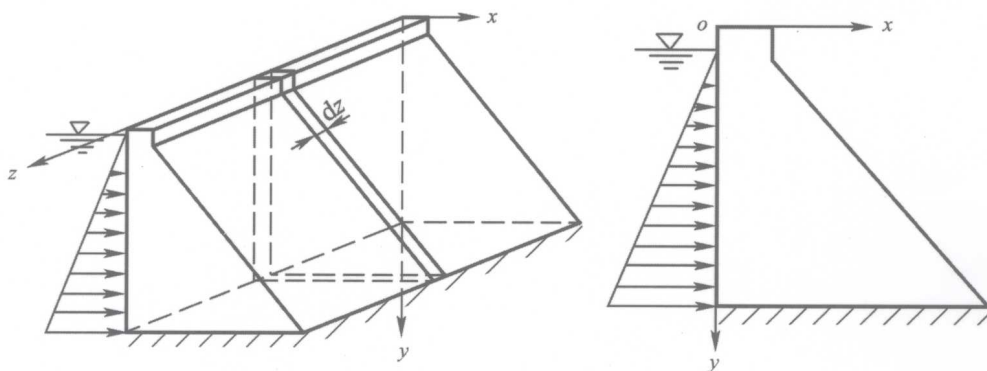


高等学校教材

弹性力学基础

TANXING LIXUE JICHU

刘润星 主编



人民交通出版社
China Communications Press

高等学校教材

Tanxing Lixue Jichu

弹性力学基础

刘润星 主编

人民交通出版社

内 容 提 要

本书共分9章,其主要内容包括:绪论,应力状态分析,形变协调关系及物理方程,平面问题直角坐标解法,平面问题极坐标解法,空间问题求解及应用举例,能量法及其变分原理,薄板小挠度弯曲问题,有限单元法基础。

本书为高等学校土木工程类专业的专业基础课教材,也可供其他专业和有关工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学基础 / 刘润星主编. —北京: 人民交通出版社,
2009.5

ISBN 978-7-114-07816-3

I. 弹… II. 刘… III. 弹性力学 IV. 0343

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 035069 号

书 名: 弹性力学基础

著 作 者: 刘润星

责任编辑: 周往莲

出版发行: 人民交通出版社

地 址: (100011) 北京市朝阳区安定门外外馆斜街3号

网 址: <http://www.ccpress.com.cn>

销售电话: (010) 59757969, 59757973

总 经 销: 北京中交盛世书刊有限公司

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京交通印务实业公司

开 本: 787×1092 1/16

印 张: 11.75

字 数: 298千

版 次: 2009年5月第1版

印 次: 2009年5月第1次印刷

书 号: ISBN 978-7-114-07816-3

印 数: 0001—1500册

定 价: 25.00元

(如有印刷、装订质量问题的图书由本社负责调换)

前 言

弹性力学是理工科类专业的重要专业基础课,其内容逻辑严谨、计算推导严密,有较强的工程应用背景,是现代计算力学、实验力学和工程结构分析等学科的理论基础。由于它的系统性和理论性较强,而且对数学基础要求较高,对于普通本科专业(如土木工程专业)学生学习时有一定的难度。

编写本教材的目的,就是针对普通工科类专业本科生在掌握了理论力学、材料力学和结构力学等课程的基础上,初步掌握弹性力学的基本知识和基本的解算方法,为继续深入学习板壳理论、弹塑性理论、结构的有限元分析方法以及研究生学习打下坚实的基础。

根据编者多年的教学经验,教材着重于基础知识的理解和应用,强调基本概念、基本理论和解决问题的基本方法,注重联系工程实际。既强调理论内容的系统性、科学性,又着眼于解决实际问题的基本思路和方法。编写中力争吸取其他教材的优点,克服其缺点,在难度、深度和内容层次编排上进行了必要的改进,以适合普通本科生的学习。特别是一些较难、较深的理论,在教材中进行了必要的简单化,以便普通工科类专业学生在少学时的教学状况下学习时,易于理解和掌握基本知识、基本理论和解决问题的基本方法。

全书共9章,其中,绪论部分对弹性力学的研究对象、研究任务、基本假设和一些基本概念等做了必要的介绍和讲解;第2章和第3章是弹性力学的基础理论部分,着重讲解求解弹性力学问题的基本方程(平衡微分方程、几何方程和物理方程)和边界条件;第4章和第5章是弹性力学基础理论在平面问题求解中的应用,针对平面直角坐标系和极坐标系下的相对简单的问题,讲解了弹性力学理论求解方法的具体应用;第6章是弹性力学基础理论在空间问题求解中的应用,主要介绍了空间问题的理论求解方法和方法的具体应用;第7章主要讲解最小势能原理和位移变分法,以便为学生以后深入学习弹塑性理论和有限元方法打下必要的理论基础;第8章主要讲解了薄板小挠度弯曲问题的理论求解方法及其应用;第9章以弹性力学平面问题为主,结合弹性力学的基本量和求解方程的矩阵表示方法,以三节点三角形单元为例,介绍了有限单元法的基础理论和基本求解方法,以适当拓宽学生的知识视野。

