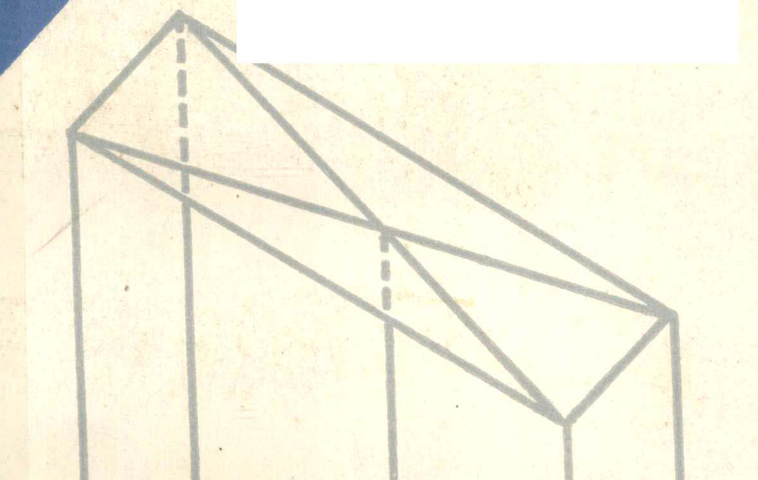
平面几何
一题多解
指南

王书 主编



電子工業出版社

平面几何一题多解指南

主编　王　书

编著　王　书　张东海　王典鸿

電子工業出版社

内 容 简 介

本书紧密结合初中平面几何课本内容，帮助读者在理解基本知识的基础上，开阔视野，启迪思维。内容编排循序渐近，结构新颖。每部分开头指出证明此类题的规律性，而后通过例题进行阐述。全书收集数百道例题，每题都从不同角度和用不同方法列出几种至十多种解法，这些解法注重思路分析和解题规律性的小结。帮助读者领悟要点，掌握解题规律。全书共四章。

本书适于在校初中师生、自学青年和学生家长阅读。

平面几何一题多解指南

主 编　王 书

责任编辑　嵇楚

*

电子工业出版社出版（北京市海淀区万寿路）

电子工业出版社发行　各地新华书店经销

北京密云华都印刷厂印装

*

开本：787×1092毫米 1/32 印张：12.75 字数：250千字

1989年8月第一版　1989年11月第一次印刷

印数：1—7000册　定价：3.95元

ISBN 7-5053-0675-8/G·85

前　言

培养正确迅速的运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力，以及分析问题和解决问题的能力，是中学数学教学的一项重要任务。要完成这一任务，必须演算一定数量的题目。不少自学青年和学生在演算习题时，往往只追求数量，而不顾质量。这样尽管用了不少时间、费了很大精力，但总因缺少有目的的总结、归纳，抓不住基本解题规律而收效甚微。

长期的教学实践使我们体会到："练不在于多，而在于精"，恰当而又适量地采用一题多解的方法，进行思路分析，探讨解题规律和对习题的多角度"追踪"，能以少胜多地巩固基础知识，提高分析问题和解决问题的能力，从而掌握基本的解题方法和技巧。为此，我们总结多年来从事数学教学，特别是指导初中生复习的经验，写成了这本《平面几何一题多解指南》。在编写本书时，我们力求做到以下几点：

1．紧密配合初中平面几何的教学内容，帮助读者在理解课本知识的基础上开阔视野、启迪思维。

2．内容编排循序渐进、结构新颖，每部分开头指出证明此类题的规律性，而后通过例题进行阐述，对编入本书的每道习题的多种解法，注重思路的分析和解题规律的小结，以帮助读者从中领悟要点，掌握解平面几何题的常用方法及基本解题规律。

第一章、第二章、第四章和第三章的部分内容由王书编写，张东海、王典鸿编写了第三章的部分内容，全书由王书

修改定稿。张东海同志做了书稿的抄清工作。

由于水平有限，不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

目　录

第一章　解平面几何题常用的方法和技巧

数学是研究空间形式及数量关系的学科，也就是说，数学研究的对象是“形”和“数”．而平面几何的研究侧重于“形”，它是研究平面图形的性质的科学．

由于几何内容的表现形式，以及研究几何方法的特殊性，初学平面几何的同学，总感到平面几何难学，特别是对几何证明题，不知从何处入手，找不出证题的思路和方法．为了迅速正确地解平面几何题，下面一些常用的解题方法和技巧应熟练掌握．

一、分析综合法

解几何题的思维方法有二个，一是由因导果，即由已知推向所求；二是执果索因，即由所求出发，逆推到已知的事实为止。前者为综合法，后者为分析法．在平面几何题的证明中，这两种方法多是交织在一起使用的，用分析法思考证明的思路，用综合法表述证明的过程．

我们来看下面的例题：

［例1］　四边形$ABCD$内接于$\odot O$，$AC\perp BD$，$OE\perp AB$于E．求证：

$$OE=\frac{1}{2}CD.$$

用分析法探索证明的思路如下．

如图1-1，由$OE\perp AB$，可知E是AB的中点，故作直径AG，连GB，则 $OE=\frac{1}{2}GB$.

