经济上的应用问题——最值·边际·弹性	65
4.1	函数的形态之一——函数的单调性	65

【练习 4-1】	67
4.2 函数的极值与最值	68
4.2.1 函数的极值——函数的局部性质	68
4.2.2 如何求函数的极值	68
4.2.3 函数的最大值与最小值——函数的整体性质	72
4.2.4 函数的最大值与最小值的求法	73
【练习 4-2】	74
4.3 导数在经济分析中的应用	74
4.3.1 经济中的最值问题	74
4.3.2 边际分析	76
4.3.3 弹性分析	78
【练习 4-3】	81
4.4 偏导数在经济分析中的应用	82
4.4.1 偏边际成本	82
4.4.2 二元经济函数的极值	83
【练习 4-4】	85
4.5 函数的形态之二——凹向性·拐点	85
4.5.1 函数的凹向性与拐点	85
4.5.2 确定函数的凹向性与拐点的一般步骤	87
4.5.3 利用曲线的凹向性再认识极值的二阶导数判别准则	88
4.5.4 曲线的渐近线	90
4.5.5 函数作图	90
【练习 4-5】	92
4.6 计算未定式极限的一般方法——洛必达法则	92
【练习 4-6】	93
【习题四】	95
习题参考答案	96

第二单元 一元函数积分学及其经济应用

第 5 章 微分的逆运算问题——不定积分	98
5.1 不定积分及其性质	99
5.1.1 逆向思维又一例——原函数与不定积分的概念	99
5.1.2 不定积分的几何意义	100
5.1.3 不定积分的基本性质	101
5.1.4 基本积分公式	101
5.1.5 不定积分的运算性质	101
【练习 5-1】	102
5.2 换元积分法	103
5.2.1 第一换元积分法（凑微分法）	103
5.2.2 第二换元积分法	106
【练习 5-2】	107
5.3 分部积分法	108

【练习 5-3】	110
5.4 常微分方程初步	110
5.4.1 微分方程的定义	110
5.4.2 微分方程的解与通解	111
5.4.3 初始条件与特解	111
5.4.4 可分离变量的微分方程	112
5.4.5 一阶线性微分方程	113
【练习 5-4】	115
【习题五】	118
习题参考答案	119
第 6 章 求总量或变化量的问题——定积分及其经济应用	121
6.1 定积分的概念	121
6.1.1 定积分的定义	121
6.1.2 定积分的几何意义	122
6.1.3 定积分的性质	122
6.1.4 怎样求定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的值	123
【练习 6-1】	124
6.2 计算定积分的一般方法——换元积分法和分部积分法	125
6.2.1 定积分的换元积分法	125
6.2.2 定积分的分部积分法	127
【练习 6-2】	127
6.3 定积分概念的拓展——无穷区间上的广义积分	127
【练习 6-3】	129
6.4 定积分的应用	129
6.4.1 定积分的微元法	129
6.4.2 平面图形的面积	129
6.4.3 定积分在经济分析中的应用	131
【练习 6-4】	131
6.5 再谈定积分的概念	132
6.5.1 引例	132
6.5.2 定积分的概念	132
【练习 6-5】	134
【习题六】	135
习题参考答案	136

第三单元 概 率 论

第 7 章 偶然中的必然——随机事件与概率	137
7.1 随机事件的概念及运算	138
7.1.1 随机事件的概念	138
7.1.2 随机事件的分类	139
7.1.3 事件间的关系与运算	139

691	【练习 7-1】	141
701	7.2 随机事件的概率	142
711	7.2.1 生活中有关概率的陈述	142
721	7.2.2 概率的定义	142
731	7.2.3 概率的基本性质	145
741	【练习 7-2】	145
751	7.3 概率加法公式	146
761	【练习 7-3】	147
771	7.4 条件概率与概率乘法公式	148
781	7.4.1 条件概率	148
791	7.4.2 概率乘法公式	149
801	7.4.3 全概率公式和贝叶斯公式	150
811	【练习 7-4】	152
821	7.5 事件的独立性	153
831	7.5.1 两个事件的独立性	153
841	7.5.2 三个事件的相互独立性	154
851	【练习 7-5】	155
861	【习题七】	157
	习题参考答案	158
	第 8 章 随机现象的函数化——随机变量及其分布	161
871	8.1 随机变量的概念	161
881	8.1.1 随机变量的概念	161
891	8.1.2 随机事件与随机变量的关系	162
901	8.1.3 随机变量的分类	163
911	【练习 8-1】	163
921	8.2 离散型随机变量及其概率分布	164
931	8.2.1 离散型随机变量的概率分布及其基本性质	164
941	8.2.2 常用离散型随机变量的分布	165
951	【练习 8-2】	169
961	8.3 连续型随机变量及其分布	169
971	8.3.1 连续型随机变量的概率密度及其基本性质	169
981	8.3.2 常用连续型随机变量的分布	170
991	【练习 8-3】	171
1001	8.4 随机变量的分布函数	172
1011	8.4.1 分布函数及其基本性质	172
1021	8.4.2 离散型随机变量的分布列与分布函数	172
1031	8.4.3 连续型随机变量的分布密度与分布函数的互求	173
1041	【练习 8-4】	174
1051	8.5 正态分布	175
1061	8.5.1 正态分布的概念	175
1071	8.5.2 标准正态分布	176
1081	8.5.3 一般正态分布与标准正态分布的关系	178