为了加强实践性教学,并本着便于初学者掌握弹性力学的基本概念、理论和方法,结合工程类专业的特点,和适当拓宽的原则,教材中根据学习需要,选编了适量的和难度合适的例题、习题和思考题。

讲授课程的基本内容,如以平面问题为主,需要30~40课时;若包括空间问题、极小势能原理、薄板小挠度和有限元的问题等内容时,需要60~80课时。

本教材在编写过程中,吸收、引用了部分国内优秀弹性力学教材的观点、例题和习题。编者在此谨向这些文献的作者致以衷心的感谢。

本书在编写和出版过程中,得到了柴金义教授、李宏教授、张志国教授及赵志蒙、王智远等教师的大力支持和帮助,并提出了很多宝贵的意见。同时,教材在出版前的试用过程中,内蒙古大学交通学院04、05、06级土木工程专业学生也提出了大量宝贵的修订意见和建议,在此,

编者向他们表示衷心的感谢。

尽管在几年的教学中发现和纠正了书中不少错误,但由于编者水平有限,疏漏之处在所难免,敬请读者提出宝贵意见,以便进一步修改与完善。

编 者

2009 年 2 月

目 录

第1章 绪论	1
§ 1-1 弹性力学的内容	1
§ 1-2 弹性力学的研究方法	2
§ 1-3 弹性力学的基本假定	3
§ 1-4 弹性力学的基本概念	4
思考题与习题	7
第2章 应力状态分析	9
§ 2-1 平衡微分方程	9
§ 2-2 平面问题中一点的应力状态	11
§ 2-3 空间问题中一点的应力状态	14
§ 2-4 边界条件	17
§ 2-5 圣维南原理	19
思考题与习题	22
第3章 形变协调关系及物理方程	24
§ 3-1 平面问题的几何方程、刚体位移	24
§ 3-2 空间问题的几何方程	26
§ 3-3 形变协调方程	27
§ 3-4 物理方程	29
§ 3-5 解答的唯一性	32
思考题与习题	34
第4章 平面问题直角坐标解法	36
§ 4-1 用直角坐标表示的基本方程	36
§ 4-2 平面问题基本解法概述	37
§ 4-3 直角坐标中按位移求解平面问题	37
§ 4-4 直角坐标中按应力求解平面问题	40
§ 4-5 直角坐标下按应力求解举例	45
§ 4-6 直角坐标解法的特点	60
思考题与习题	61
第5章 平面问题极坐标解法	65
§ 5-1 用极坐标表示的基本方程	65
§ 5-2 应力分量的坐标变换	70
§ 5-3 轴对称平面问题的应力分量和位移分量	70
§ 5-4 极坐标下平面问题求解举例	73
§ 5-5 平面问题极坐标解法的特点	89

思考题与习题	89
第 6 章 空间问题求解及应用举例	93
§ 6-1 空间问题的基本方程	93
§ 6-2 按位移求解空间问题	94
§ 6-3 按应力求解空间问题	95
§ 6-4 轴对称问题的基本方程	96
§ 6-5 空间问题应用举例	99
思考题与习题	113
第 7 章 能量法及其变分原理	115
§ 7-1 弹性体的形变势能和外力势能	115
§ 7-2 极小势能原理及位移变分法	116
§ 7-3 位移变分法	118
§ 7-4 位移变分法应用举例	119
思考题与习题	124
第 8 章 薄板小挠度弯曲问题	126
§ 8-1 概述	126
§ 8-2 等厚度矩形薄板弯曲	128
§ 8-3 薄板弯曲问题的经典解法	135
§ 8-4 圆形薄板的弯曲	139
思考题与习题	144
第 9 章 有限单元法基础	147
§ 9-1 平面问题的基本量及方程的矩阵表示	147
§ 9-2 有限单元法的概念	148
§ 9-3 三角形单元的有限元解答	155
§ 9-4 计算实例	170
思考题与习题	172
附录 A 泛函及变分法基本知识	175
附录 B 应用变分原理推导有限单元法基本方程	180
参考文献	182

第1章 绪 论

§ 1-1 弹性力学的内容

1. 弹性力学的定义

弹性体力学或简称弹性力学,或称为弹性理论,是固体力学的一个重要的分支学科,主要研究固体由于受外力、边界约束或温度改变等因素作用下发生弹性变形时,应力、形变和位移的规律,从而为工程结构及其构件的强度、刚度和稳定性的设计提供理论依据。