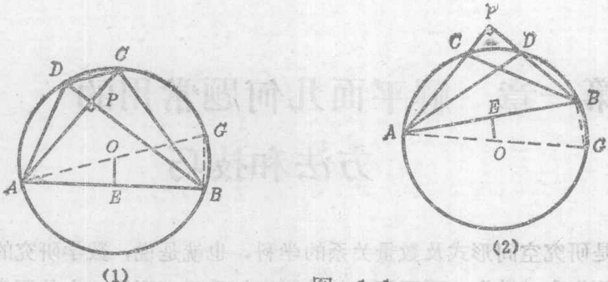


图 1-1

于是，要证 $OE=\frac{1}{2}CD$，只须证 $GB=CD$。

但 GB 与 CD 同为 $\odot O$ 的弦，

因此，要证 $GB=CD$，可改为证 $\angle BAG=\angle CAD$.

设 P 是 AC 与 BD 的交点，则由题意知，

$\angle APD=90^\circ$.

又 $\angle ABG=90^\circ$,

因此，要证 $\angle BAG=\angle CAD$,

只要能证明 $\angle AGB=\angle ADP$ 就行了.

然而，这两个角是同弧上的圆周角，因此，这两个角的相等是显然的.

用综合法表述证明过程如下：

作直径 AG，连 GB，

则 $\angle ADB=\angle AGB$,

$\angle APD=\angle ABG=90^\circ$,

$\therefore\ \angle BAG=\angle CAD$, $\quad\therefore\ CD=BG$.

又 $\because O$ 为圆心，$OE\perp AB$，可知 E 为 AB 中点，

$\therefore\ OE=\frac{1}{2}BG$, $\quad\therefore\ OE=\frac{1}{2}CD$.

由例1可看出，分析法利于思考，综合法利于表述。在解决问题时，

通常先用分析法寻求解法，而后用综合法有条有理地表述出来。因此，在证题时．我们一般将这两种方法合并使用，而且用分析法寻求解法的思维过程我们也不写出来．

二、反 证 法

反证法是从否定命题的结论出发，通过正确的推理、论证，产生了与题设或已知的公理、定理相矛盾的情形．这种矛盾的产生，并不是推理上有逻辑错误，因而只能归咎于否定结论的假定是错误的，从而断定命题结论正确无误．