179	【练习 8-5】	179
	【习题八】	181
	习题参考答案	182
第 9 章 随机变量的集中程度和离散程度的描述——数学期望和方差		185
185	9.1 数学期望	185
185	9.1.1 离散型随机变量的数学期望 (平均值)	185
187	9.1.2 连续型随机变量的数学期望	187
188	【练习 9-1】	188
189	9.2 方差	189
189	9.2.1 方差的概念	189
190	9.2.2 计算随机变量 ξ 的方差的简捷公式	190
192	【练习 9-2】	192
192	9.3 数学期望和方差的主要性质	192
192	9.3.1 数学期望和方差的主要性质	192
193	9.3.2 常用分布的数学期望与方差	193
193	【练习 9-3】	193
194	【习题九】	194
196	习题参考答案	196
第四单元 数理统计部分		
—— 数理统计的基本概念		
第 10 章 部分刻画整体的基础——数理统计的基本概念		197
197	10.1 总体和样本	197
197	10.1.1 总体	197
198	10.1.2 样本与样本值	198
198	10.1.3 总体、样本、样本值的关系	198
198	10.1.4 样本的数字特征	198
199	【练习 10-1】	199
199	10.2 统计量和抽样分布	199
199	10.2.1 统计量	199
199	10.2.2 常见统计量的分布	199
202	【练习 10-2】	202
204	【习题十】	204
204	习题参考答案	204
第 11 章 部分刻画整体的方法——参数估计·假设检验		205
205	11.1 参数估计	205
205	11.1.1 点估计	205
206	11.1.2 区间估计	206
209	【练习 11-1】	209
210	11.2 假设检验	210
210	11.2.1 假设检验的原理	210
211	11.2.2 假设检验的基本方法	211
214	【练习 11-2】	214

【习题十一】	216
习题参考答案	217
附录 1 初等数学常用公式	219
附录 2 泊松分布概率值表	223
附录 3 标准正态分布表	225
附录 4 t 分布表	226
附录 5 χ^2 分布表	228
参考文献	231

第一单元 一元函数微分学及其经济应用

主要内容

- ◎ 变量之间依存关系的数学模型——函数，经济中常用的数学模型——经济函数
- ◎ 变量无限变化和连续变化的数学模型——极限·连续
- ◎ 函数的局部变化率和改变量的估值问题——导数·微分
- ◎ 导数在经济上的应用问题——最值·边际·弹性

第 1 章 变量之间依存关系的数学模型——函数，经济中常用的数学模型——经济函数

本章学习提要

- ◆ 函数的概念、性质和复合运算
- ◆ 基本初等函数和初等函数
- ◆ 经济中常用的数学模型
 - ◎ 需求函数与供给函数
 - ◎ 总成本函数和平均成本函数
 - ◎ 收入函数
 - ◎ 利润函数及盈亏平衡点

【本章概要】

函数 (function) 一词最初是由德国数学家莱布尼兹 (G. W. Leibniz, 1646—1716) 在 1692 年开始使用的. 1859 年清代数学家李善兰 (1811—1882) 第一次将 “function” 用中文译成 “函数”. 1734 年瑞士数学家欧拉 (L. Euler, 1707—1783) 引入了函数符号 “ $f(x)$ ”, 并称变量的函数是一个解析表达式, 认为函数是由一个公式确定的数量关系, 但是当时的函数概念仍然比较模糊. 1837 年, 德国数学家狄利雷克 (P. G. L. Dirichlet, 1805—1859) 提出: “如果对于 x 的每一个值, y 总有一个完全确定的值与之对应, 则 y 是 x 的函数”. 这个定义才较清楚地说明了函数的内涵: 函数 $f(x)$ 是 x 与 y 之间的一种对应关系, 不管其对应法则是公式、图像、表格, 还是其他形式. 19 世纪 70 年代以后, 随着集合概念的出现, 函数概念又用更加严谨的集合和对应的语言来表达, 这就是本章学习的函数概念.