弹性力学既是一门重要技术基础课,又是固体力学其他分支学科,如塑性力学、有限单元法、板壳力学、断裂力学、复合材料力学、试验力学等的基础,也是土建(桥梁、水利)、机械、航空等专业课程所必备的理论基础。近年来,弹性力学的研究方法也被用于生物力学和地质力学等边缘学科的研究中,拓展了它的应用范围。

2. 研究对象

弹性力学的研究对象是一般的弹性固体或非杆状的结构,例如短粗杆、板、壳、挡土墙、堤坝、地基等实体结构。对杆状构件作进一步的、较精确的分析,也要用到弹性力学。

3. 研究任务

弹性力学的任务是研究分析各种结构物或其构件在弹性阶段的应力和位移,校核它们的强度、刚度和稳定性,寻求其最优计算方法并加以改进。

4. 弹性力学与其他固体力学的区别

弹性力学课程的主要学习目的是使学生掌握分析弹性体应力和变形的的基本方法,为今后进一步研究实际工程构件和结构的强度、刚度、可靠性、断裂和疲劳等固体力学问题建立必要的理论基础。

1) 弹性力学与材料力学的区别

弹性力学与材料力学的研究内容和基本任务是基本相同的,研究对象也是近似的,而二者的研究方法却有比较大的差别。虽然研究问题的方法都是从静力平衡关系,变形协调和材料的物理性质三方面入手。但是材料力学的研究对象是杆件,且对杆件横截面的变形作了平面假定,综合分析的结果是问题求解的基本方程是常微分方程,对于常微分方程,数学求解是没有困难的。而弹性力学的研究对象是完全弹性体,如板等三维物体。问题分析只能从微分单元体入手,分析单元体的平衡、变形和应力—形变关系,因此,问题综合分析的结果是满足一定边界条件的偏微分方程,得出的结果是比较精确的,并且可用来校核材料力学里得出的近似解答。由于偏微分方程的边值问题,在数学上求解困难重重,除了少数特殊边界问题,一般弹性体问题很难得到解答。弹性力学分析没有平面假设,对研究对象同样要作必要的抽象和简化。

2) 弹性力学与结构力学的区别

结构力学的研究对象为杆件结构,而弹性力学则不研究杆件结构。弹性力学吸收了结构力学中的超静定结构分析方法以后,大大扩展了它的应用范围,使得某些比较复杂的、本来是无法求解的问题,得到了解答。这些解答虽然在理论上具有一定的近似性,但应用在工程上,通常却是足够精确的。在 20 世纪 50 年代中叶发展起来的有限单元法中,把连续弹性体划分成有限大小的单元构件,然后用结构力学里的位移法、力法或混合法求解,更加显示了弹性力学与结构力学综合应用的良好效果。

总之,材料力学、结构力学和弹性力学这三门学科之间的界限不是很明显,更不是一成不变的。我们不应当强调它们之间的分工,而应当更多地发挥它们综合应用的作用,才能使它们更好地为我国的经济建设服务。

§ 1-2 弹性力学的研究方法

弹性力学和其他固体力学的分支学科的研究方法都遵循这样的规律,即将具体的工程结构抽象、简化为力学模型,在此基础上,建立相应的数学模型,并寻找数学方程的求解方法,最后用实践检验其正确与可靠性。在解决具体工程问题时,为了突出问题的力学实质,需要把握主流变化规律,抓住其中的主要因素,引进必要的简化和假设,建立起一种用以代替研究对象的理想化的力学分析模型,即计算简图,进而建立本构关系和求解未知函数。

弹性体的应力、形变研究是对力学参量的量变、质变规律的研究,要依赖数学工具对力学模型相应建立起描述其变化规律的数学方程——即数学模型,从微分单元体分析入手,基本方程为偏微分方程。偏微分方程边值问题在数学上求解较困难,使得弹性力学的基本任务是研究弹性体由于外力荷载或者温度改变时物体内部所产生的位移、变形和应力分布等,为解决工程结构的强度、刚度和稳定性问题作准备,并不直接作强度和刚度分析。

求解弹性力学问题的方法归纳为以下三种。

1. 数学方法

数学方法包括常用的解析法和近似的数值解法。

解析法求解弹性力学问题,从本质上可以视为一个求解内部超静定问题,其求解可归纳为一个直接求解偏微分方程边值的问题,常用的方法为分离变量法,即运用力学概念设法分离变量,将偏微分方程组简化为常微分方程,另外还有级数解法、复变函数解法、积分变换等,其解答为封闭的精确解。解析法在数学上难度极大,仅适用于个别特殊边界条件问题,但它是其他方法的基础。