［例2］ 在四边形$ABCD$中，E、F分别是AD、BC的中点，且

$EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$（图1-2）．

［求证］ $AB \parallel CD$．

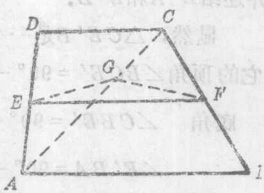


图 1-2

用反证法证明如下：

假设AB不平行于CD．连结AC，取它们的中点G，并连结EG和FG．

由于E、F分别是AD、BC的中点，

则有$GE \parallel CD$，$GF \parallel AB$．

由此可见，E、G、F三点不在一条直线上。于是$EF<GE+GF$．

但 $GF=\frac{1}{2}AB$，$GE=\frac{1}{2}CD$，因此，

$$EF<\frac{1}{2}(AB+CD)．$$

这与假设$EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$相矛盾，

故有 $AB \parallel CD$．

在平面几何题的证明中，反证法也是一种常用的方法．在一些证明中，用分析、综合法有困难时，采用反证法却行之有效．

三、同 一 法

当证明某个图形具有某种特性而不易直接证明时，我们可先作一个具有某种特性的图形，然后证明所作的与题设的是一个图形。这种证明方法叫同一法。

［例3］ 设$ABCD$为正方形（图1-3），$\angle EAB=\angle EBA=15°$．

［求证］ $\triangle ECD$是正三角形．

用同一法证明如下：

在正方形$ABCD$内作正三角形$E'DC$，并连结$E'A$和$E'B$．

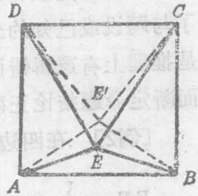


图 1-3

显然，$\triangle CE'B$是一个等腰三角形，它的顶角$\angle BCE'=90°-60°=30°$，

底角 $\angle CBE'=90°-\frac{1}{2}\angle BCE'=90°-15°=75°$于是

$\angle E'BA=90°-75°=15°$．

同理 $\angle E'AB=15°$．

由此可见E'同E实际是同一个点，

则$\triangle ECD$自然为正三角形了。

四、归纳法

归纳法是由特殊事例推出一般结论的一种方法．用归纳法证平面几何题时，要将题设的各种可能情形一一加以证明，然后总括起来推断所证结论的普遍性．

［例4］ 在四边形$ABCD$中，

已知$AC\perp BD$，

［求证］ $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$

证明：由于四边形有凸的、凹的和折的三种，我们分下面三种情

形证明。

1．设四边形$ABCD$是凸的（如图1-4），令AC和BD的交点为O，由于$AC\perp BD$，则有

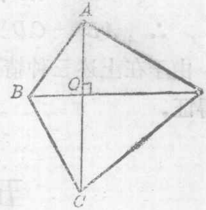


图 1-4

$$OA^2+OB^2=AB^2,$$
$$OC^2+OD^2=CD^2,$$
$$OB^2+OC^2=BC^2,$$
$$OA^2+OD^2=AD^2,$$

则有 $AB^2+CD^2=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2,$

$BC^2+AD^2=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2.$

$\therefore\ AB^2+CD^2=BC^2+AD^2.$

2．设四边形是凹的（如图1-5），延长AC与BD连线 相交于O，则

$AO\perp BD$。

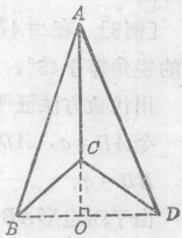


图 1-5

由于 $AB^2=AO^2+BO^2,$

$AD^2=AO^2+OD^2,$

$BC^2=OC^2+OB^2,$

$CD^2=OC^2+OD^2.$

则 $AB^2+CD^2=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2,$

$BC^2+AD^2=OA^2+OD^2+OC^2+OB^2,$

$\therefore\ AB^2+CD^2=BC^2+AD^2.$

3．设四边形为折的（如图1-6）

连结AC、BD并分别延长相交于O，

则 $AO\perp BO$。

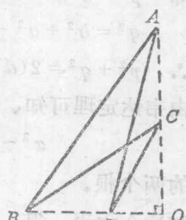


图 1-6

由于 $AB^2=AO^2+BO^2,$

$CB^2=CO^2+BO^2,$

$AD^2=AO^2+OD^2,$

$CD^2=OC^2+OD^2.$

则有 $AB^2+CD^2=AO^2+CB^2+OC^2+OD^2,$

$$BC^2+AD^2=CO^2+BO^2+AO^2+OD^2,$$

$$\therefore\quad AB^2+CD^2=BC^2+AD^2.$$

由于在上述三种情形下，$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$均成立，故问题得证。

五、代数证法

证题时，先列出各量间的关系式，然后利用代数方法进行推算，这种证法叫几何题的代数证法.当题中涉及的量较多时，一般可采用此种方法.

［例5］ 在▱$ABCD$中，若$AC^2\cdot BD^2=AB^4+AD^4$，则这个四边形的锐角等于45°。

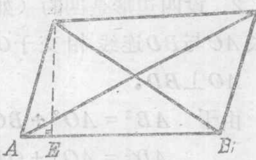


图 1-7

用代数方法证明如下：

令$AB=a$，$AD=b$，$AC=p$，

$BD=q$.

由于四边形$ABCD$为平行四边形，

则$\angle A+\angle B=180°$，$\cos A=-\cos B$.

$$\therefore\quad AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B,$$

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos A,$$

即 $p^2=a^2+b^2-2ab\cos B$,

$q^2=b^2+a^2-2ab\cos A$,

$\therefore\quad p^2+q^2=2(a^2+b^2)$. 又$p^2\cdot q^2=a^4+b^4$，

由韦达定理可知，p^2、q^2为方程

$$x^2-2(a^2+b^2)x+a^4+b^4=0$$

的两个根.

解这个方程，得 $x=a^2+b^2\pm ab\sqrt{2}$.

