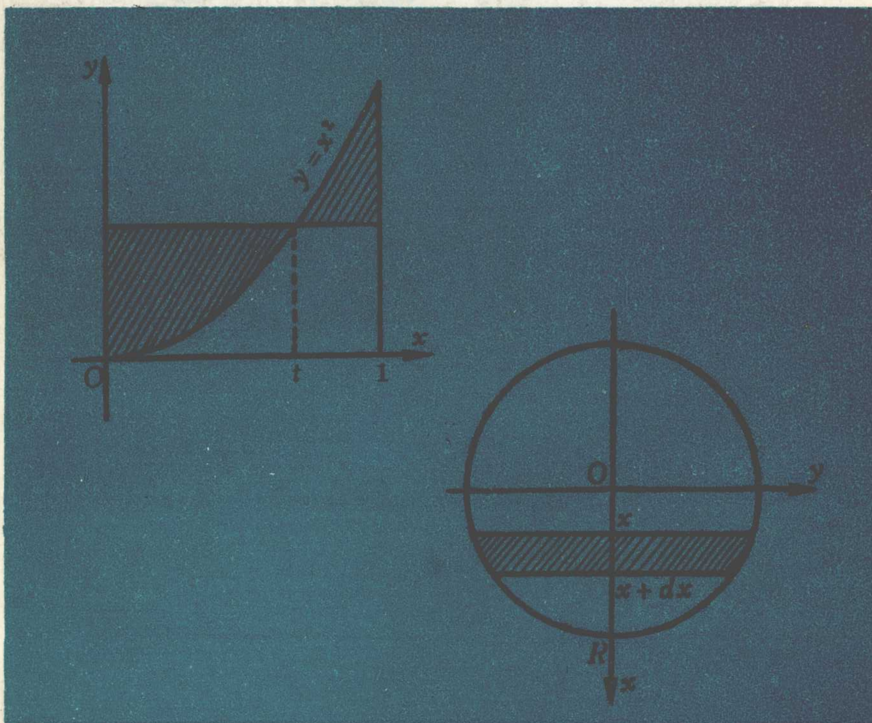
一元函数微积分学习辅导

内蒙古人民出版社



一元函数

微积分学习辅导

赫爱英 编著

内蒙古人民出版社
1990·呼和浩特

一元函数

微积分学习辅导

赫爱英　编著

*

内蒙古人民出版社出版发行
（呼和浩特市新城西街 82 号）
内蒙古新华印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32 印张：5.375 字数：112千
1990 年 4 月第一版 1990 年11月第 1 次印刷
印数：1—2,000册
ISBN 7-204-00979-7/G·134 定价：1.80元

前　言

本书是以北京林业大学数学教研组编《高等数学》（修订版）为根据，为帮助高等林业院校函授学生学习高等数学而编写的辅导教材。在编写中，考虑到要便于学生自学，有助于学生对教材基本内容的理解，并力求帮助学生寻找解题思路以及总结解题类型等因素，所以侧重于基本概念和基本计算方法的介绍。

本书内容有一元函数的微积分和微分方程。

各章开头部分概括了本章的主要内容，指出了重点和难点；然后是内容提要；第三部分是例题，按题的解法归类，每类题后有解题的小结；最后是复习思考题，以补充习题，供学生复习时用。

高等数学是比较抽象的，在学习时要注意学习方法。首先要认真钻研教材，正确理解每个数学概念、定理、法则，并且在理解的基础上了解产生这些概念的来龙去脉以及各个概念之间的区别。其次，必须作一定数量的习题。作题既是对概念、定理、公式的应用，又可培养训练逻辑思维、分析问题与解决问题的能力。解题时多问几个为什么，力求解题的条理性、逻辑性及准确性。最后，在每章学习后要复习。通过复习、前后知识的对比联系，使所学的知识更加系统化；