理论上讲,解析法可以求解任何形状弹性体的边值问题,但是由于问题的复杂性和它的基本方程(偏微分方程边值问题)从数学上求解的困难,使得解析方法的应用较困难,因而其理论(经典的解析方法)直接用于分析工程问题具有很大的局限性。因此,探讨近似解法是弹性力学发展中的特色,也有着重要意义。随着电子计算机的发展,有限差分法、有限单元法、边界单元法、变分法等各种有效的数值计算方法迅速发展起来,为弹性力学的发展和解决工程实际问题开辟了广阔的前景。

2. 实验法

即在弹性力学的理论基础上发展起来的光弹性力学方法、电测法等,为求解弹性力学问题提供了一种有效的途径。

3. 结合的方法

另外一种方法就是数学方法与实验方法相结合的方法。

§ 1-3 弹性力学的基本假定

弹性力学分析中,必须根据已知物理量,通过静力平衡、几何变形和本构关系等,推导和确定基本未知量,即导出位移、应变和应力等与已知物理量的关系——基本求解方程。由于工程实际问题的复杂性是由多方面因素构成的,如果不分主次地考虑所有因素,问题是十分复杂的,数学推导将困难重重,实际上也不可能求解。

因此,必须按照所研究物体的性质以及求解问题的范围,在建立力学模型时,通常概括出决定固体材料弹性形变的本质因素,提出建立宏观形变基本规律的若干基本假定,略去一些影响很小的次要因素,使得在此基础上建立起来的力学计算模型既符合客观实际,又便于数学方法的有效处理,从而使所导出的本构方程的求解成为可能,使研究的问题限制在一个方便可行的范围之内。这对于弹性力学分析是十分必要的。

在今后的问题讨论中,如果没有特别的提示,均采用以下的弹性力学基本假设。

1. 连续性假设

假定物体是连续的,所谓连续性,是指整个物体的体积都被组成这个物体的材料或介质密实无间地填满,不留下任何空隙。这样,就可以认为无论是整个的弹性体或弹性体内部的任何一个单元体以及单元体界面之间,无论在加载之前或变形之后,构成弹性体的材料都是连续的。因此,可以认为物体内的一些物理量,例如应力、形变、位移等也是连续的,可以用位置坐标的连续函数表示它们的变化规律。

实际上,从微观的角度来看,一切物体都是微粒组成的,严格来说,都不符合上述假定。但是,从宏观上可以想见,只要微粒的尺寸以及相邻微粒之间的距离都比物体的尺寸小很多,那么,关于物体连续性的假设,就不会引起显著的误差,当然在宏观上所表现出来的性质是微观统计平均规律。

2. 均匀与各向同性假设

假定物体是均匀的,即整个物体是由同一材料组成的,各点处的材料的力学性质都相同,与各点的空间位置无关;如果物体内一点的各个方向上的材料的性质都相同,即物体的弹性在所有各个方向都相同,则称为各向同性。这样,整个物体的所有各部分才具有相同的弹性,因而物体的弹性才不随位置坐标和方向而变。如钢材的材料含有各向异性的晶体,但由于晶体很微小,而且是随机排列的,所以,钢材构件的弹性(包含无数多微小晶体随机排列时的微观弹性)大致是均匀的和各向相同的,而陶瓷可认为是均匀的和各向同性的。如果物体是由两种或两种以上的材料组成的,例如混凝土,那么,也只要每一种材料的颗粒远远小于物体而且在物体内部均匀分布,这个物体就可以当作是均匀和各向同性的。但是竹、木等纤维材料以及现代的复合材料等,其力学性质随方向不同而有明显差异,即为各向异性材料。

3. 完全弹性假设

假定物体是完全弹性的。所谓弹性,指的是“物体在引起形变的外力消除以后能恢复原

形”这一性质。所谓完全弹性,是指物体能完全恢复原形而没有任何残余形变。这样的物体在任一瞬时的形变就完全决定于它在这一瞬时所受的外力,与它过去的受力情况无关。

由材料力学已知:塑性材料物体,在应力未达到屈服极限以前,是近似的完全弹性体;脆性材料的物体,在应力未超过比例极限以前,也是近似的完全弹性体。在弹性力学中,这一假定还包含形变与引起形变的应力成正比的含义,即两者之间是有理想的线性关系的,这个线性关系完全服从胡克定律,并且弹性常数不随应力或形变的大小而变。应力与形变的线性关系服从胡可定律的材料,称为线弹性材料或线弹性体;另外一些材料(如橡胶、混凝土等)的应力与应变的关系为非线性的,则称为非线性弹性体。

凡是符合以上三个假定的物体,就称为**理想弹性体**。

材料的应力与应变关系称为**本构关系**,它表达的是材料在外力作用下抵抗变形的物理性能,因此又称为物理关系或者物理方程。本构关系满足完全弹性假设的材料模型包括线性弹性体和非线性弹性体。