由题设$\angle A$为锐角，因而$\angle B$是钝角，可见$q<p$，

那么 $q^2=a^2+b^2-ab\sqrt{2}$. ①

另外，作$DE\perp AB$于E，令$AE=b'$，

则　　　　　$q^2=a^2+b^2-2ab'$.　　　　　②

由①和②，可得　$b\sqrt{2}=2b'$

$$\frac{AE}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore\quad \angle A=45^\circ.$$

［例6］　在等腰直角三角形ABC的斜边BC上任取一点P，作$PQ\parallel AB$交AC于Q，作$PR\parallel CA$交BA于R，D是BC的中点，

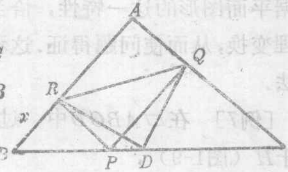


图　1-8

［求证］　$\triangle RDQ$也是等腰直角三角形。

证明　如图1-8，

设　$BR=x$，$AB=a$，

则$DR^2=x^2+\frac{1}{2}a^2-2\cdot x\cdot\frac{\sqrt{2a}}{2}\cos45^\circ$，

$$=x^2+\frac{1}{2}a^2-ax.$$

$$DQ^2=(a-x)^2+\frac{1}{2}a^2-2(a-x)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\cos45^\circ$$

$$=x^2+\frac{1}{2}a^2-ax.$$

$\therefore$　$DR^2=DQ^2$，　即$DR=DQ$.

又　$DR^2+DQ^2=2x^2-2ax+a^2$，

$RQ^2=(a-x)^2+x^2=2x^2-2ax+a^2$，

$\therefore$　$RQ^2=DR^2+DQ^2$，

$\therefore$　$\angle RDQ=90^\circ$，

$\therefore$　$\triangle DRQ$为等腰直角三角形。

六、平面几何题的面积证法

对平面上一个几何图形，如果存在确定的面积，则面积是唯一的．根据平面图形的这一特性，恰当地应用有关面积的一些关系式，进行推理变换，从而使问题得证．这种证法，我们称为平面几何题的面积证法．

［例7］ 在▱$ABCD$中，过A和C作两条直线，使$AE=CF$，且交于H（图1-9），

［求证］ BH平分$\angle AHC$．

用面积法证明如下：

连BE、BF，

作$BQ\perp AE$，$BG\perp CF$，

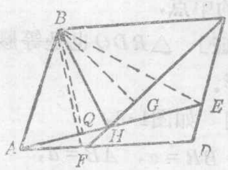


图 1-9

$$\left.\begin{array}{r}\text{则}S_{\triangle ABE}=\dfrac{1}{2}\square ABCD\\[2ex] S_{\triangle BCF}=\dfrac{1}{2}\square ABCD\end{array}\right\}\Rightarrow S_{\triangle ABE}=S_{\triangle BC}$$

$$\left.\begin{array}{c}\Rightarrow\dfrac{1}{2}AE\cdot BQ=\dfrac{1}{2}CF\cdot BG\\ AE=CF\end{array}\right\}\Rightarrow BQ=BG.$$

$$\left.\begin{array}{l}BQ=BG\\ BQ\perp AH,\ BG\perp CF\end{array}\right\}\Rightarrow\angle BHA=\angle BHC.$$

即BH平分$\angle AHC$．

［例8］ 已知：在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，$BD\perp AC$，$CE\perp AB$（图1-10）．

［求证］ $BD>CE$

证明：

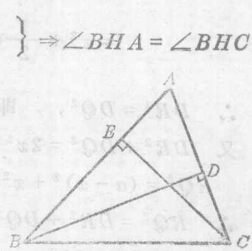


图 1-10

$$\left.\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}BD\cdot AC \\ S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}AB\cdot EC \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} BD\cdot AC = AB\cdot EC \\ AB > AC \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow BD > EC$$

由上二例可看出，用面积法既可以证相等关系，也可以证明不等关系。用面积法证题直观易懂，对一些几何证明能起到化难为易的作用。因此，用面积法证明几何题也是一种重要的方法。

七、平面几何题的三角证法

根据图形的性质，把图形中边和角的关系转化为三角函数的关系式，经恒等变形逐步推导出所要求的结论，这种方法我们称为平面几何题的三角证法。

［例9］ 从圆上一点P作弦AB的垂线，垂足为C。过P作圆的切线L，过A、B分别作L的垂线，垂足为D和E，

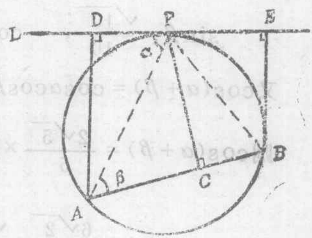


图 1-11

［求证］ $PC^2 = AD\cdot BE$.