在此基础上得到巩固与提高。

本书在编写过程中，有部分内容是刘子杰同志参予编写审定的，在此表示谢意。本书也可供农林院校大专学生及自学高等数学者使用。

由于编写时间仓促，水平有限，书中难免有不妥之处，望读者批评指正。

编者

一九九〇年二月

目　录

第一章 函 数

初等数学与高等数学的根本区别在于变量进入了数学。反映变量之间相互依赖关系的函数是微积分学研究的主要对象。它是高等数学中最重要的基本概念之一。在学习这一章时，要弄清函数的三要素、会求函数的定义域、熟练掌握基本初等函数的定义、性质及图形；弄清复合函数的复合步骤以及隐函数反函数的概念。重点是函数的定义和基本初等函数的性质、图形。难点是复合函数的概念及定义域的确定。

内容提要

一、函数的概念

1．常量和变量

在观察自然现象或生产过程中，某些量可取不同的数值，这种量称为变量；而有些量则保持一定的数值，或其变化相对所研究的问题而言可忽略不计，这种量称为常量。要注意，常量、变量是具有相对性的。变量的变化范围称为变域。

2．区间

介于两个实数之间的全体实数称为区间。设有两个实数

a, b, 且$a<b$，则区间的分类如下：

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\},\ (a,b)=\{x|a<x<b\}$$

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\},\ [a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$$

$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\},\ (a,+\infty)=\{x|x>a\}$$

$$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\},\ (-\infty,b)=\{x|x<b\}$$

$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=\{x|x$是实数$\}=R$

邻域 设a与δ是两个实数，且$\delta>0$，则，开区间$(a-\delta,\ a+\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}=\{x|\ |x-a|<\delta\}$称为点$a$的$\delta$邻域，记为$N(a,\ \delta)$；若不包括点$a$，记为$N(\hat{a},\ \delta)$。

3．函数

设x，y是同一变化过程中的两个变量，如果x在其变域D内所取的每一个值，变量y按照某一确定的规律f取确定的值与之对应，则称y是x的函数，记为$y=f(x)$。

若变量y按照某一确定规律所取的值是唯一的，则称为单值函数；否则称为多值函数。

在函数的定义中，变域D是定义域，f是对应法则．定义域、对应法则，再加上自变量x在定义域内变化时，变量y按照对应法则f所取的值的全体通常称为“值域”的，总称为函数的三要素．对“f”的含义不能错误地理解为只能是解析式子。

4．函数的表示法

①公式法　用解析式来表示两个变量之间的关系．

注　这种表示法可用一个解析式也可用几个解析式分段表示，如

$$y=|x|,\quad y=\begin{cases}\frac{1}{2}x & x\geqslant 0\\ \sin x & x<0\end{cases}$$

函数一般记作$y=f(x)$、$y=g(x)$、$y=\varphi(x)$等，或者为区别不同的函数也可记作$y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$，但不能记为$y=f(x_1)$，$y=f(x_2)$。后者一般表示的是同一函数在自变量取两个不同值x_1，x_2所对应的函数值。

②表格法　列表来表示两个变量之间的对应关系。

③图示法　用函数的图象来表示两个变量之间的关系。

5．函数的简单性质

①单调性　设$f(x)$是定义在D上的函数，对D内任两点x_1，x_2，当$x_1<x_2$时，有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (或f(x_1)>f(x_2))$$

则称$f(x)$在D上为一单调的增函数（或单调的减函数）。

②奇偶性　对定义在对称区间$(-l,\ l)$上的函数$f(x)$有　$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数。

若有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数。

③周期性　T为一常数，若对于函数$f(x)$定义域内的任一点x，均有$f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$为一个周期函数，T为周期。

④有界性　若有正数M，对于函数$f(x)$定义域内的一切x的值，均有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称$f(x)$为有界函数。

二、反函数的概念

定义 设给定y是x的函数，$y=f(x)$。如果将y当作自变量，x作为函数，则由$y=f(x)$所确定出$x=\varphi(y)$称为函数$y=f(x)$的反函数。

若$x=\varphi(y)$是$y=f(x)$的反函数，则它们所表示的两个变量x、y之间的对应关系是一致的，在直角坐标系中的图形是同一条曲线。

按惯例，用x表示自变量，y表示函数，因此函数$y=f(x)$的反函数$x=\varphi(y)$可写作$y=\varphi(x)$，它们在直角坐标系中的图形是以直线$y=x$为对称的两条曲线。