线性弹性体是指荷载作用在一定范围内,应力和应变关系可以近似为线性关系的材料,外力卸载后,线性弹性体的变形可以完全恢复。线性弹性材料的本构关系就是物理学的胡克定理。在应力小于弹性极限条件下,低碳钢等金属材料是典型的线弹性材料。另外,一些有色金属和高分子材料等,材料在荷载作用下的应力应变关系不是线性的,但是卸载后物体的变形可以完全恢复,这种材料的性质可以简化为非线性弹性本构关系。

4. 小变形假设

假定物体受力以后,整个物体所有各点的位移都远远小于物体原来的尺寸,而且形变和转角都远小于1。这样,在建立物体变形以后的平衡方程时,就可以方便地用变形以前的尺寸来代替变形以后的尺寸,而不致引起显著的误差;并且,在考察物体的形变与位移的关系时,转角和应变的二次以上次幂或其乘积相对于其本身都可以略去不计。如,对于微小转角 α ,有 $\cos\alpha \approx 1$, $\sin\alpha \approx \alpha$, $\tan\alpha \approx \alpha$;对于微小的正应变 ε_x ,有 $1/(1+\varepsilon_x) \approx 1$,等等。这样,弹性力学里的几何方程和平衡微分方程都简化为线性方程。在上述这些假定下,弹性力学问题都化为线性问题,从而可以应用叠加原理。本书中讨论的问题,都是理想弹性体的小变形问题。

5. 初始无应力、应变的假设

假定弹性体在未受荷载等因素作用之前处于一种无应力和应变的状态,称为“初始无应力、应变的状态”。实际弹性体内部都不可避免地存在着初应力和初应变,例如金属材料构件要经过冷轧、热处理、焊接等各种加工过程而成形,在受荷载作用之前其内部已经存在着加工过程中形成的初应力和初应变;此外由于结构物的制造和装配误差,也会使物体产生初应力和初应变。但这些初应力和初应变在建立弹性力学的计算模型时被看作是次要的因素,可不予考虑。实践证明,在弹性力学问题中,“初始无应力、应变的假设”是合理也是必要的。

§ 1-4 弹性力学的基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念:外力、应力、形变和位移。

1. 外力

来自弹性体外部的作用力或约束反力就是外力。根据作用的方式,将作用于物体的外力

分为体积力、表面力,分别简称为体力和面力。

(1) 体力,是指分布在物体整个体积内的外力,例如重力、惯性力、磁场中的磁力等,物体内部各点所受体力一般是不相同的。

为了表明物体在某一点 P 所受体力的方向和大小,在该点取包含 P 点的物体内的微分体(即一小部分),它的体积为 ΔV ,如图 1-1a)。设作用于 ΔV 的体力为 ΔF ,则体力的平均集度为 $\Delta F/\Delta V$ 。如果把所取的微分体不断减小,即 ΔV 不断缩小,则 ΔF 和 $\Delta F/\Delta V$ 都将不断地改变大小、方向和作用点。命 ΔV 无限减小而趋于 P 点,假定体力为连续分布,则 $\Delta F/\Delta V$ 将趋于一定的极限 f ,即

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta V} = f$$

这个极限矢量 f 就是该物体在 P 点所受体力的集度。因为 ΔV 是标量,所以 f 的方向就是 ΔF 的极限方向。矢量 f 在坐标轴 x, y, z 上的投影 f_x, f_y, f_z 称为该物体在 P 点的体力分量,以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负。它们的量纲是 $L^{-2}MT^{-2}$ 或 $[\text{力}][\text{长度}]^{-3}$ 。

(2) 面力,是指分布在物体表面上的外力,例如液体压力、风力和物体之间的接触力等。物体表面上各点所受面力的情况一般是不相同的。

为了表明物体在表面上某一点 P 所受面力的方向和大小,在该点取物体表面包含 P 点的微分面积 ΔS ,如图 1-1b)。设作用于 ΔS 的面力为 ΔF ,则面力的平均集度为 $\Delta F/\Delta S$ 。命 ΔS 无限缩小而趋于 P 点,假定面力为连续分布,则 $\Delta F/\Delta S$ 将趋于一定的极限 $\bar{f}$,即

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \bar{f}$$

这个极限矢量 $\bar{f}$ 就是物体在 P 点所受的面力集度。因为 ΔS 是标量,所以 $\bar{f}$ 的方向就是 ΔF 的极限方向。矢量 $\bar{f}$ 在坐标轴 x, y, z 上的投影 $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$, 称为该物体在 P 点的面力分量,以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负。它们的量纲为 $L^{-1}MT^{-2}$ 或 $[\text{力}][\text{长度}]^{-2}$ 。

因为弹性力学的研究对象是在外力作用下处于平衡时的任意弹性变形固体,所以,作用在弹性体上的外力通常是已知的。

2. 内力

在外力等因素作用下,物体内部或不同部分之间将产生相互作用,即产生“附加的内部抵抗力”,简称为内力。与材料力学相同,确定内力的方法是截面法。为讨论弹性体的强度,将单位面积的内力,即内力的集度定义为应力。