函数是重要的数学概念之一, 微积分研究的就是各类函数 (包括初等函数和非初等函数、显函数与隐函数) 的各种性质, 特别是函数的分析性质——函数的微分和积分. 因此, 有必要先将中学学过的函数及其相关概念进行归纳, 为微分部分和积分部分的学习做必要的准备.

【学习目标】

通过本章的学习, 要求能够:

1. 理解函数的概念(包括函数值、函数的定义域、函数的表示法和函数的特性).
2. 了解分段函数、基本初等函数、初等函数的概念.
3. 了解反函数、复合函数的概念, 会将复合函数分解为简单函数的复合.
4. 认识经济中的常见函数——需求函数和供给函数、总成本函数与平均成本函数、收入函数、利润函数.

1.1 函数

函数是反映变量之间的依存关系的数学模型. 函数是用数学的术语来描述现实世界的主要工具. 本节讨论函数的基本概念、图形、性质, 归纳将在微积分中出现的重要的基本初等函数和初等函数.

1.1.1 函数的概念**(1) 常量与变量**

对工程技术或经济领域的某个过程进行研究时, 经常遇到不同的量, 例如时间、速度、质量、温度、成本、利润等. 可以将这些量分为两大类, 在考查问题的过程中, 有些量的大小不发生变化, 保持某一固定的数值, 这种量称为常量; 还有些量的大小是变化的, 它们在一定范围内可以取不同的数值, 这种量称为变量.

【注】 微积分着重研究变量与变量之间的依存关系(函数关系)及其分析性质(微分和积分). 习惯上常用字母 a, b, c, p, q 等表示常量, 用 x, y, s, t, i 表示变量.

(2) 函数的定义

一个变量的值常常取决于另一个变量的值, 或者说一个量的变化会引起另一个量的变化, 函数关系就是描述这种联系的一个法则. 例如:

① 水达到的沸点温度 T 取决于海拔高度 h (当高度增加时, 沸点下降).

② 某人在银行的存款本金 p 在一年中的本金与利息之和 A 取决于银行的利率 r .

$$A = p(1+r)$$

那么, 函数关系的真正涵义是什么呢?

定义 1.1 从非空数集 D 到非空数集 B 的一个函数关系 f 是这样一种对应规则(对应关系), 对于 D 中每一个元素 x , 对应 B 中唯一确定的元素 y . 表示函数关系用记号:

$$y = f(x), x \in D \subset \mathbf{R}$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量. 自变量 x 的变化范围 D 称为函数 $y = f(x)$ 的定义域, 因变量 y 的变化范围称为函数 $y = f(x)$ 的值域, 记为 B .

用 $y(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$ 表示 $x = x_0$ 时的函数值.

【注】 (函数关系的“机器”描述) 函数关系可以形象地比拟成“一台机器”. 对每一个允许的输入 x 指定一个唯一确定的输出 y , 其本质上表明变量之间的一种运算模式或运算结构. 输入的范围构成了函数的定义域, 输出的范围则构成了函数的值域. 如图 1-1 所示.

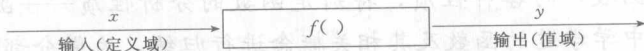


图 1-1 函数的“机器”图示

【注】 通常称仅含自变量 x 的函数 $y=f(x)$ 为一元函数, 称含有两个自变量 x 、 y 的函数 $z=f(x,y)$ 为二元函数. 本书主要讨论一元函数.

(3) 函数的两要素——函数的定义域 D 和对应规律 f

函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 是自变量 x 的取值范围, 而函数值 y 又是由对应规律 f 来确定的, 所以函数关系 $y=f(x)$ 实质上是由其定义域 D 和对应规律 f 所确定的.

【例 1】 设函数 $f(x)=2x^2+3x-1$, 则根据函数关系的描述, 对应规律为:

$$f(\quad)=2(\quad)^2+3(\quad)-1$$

则

$$f(2)=2\times 2^2+3\times 2-1=13$$

$$f(a)=2a^2+3a-1$$

$$f(x+1)=2(x+1)^2+3(x+1)-1=2x^2+7x+4$$

【例 2】 设 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$, 求 $f(\frac{2}{\pi})$.