三、复合函数

定义 设函数$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，且$\varphi(x)$的值域包含在$y=f(u)$的定义域内，则称y是x的复合函数，记为$y=f[\varphi(x)]$。即$y=f[\varphi(x)]$是由$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$复合而成的。u称为中间变量。

注 ①函数$u=\varphi(x)$的值域要与函数$y=f(u)$的定义域交集不空，否则不能复合。如$y=\arcsin u$与$u=x^2+2$不能复合。这是因为$\arcsin u$中的$u\in[-1,1]$，而$u=x^2+2\in[2,+\infty)$，这两个集合之交为空集。

②复合函数的中间变量可以不止一个，或者说复合步骤可经过几次。如若$y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(w)$，$w=R(x)$

能够复合，则y是x的复合函数，可表示为
$y=f\{\varphi\{\psi[R(x)]\}\}$，此时$u$，$v$，$w$均为中间变量。

四、基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为基本初等函数。这些函数的定义域、性质及图形必须熟记，为此列举如下。

1．**幂函数** $y=x^{\mu}$（μ为任意实数）

定义域：视μ的取值不同而不同。但当$x>0$时，不论μ取定什么值，x^{μ}都有意义。

其图形过点（0，0）、（1，1）。

当$x>0$时，不论μ取何值，函数为单增的。

2．**指数函数** $y=a^{x}$（$a>0$，$a\neq1$）

定义域为全体实数：$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$。

当$0<a<1$时函数为单调递减；

当$a>1$时函数为单增，其图形过（0，1）一点。

特殊地$y=e^{x}$为单增函数。

3．**对数函数** $y=\log_{a}x$（$a>0$，$a\neq1$）

定义域为$(0,+\infty)$，值域为全体实数。

当$0<a<1$时函数单减，当$a>1$时函数为单增，图形过（1，0）一点。

特殊地$y=\ln x$为自然对数，底为e。

4．**三角函数** $y=\sin x$，$y=\cos x$。

定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$。

两函数是以2π为周期的周期函数。

两个函数都是以1为界的有界函数：

$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$。

$y=\sin x$为奇函数，$y=\cos x$为偶函数。

三角函数中除$y=\sin x$，$y=\cos x$外，还有：$y=\mathrm{tg}x$，其定义域为除去$k\pi+\frac{\pi}{2}$的全体实数（$k=0$，± 1，……）值域为$(-\infty,+\infty)$，以π为周期的奇函数。$y=\mathrm{ctg}x$，定义域为除去$k\pi$的全体实数（$k=0$，± 1，± 2，……），值域为$(-\infty,+\infty)$，是以π为周期的奇函数。

$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$是以$2\pi$为周期的函数，前者为偶函数，后者为奇函数。

5．反三角函数　$y=\arcsin x$

定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，有界单调递增，奇函数。

$y=\arccos x$。

定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，是单减的有界函数。

$y=\mathrm{arc\,tg}x$

定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，是单增的奇函数。

$y=\mathrm{arc\,ctg}x$

定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$，是单减的函数。

五、初等函数

由常数和基本初等函数通过有限次四则运算和有限次复合步骤而构成的函数称为初等函数。

注 分段函数不是初等函数。

例 题

例1 已知$f(x)=2x^2-3x+1$，求$f(1)$，$f(-2)$，$f(a+1)$，$f(a)+1$，$f\left(\frac{1}{a}\right)$。

解 $f(x)=2x^2-3x+1$是初等函数，它表示对x作以下运算：$f(\quad)=2\cdot(\quad)^2-3(\quad)+1$，括号内应用同一个数代入计算，故有：

$$f(1)=2\cdot(1)^2-3\cdot(1)+1=2-3+1=0$$

$$f(-2)=2\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+1=8+6+1=15$$

$$f(a+1)=2\cdot(a+1)^2-3\cdot(a+1)+1=2a^2+a$$
$$=a(2a+1)$$

$$f(a)+1=[2\cdot(a)^2-3\cdot(a)+1]+1=2a^2-3a+2$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^2-3\cdot\left(\frac{1}{a}\right)+1=\frac{2}{a^2}-\frac{3}{a}+1=$$
$$\frac{2-3a+a^2}{a^2}$$

例2 设$f(x)=\begin{cases}1+x^2 & x\leqslant 0\\ 3^x & x>0\end{cases}$

求$f(-2)$，$f(1)$，$f(a)$

解 这是一个分段函数，求函数值时注意x的取值位置.