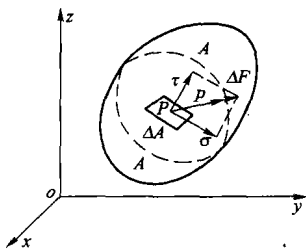


图 1-2 应力的定义

如图 1-2, 设任意形状的物体在外力等因素作用下处于平衡状态, 假设用经过 P 点的一个截面 mn , 将该物体分为 A 和 B 两部分, 而将 B 部分移去, 移去的部分 B 将在截面 mn 上对留下的部分 A 作用一定的内力。在截面 mn 上取包含 P 点的微分面积 ΔA 。设作用于 ΔA 上的内力为 ΔF , 则内力的平均集度, 即平均应力为 $\Delta F/\Delta A$ 。命 ΔA 无限缩小而趋于 P 点, 假定内力连续分布, 则 $\Delta F/\Delta A$ 将趋于一定的极限 p , 即

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = p$$

这个极限矢量 p 就是物体在截面 mn 上的 P 点的应力。因为 ΔA 是标量, 所以应力 p 的方向就是 ΔF 的极限方向。

可见, 凡是应力均必须说明是物体哪一点, 并且通过该点哪一个微分面的应力。

应力及其分量的量纲是 $L^{-1}MT^{-2}$ 或 [力]/[长度]⁻²。

对于应力, 除了在推导某些公式的过程中以外, 通常都用它沿坐标轴方向的分量, 因为这些分量与物体的形变或材料强度都没有直接的关系。与物体的形变和材料强度直接相关的, 是应力在其作用截面的法线方向及切线方向的分量, 也就是正应力 σ 及剪应力 τ 。

可见, 经过物体内的同一点 P 的不同截面上的应力是不同的。为了分析这一点的应力状态, 在这一点从物体内部取出一个微小的正平行六面体, 即单元体, 如图 1-3a) 所示, 它的棱边分别平行于三个坐标轴, 而长度为 $PA = dx$ 、 $PB = dy$ 、 $PC = dz$, 如图 1-3b)。假定单元体各截面上的应力是均匀分布的, 并将每一面上的应力矢量分解为一个正应力和两个剪应力, 它们分别与三个坐标轴平行。正应力用 σ 表示。为了表明这个正应力的作用面和作用方向, 在正应力 σ 上加上下标字母。例如, 正应力 σ_x 是作用在垂直于 x 轴的面上, 同时也是沿着 x 轴的方向作用的。剪应力用 τ 表示, 在剪应力 τ 上加上下标字母, 第一个下标字母表明作用面垂直于哪一个坐标轴, 第二个下标字母表明作用方向沿着哪一个坐标轴。例如, 剪应力 τ_{xy} , 是作用在垂直于 x 轴的面上而沿着 y 轴方向作用的。

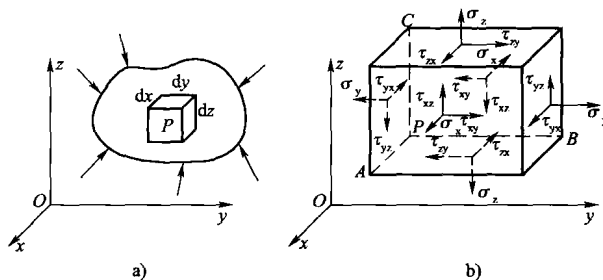


图 1-3 微分单元体及一点的应力状态

对应力分量的正负号具体规定为:

(1) 如果某单元体截面的外法线是沿着坐标轴的正方向, 则这个截面就称为一个正面, 正面上的应力分量以沿坐标轴正方向为正, 沿坐标轴负方向为负。

(2) 如果某一个截面的外法线是沿着坐标轴的负方向, 则这个截面就称为一个负面, 负面上的应力分量以沿坐标轴负方向为正, 沿坐标轴正方向为负。图 1-3b) 所示的应力分量全都是按正的画出。

注意, 虽然上述正负号的规定, 对于正应力来说, 和材料力学中的规定相同 (拉应力为正而压应力为负), 但是, 对于剪应力来说, 却和材料力学中的规定不完全相同。

可见, 在物体内任意点 P 处的应力分量有九个, 其中, 三个正应力分量、六个剪应力分量。六个剪应力分量之间具有一定的互等关系。例如, 以与 x 轴平行的连接六面体前后两面中心的直线 ab 为矩轴, 列出力矩平衡方程 $\sum M_x = 0$, 得

$$2(\tau_{yz} dz dx) dy / 2 - 2(\tau_{xy} dy dx) dz / 2 = 0$$

同理, 可以列出 $\sum M_y = 0$ 和 $\sum M_z = 0$, 简化以后, 得出

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

这就证明了剪应力互等定理:作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的剪应力是互等的(大小相等,正负号也相同)。因此,剪应力记号的两个下标字母可以对调。