解:

$$f\left(\frac{2}{\pi}\right)=\frac{1}{\frac{2}{\pi}}\sin\frac{1}{\frac{2}{\pi}}=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

(4) 确定函数 $y=f(x)$ 的定义域的方法

① **自然定义域** 在单纯的数学研究中, 一个函数的定义域就是那些能使函数的解析式成立的实数的集合.

【例 3】 复习下列函数及其定义域:

i. $y=a^x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$), $D=\mathbf{R}$;

ii. $y=\sqrt{x}$, $D=[0, +\infty)$;

iii. $y=\lg x$, $D=(0, +\infty)$.

② **实际定义域** 对于有实际背景的问题, 确定函数 $y=f(x)$ 的定义域时既要保证表达式的数学意义, 还要依照问题的实际意义进一步加以限制, 称为实际定义域.

例如, 半径为 r 的圆面积 $S=\pi r^2$, 其定义域 (实际定义域) 为 $D=\{r|0\leq r<+\infty\}$, 而函数 $y=\pi x^2$, 其定义域 (自然定义域) $D=\{x|-\infty<x<+\infty\}$.

(5) 函数的解析式法

函数的解析式法有以下两种表示方法.

① **显函数** y 和 x 的函数关系由解析式 $y=f(x)$ 来表示. 例如函数 $y=x^2-1$ 为显函数.

② **隐函数** y 和 x 的函数关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定. 例如单位圆是用方程 $x^2+y^2=1$ 表示的 y 与 x 之间的隐函数关系.

把一个隐函数 $F(x,y)=0$ 化成显函数 $y=f(x)$ 的过程称为隐函数的显化. 例如变量 y 和 x 的隐函数关系 $e^x+xy-1=0$ 可以化成显函数 $y=\frac{1-e^x}{x}$.

但有些隐函数很难显化, 甚至于不可能显化. 因此, 也有必要研究隐函数. 例如:

$$e^x+xy-e^y=0$$

(6) 分段函数

定义 1.2 有些函数, 在自变量的不同取值范围内, 用不同的解析式来表示, 这类函数称为分段函数.

【例 4】【通信套餐】 移动通信曾经推出的某种套餐收费标准为: 当月通话时间不超过 48 分钟时, 月租费 38 元 (包括来电显示 8 元), 超过 48 分钟时, 超过部分每分钟加收 0.2

元，试表示几种套餐收费。

解：设套餐话费 C (单位：元) 和当月通话时间 t (单位：分钟)，则其函数关系可表示为

$$C = \begin{cases} 30 & t \leq 48 \\ 30 + 0.2(t - 48) & t > 48 \end{cases}$$

【例5】(认识绝对值函数) 绝对值函数 $y = |x|$ 。

解：绝对值函数 $y = |x|$ 是由公式 $y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ 来分段定义的。 $y = |x|$ 是一个

定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的分段函数，如图 1-2 所示。

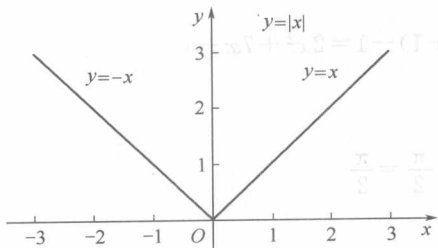


图 1-2 $y = |x|$

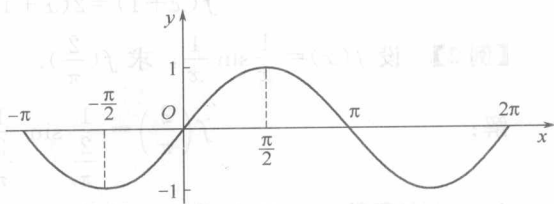


图 1-3 $y = \sin x$

【例6】【行李运费】 据铁路运费规定，到某地的行李费，当行李质量不超过 50kg 时，按基本运费 0.30 元/kg 计算，当超过 50kg 时，超过部分按 0.45 元/kg 计算，试求到该地的行李费 y (元) 与行李质量 x (kg) 之间的函数关系。

解：当 $0 \leq x \leq 50$ 时， $y = 0.30x$ ；

当 $x > 50$ 时， $y = 0.30 \times 50 + 0.45(x - 50) = 0.45x - 7.5$

所以
$$y = \begin{cases} 0.30x & 0 \leq x \leq 50 \\ 0.45x - 7.5 & x > 50 \end{cases}$$

1.1.2 函数的四种特性

(1) 有界性

定义 1.3 设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义，若存在正数 M ，使得对一切 x 都有 $|f(x)| \leq M$ ，则称 $f(x)$ 在 I 上有界。若 $f(x)$ 在 I 上有界，其图像在直线 $y = -M$ 与 $y = M$ 之间。