当$x=-2<0$，$f(-2)=1+(-2)^2=5$

当$x=1>0$，$f(1)=3^1=3$

求$f(a)$时，要考虑a的取值范围：当$a\leqslant 0$时，$f(a)=1+a^2$；当$a>0$时，$f(a)=3^a$。

例3 求函数$y=\lg(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$的定义域。

解 求函数的定义域，就是求出x所能取的值，使得y有确定的值与之对应。换句话说，就是求出x的值使y有意义. 所给函数是对数和无理式之和，因此，必须要使对数有意义且使无理式也有意义。于是应有：

$$\begin{cases}x-1>0\\x+1>0\end{cases}\qquad 即\begin{cases}x>1\\x>-1\end{cases}$$

故所求定义域为$(1,+\infty)$

小结 确定函数的定义域的一般原则是：

①解析式中含有分式时，要使分母不为零；

②式子中含有根式时，偶次根式内被开方式非负；

③式子中含对数时，真数为正；

④式子中含反三角函数时，如$\arcsin x$，$\arccos x$，应有$|x|\leqslant 1$。

⑤实际问题要根据实际意义来确定。如$y=\pi x^2$，作为一个式子，x可取全体实数.若y表示半经为x的圆的面积时，则x只取正数。

例4 已知$f(x)=2^x$，$\varphi(x)=x^2$，求$f[\varphi(x)]$，

$\varphi[f(x)]$.

解 这是求复合函数的表达式，应当引入中间变量。先令$u=\varphi(x)$，则$y=f(u)$，即

$y=f(u)=2^u$，$u=\varphi(x)=x^2$，将u代入$f(u)$得
$y=f(u)=f[\varphi(x)]=2^{x^2}$。

同理可得 $\varphi[f(x)]=(2^x)^2=2^{2x}=4^x$

例 5 将$y=e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}}$分解为基本初等函数。

解 将复合函数分解是由外向内引入中间变量，即$y=e^u$，$u=\operatorname{arctg}v$，$v=\sqrt{w}$，$w=x^2+1$。其中有三个中间变量。

小结 复合函数的复合和分解是比较重要的，特别是分解的步骤要搞清，好为以后学习导数打下良好的基础。复合函数复合时是由里向外引入变量，而分解时则相反。

例 6 求函数$y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$的反函数。

解 由反三角函数的定义知，

$$\cos y=\frac{1-x^2}{1+x^2}，则\ (1+x^2)\cos y=1-x^2$$

$$x^2(\cos y+1)=1-\cos y$$

$$x^2=\frac{1-\cos y}{1+\cos y}，\quad x=\pm\sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}}=\operatorname{tg}\frac{y}{2}$$

更换字母得$y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$是所求的反函数。

小结 求反函数的原则是，先由给定函数$y=f(x)$中解出$x=\varphi(y)$，然后更换字母表示为$y=\varphi(x)$。

复习思考题

1．什么是常量，什么是变量？如何理解它们的相对性？

2．函数的定义是什么？函数的三要素是什么？

3．下列各函数是否相同？

① $f(x)=\frac{x}{x}$，$g(x)=1$．

② $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$，$g(x)=x+1$

③ $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$

④ $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=|x|$

⑤ $f(x)=e^{\ln x}$，$g(x)=x$

⑥ $f(x)=\ln\sqrt{x}$，$g(x)=\frac{1}{2}\ln x$

4．什么是分段函数？什么是基本初等函数？什么是初等函数？

5．函数的奇偶性如何定义？试举出一个奇函数和偶函数。

6．单值函数和单调函数是否一样？

7．作出基本函数的图形。

8．$0\leqslant(x-2)^2\leqslant4$ 与 $0\leqslant x-2\leqslant2$ 所表示的实数范围是否相同？

9．$f(x^2)$ 与 $[f(x)]^2$ 是否相等？举例说明。

10．$f(x_0)$ 与 $f(x)$ 的关系如何？