在这里,我们没有考虑应力由于位置不同而应有的改变,也就是把六面体中的应力当作均匀应力,而且也没有考虑体力的作用。但要注意,即使考虑到应力的变化和体力的作用,仍然可以推导出剪应力的互等性。

附带指出,如果采用材料力学中的正负号规定,则剪应力的互等性将表示成为 $\tau_{zy} = -\tau_{yz}$ 、 $\tau_{zx} = -\tau_{xz}$ 、 $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$,显然,不如采用上述规定来得简单。但必须明确,在利用莫尔圆(应力圆)时,就必须采用材料力学中的规定。

3. 形变

形变就是形状的改变。物体的形状总可以用它各部分的长度和角度来表示。因此,物体的形变总可以归结为长度的改变和角度的改变。

为了分析物体在其某一点的形变状态,在这一点沿着坐标轴的正方向取三个微小的线段 PA 、 PB 、 PC ,如图 1-3b)。物体变形以后,这三个线段的长度以及它们之间的直角一般都将有所改变。

(1)各线段的每单位长度的伸缩,即单位伸缩或相对伸缩,称为线应变,亦称正应变,用字母 ε 表示。 ε_x 表示 x 方向的线段 PA 的线应变,其余类推。线应变以伸长时为正,缩短时为负,与正应力的正负号规定相一致。

(2)各线段之间的直角的改变,用弧度表示,称为切应变。用字母 γ 表示。 γ_{yz} 表示 y 与 z 两方向的线段(即 PB 与 PC)之间的直角的改变,其余类推。切应变以使直角变小时为正,变大时为负,与剪应力的正负号规定相一致。

线应变和切应变都是量纲为 1 的量,或无量纲的量。

4. 位移

位移是指位置的移动。物体内任意一点 P 的位移,用它在 x 、 y 、 z 三轴上的投影 u 、 v 、 w 来表示,以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负。这三个投影称为该点的位移分量。位移分量的量纲是 L 或[长度]。

一般而论,弹性体内任意一点的体力分量、面力分量、应力分量、形变分量和位移分量,都是随着该点的位置而变的,因而都是位置坐标的函数。

思考题与习题

1-1 举例说明什么是均匀的各向异性体、非均匀的各向同性体、非均匀的各向异性体。

1-2 一般的混凝土构件和钢筋混凝土构件能否作为理想弹性体?一般的岩质地基和土基能否作为理想的弹性体?

1-3 各基本假设在弹性力学解决问题中有何用途?

1-4 应力和面力的符号规定有何异同?试分别画出单元体上正面和负面上的正的应力和正的面力的方向。

1-5 比较弹性力学和材料力学中关于剪应力的符号规定。

1-6 什么是形变与位移?其正负号是如何规定的?

1-7 试举例说明正的应力对应于正的形变。

1-8 选择题

(1) 关于弹性力学的正确认识是_____。

- A. 计算力学在工程结构设计中的作用日益重要;
- B. 弹性力学从微分单元体入手分析弹性体, 因此与材料力学不同, 不需要对问题作任何假设;
- C. 任何弹性变形材料都是弹性力学的研究对象;
- D. 弹性力学理论像材料力学一样, 可以没有困难地应用于工程结构分析。

(2) 弹性力学与材料力学的主要不同之处在于_____。

- A. 任务;
- B. 研究对象;
- C. 研究方法;
- D. 基本假设。

(3) 所谓“完全弹性体”是指_____。

- A. 材料应力应变关系满足胡克定律;
- B. 材料的应力应变关系与加载时间历史无关;
- C. 本构关系为非线性弹性关系;
- D. 应力应变关系满足线性弹性关系。

第2章 应力状态分析

弹性力学理论的基本方程是从静力学、几何学和物理学三个方面出发建立的。本章从微分体的静力平衡条件方面入手,建立弹性体的平衡微分方程;分析一点的应力状态,建立应力边界条件和位移边界条件。这两类方程均与材料性质无关,属于普遍通用方程。

§ 2-1 平衡微分方程

严格来说,所有工程问题在力学求解时都属于三维空间问题,即所有的力学行为都是在空间内发生的。但是,在一些工程问题中,结构的形状、约束和受力特点情况都具有一定的特点,经过适当的简化和抽象化处理,可以转化为“平面问题”,即所有的力学行为可以看作是在二维平面内发生的,这样不但可使计算工作大为简化,同时,解答的精度能满足工程需要。下面从弹性体内一点的平衡状况入手,通过平衡条件导出平衡微分方程。