【例7】 函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界，因为 $|\sin x| \leq 1$ 。如图 1-3 所示。

函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界，而在 $(2, +\infty)$ 内有界，

如图 1-4 所示。

(2) 单调性

定义 1.4 若对于区间 I 内任意两点 x_1, x_2 ，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加，区间 I 称为单调增区间；若 $f(x_1) > f(x_2)$ ，则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少，区间 I 称为单调减区间。

单调增区间或单调减区间统称为单调区间。单调增加的函数的图像表现为自左至右是单调上升的曲线，

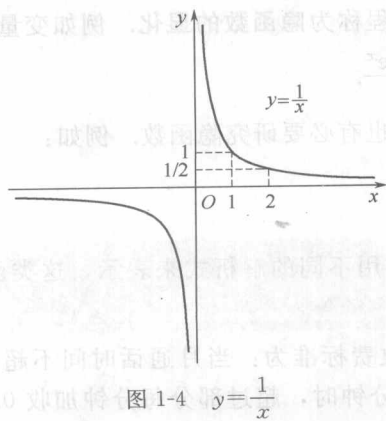
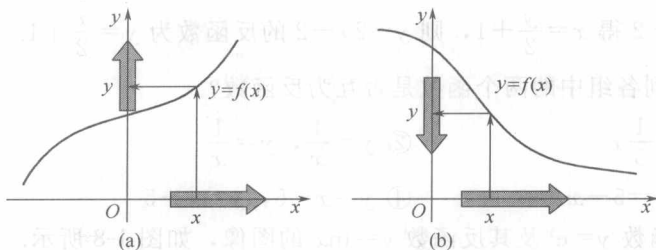


图 1-4 $y = \frac{1}{x}$

图 1-5 $y=f(x)$

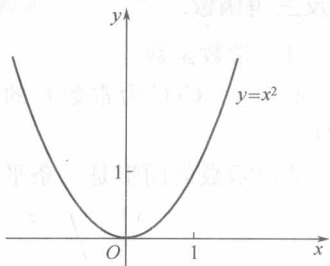
此时变量 x 与 y 同向变化 [如图 1-5(a) 所示]; 单调减少的函数的图像表现为自左至右是单调下降的曲线, 此时变量 x 与 y 反向变化 [如图 1-5(b) 所示].

例如函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调下降, 在 $(0, +\infty)$ 内单调上升, 如图 1-6 所示.

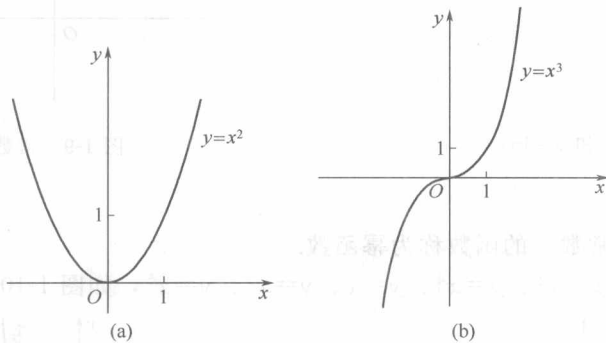
(3) 奇偶性——对称性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 对于任意 $x \in D$,

- ① 若 $f(-x)=f(x)$, 则 $y=f(x)$ 是 D 上的偶函数;
- ② 若 $f(-x)=-f(x)$, 则 $y=f(x)$ 是 D 上的奇函数.

图 1-6 $y=x^2$

【注】 偶函数的图像关于 y 轴对称; 奇函数的图像关于原点对称. 常见的偶函数如 $y=x^2$, 奇函数如 $y=x^3$, 如图 1-7 所示.

图 1-7 $y=x^2$ 与 $y=x^3$

(4) 周期性

定义 1.6 若存在非零的数 T , 使得对于任意 $x \in I$, 均有 $x+T \in I$, 且 $f(x+T)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, 通常所说的周期是指它的最小正周期.

例如 $y=\sin x, x \in (-\infty, +\infty)$ (如图 1-14 所示) 是周期函数, 其最小正周期为 2π .

1.1.3 反函数——逆向思维的实例

定义 1.7 设函数 $y=f(x)$, 且变量 x, y 是一一对应的. 如果把 y 当作自变量, x 当作因变量, 则关系式 $x=\varphi(y)$ 所确定的函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数, 记作 $y=f^{-1}(x)$, 而 $y=f(x)$ 称为直接函数. 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直接 $y=x$ 对称.

【例 8】 求 $y=2x-2$ 的反函数.