证明 如图1-11，连结PA、PB。设$\angle DPA = \alpha$，$\angle PAB = \beta$。

则 $\angle PBA = \angle DPA = \alpha$，$\angle BPE = \angle PAB = \beta$，

在$Rt\triangle PAD$中，$AD = AP\sin\alpha$； ①

在$Rt\triangle PAC$中，$PC = AP\sin\beta$； ②

在$Rt\triangle PBE$中，$BE = PB\sin\beta$； ③

在$Rt\triangle PCB$中，$PC = PB\sin\alpha$. ④

②×④，得

$$PC^2 = AP\cdot PB\cdot \sin\alpha\sin\beta \quad ⑤$$

①×③，得

$$AD \cdot BE = AP \cdot PB \sin\alpha \cdot \sin\beta \quad ⑥$$

由⑤、⑥，得

$$PC^2 = AD \cdot BE.$$

［例10］ 矩形$ABCD$是由三个全等的正方形联成，求证
$\angle AFB + \angle ACB = 45°$.

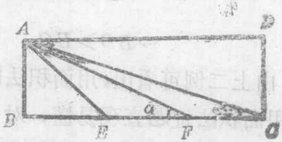


图 1-12

［证明］ 设$\angle AFB = \alpha$,
$\angle ACB = \beta$,
再设$AB = a$，则$BF = 2a$,
$BC = 3a$,

$$AF = \sqrt{5}\,a,\quad AC = \sqrt{10}\,a.$$

$$\therefore \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5},\quad \cos\alpha = \frac{2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2}{5}\sqrt{5},$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{10}}{10},\quad \cos\beta = \frac{3a}{\sqrt{10}a} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

又$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$则\cos(\alpha+\beta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10} - \frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$= \frac{6\sqrt{2}}{10} - \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\because$ α、β均为锐角，

$\therefore$ $0° < \alpha+\beta < 180°$,

故 $\alpha+\beta = 45°$,

即$\angle AFB + \angle ACB = 45°$.

用三角法解题，有许多优点，第一章已介绍，这里就不再讲了。

八、平面几何题的解析证明

把一道平面图形放置到平面直角坐标系内进行证明的方法，叫做

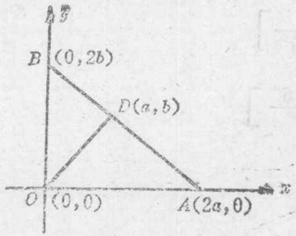


图 1-13

平面几何题的解析证法。平面直角坐标系是把平面几何问题化为代数问题的桥梁。用解析法证几何题，关键是选择合适的坐标系，对各点确定合适的坐标，把题设和结论用代数方法表示出来，再用代数方法从题设推出结论。

[例11] 求证：直角三角形斜边上的中线等于斜边长的一半。

[证明] 以直角三角形OAB的直角顶点O为原点，两直角边所在的直线为两轴建立直角坐标系（图1-13）。

设A、B的坐标分别为$A(2a,0)$、$B(0,2b)$。

根据中点坐标公式，斜边的中点D的坐标为

$$D\left(\frac{2a+0}{2},\ \frac{0+2b}{2}\right)，即 D(a,\ b)$$

再根据两点距离公式，斜边上中线OD的长为

$$OD=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

斜边AB的长为

$$AB=\sqrt{(2a-0)^2+(0-2b)^2}=\sqrt{4(a^2+b^2)}=2\sqrt{a^2+b^2},$$

因此得，$OD=\dfrac{1}{2}AB$.

又如本章例3，如用解析法证明，则有下面的形式：

以AB所在的直线及AB的中垂线为x轴y轴，取直角坐标系，如图1-14，设正方形长为$2a$，则各点的坐标为：$A(-a,\ 0)$，$B(a,\ 0)$，$C(a,\ 2a)$，$D(-a,\ 2a)$，$E(0,\ a\text{tg}15°)$.

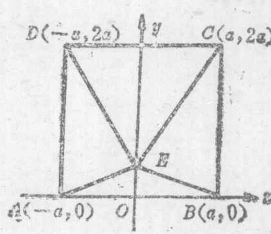


图 1-14

$$\therefore\quad DE^2=(-a)^2+(2a-a\text{tg}15°)^2$$