1. 平面问题的平衡微分方程

平衡微分方程是从静力学方面出发,在平面问题的弹性体内取出微分正六面体,根据其平衡条件导出应力分量与体力分量之间的关系,即平面问题的平衡微分方程。

弹性体在外力作用下产生变形,最后达到平衡位置。而平衡不仅是指整个物体,而且弹性体的任何部分或一点也是平衡的。

如图 2-1 所示的从平面问题的弹性体中取出的微分正六面体,它在 x 、 y 方向的尺寸分别为 dx 、 dy ,为了计算方便,在 z 方向的尺寸取为 1 个单位长度。

另外,应力分量是位置坐标 x 和 y 的函数,作用于左右两面或上下两面的应力分量具有微小的差量。例如,作用于左面的正应力为 σ_x ,由于在右面的 x 坐标发生了 dx 改变量,于是作

用于右面的正应力将是 $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} dx^2 + \dots$,略去二阶及以上的微量后,则右面的正

应力是 $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ 。同理,对其他面上应力作同样的处理,如图

2-1 所示。

因为六面体是微分体,所以,它在各面上所受的应力可认为是均匀分布的,并作用在对应面的中心;微分六面体上所受的体力,也可看作是均匀分布的,作用在单元体的体积中心。

(1) 从力矩平衡方程(对六面体形心取矩)可以导出剪应力互等定理,即

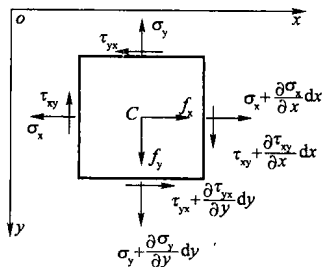


图 2-1 平面问题微分体应力分量

$$\sum M_c = 0$$

$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \times 1 \times dx/2 + \tau_{xy} dy \times 1 \times dx/2 - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dy \right) dx \times 1 \times dy/2 + \tau_{yx} dx \times 1 \times dy/2 = 0$$

注:在建立这一方程时,我们用了小变形假设,即用了弹性体变形以前的尺寸,而没有用平衡状态下的、变形后的尺寸。以后建立任何平衡方程时均作同样的处理,不再加以说明。将上式整理后得

$$\tau_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx = \tau_{yx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dy$$

略去微量不计,得出

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2-1)$$

(2) 以 x 轴为投影轴,列出力的投影平衡方程 $\sum F_x = 0$, 得

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy \times 1 - \sigma_x dy \times 1 + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \times 1 - \tau_{yx} dx \times 1 + f_x dx dy \times 1 = 0$$

对上式整理以后得

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0$$

同理,由平衡方程 $\sum F_y = 0$ 得到另一个相似的方程。于是得出平面问题中应力分量和体力分量之间的关系式,即平面问题中的平衡微分方程。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

这两个微分方程中包含着三个独立的未知函数 σ_x 、 σ_y 、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, 因此,确定应力分量的问题是超静定的,而且必须考虑变形和位移等关系,才能解决问题。

平衡微分方程描述弹性体内部任意一点的平衡,确立了应力分量与体力之间的微分关系,是弹性力学的第一个基本方程,又称为纳维(Navier)方程。

注:①在讨论微分单元体平衡时,考虑到坐标的微小变化将导致应力分量的相应改变。即坐标有增量时,应力分量也有对应的增量。这个增量作为高阶小量,如果不涉及微分单元体平衡时是可以不考虑的。

②在六面体上,一般还有作用在前后两面的正应力,但由于他们自成平衡,完全不影响平面问题平衡方程的建立。

③平衡微分方程表示了区域内任意一点的微分体的平衡条件,从而必然保证任一有限大部分和整个区域内是满足平衡条件的。因此,这样考虑的静力学条件是严格和精确的。

④平衡方程与弹性体材料无关。

2. 空间问题的平衡微分方程

如图 2-2 所示,为了考察弹性体内部的平衡,讨论通过任意一点的微分体单元的平衡,在弹性体内,通过任意点 P ,用三组与坐标轴平行的平面截取一正六面体单元,单元体的棱边分别与 x 、 y 、 z 轴平行,棱边长分别为 dx 、 dy 、 dz 。

与平面问题相似,因为应力分量一般情况下是位置坐标的函数,故作用在六面体两对面的应

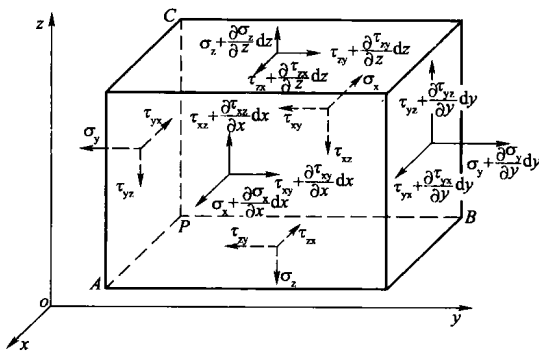


图 2-2 空间问题微分体应力分量