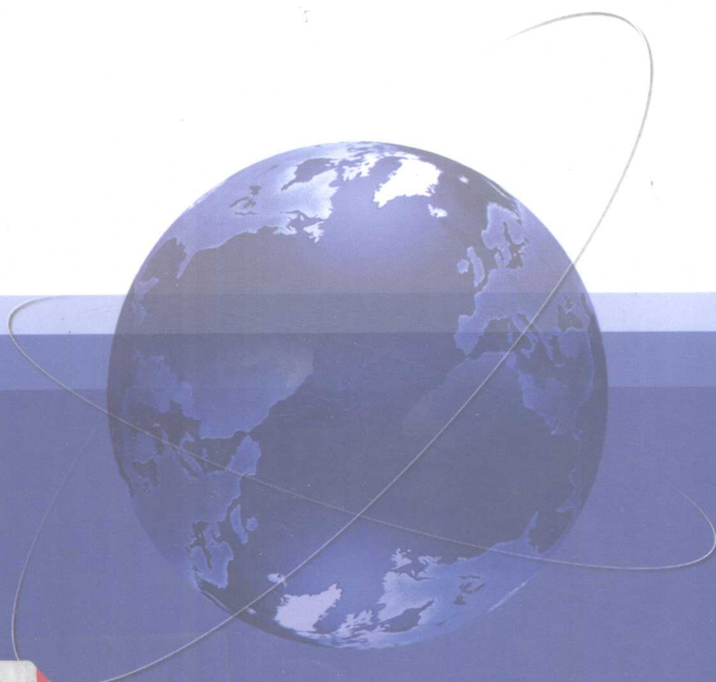
21世纪高职高专规划教材

离散数学



胡延忠 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21世纪高职高专规划教材

离 散 数 学

主　编　胡延忠
副主编　唐铸文　陈晓炜
参　编　廖家平　欧阳勇

机 械 工 业 出 版 社

本书是根据教育部教高［2002］2号文件精神由中国机械教育协会和机械工业出版社组织全国80多所高职高专院校编写的，其内容包括以下4个方面：①集合论。②代数结构。③图论。④数理逻辑。

书中注重概念的论述和应用，而不侧重定理本身的证明，内容讲解清楚，通俗易懂，例题丰富。每章后均有本章的小结和一定数量的复习思考题供学生复习时选用。附录中有部分复习思考题解答供参考。

本书既可以作为高职高专的离散数学教材，也可以用作本科相关专业的教学用书。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/胡延忠主编．—北京：机械工业出版社，2004.9

21世纪高职高专规划教材

ISBN 7-111-15272-7

Ⅰ．离…　Ⅱ．胡…　Ⅲ．离散数学－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ．O158

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第094682号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：余茂祚
责任编辑：余茂祚　版式设计：冉晓华　责任校对：姚培新
封面设计：饶　薇　责任印制：洪汉军
北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2005年1月第1版·第1次印刷
787mm×1092mm 1/16·10印张·245千字
定价：16.00元

21 世纪高职高专规划教材目录（机、电、建筑类）

高等数学（理工科用）
高等数学学习指导书（理工科用）
计算机应用基础
应用文写作
经济法概论
C 语言程序设计

工程制图（机械类用）
工程制图习题集（机械类用）
AutoCAD 2004
几何量精度设计与检测
工程力学
金属工艺学
机械设计基础
工业产品造型设计
液压与气压传动
电工与电子基础
电工电子技术（非电类专业用）
机械制造基础
数控技术
专业英语（机械类用）
金工实习
数控机床及其使用维修
数控加工工艺及编程
机电控制技术
计算机辅助设计与制造
微机原理与接口技术
机电一体化系统设计
控制工程基础
机械设备控制技术
金属切削机床

机械制造工艺与夹具

冷冲模设计及制造
塑料模设计及制造
模具 CAD/CAM

汽车构造
汽车电器与电子设备
公路运输与安全
汽车检测与维修
汽车营销学

工程制图（非机械类用）
工程制图习题集（非机械类用）
离散数学
电路基础
单片机原理与应用
电力拖动与控制
可编程序控制器及其应用
工厂供电
微机原理与应用
模拟电子技术
数字电子技术
办公自动化技术
现代检测技术与仪器仪表
传感器与检测技术
制冷原理与设备
制冷与空调装置自动控制技术
电视机原理与维修
自动控制原理与系统

电路与模拟电子技术
低频电子线路
高频电子线路
电路分析基础
常用电子元器件

多媒体技术及其应用
操作系统
数据结构
软件工程
微型计算机维护技术
汇编语言程序设计
VB6.0 程序设计
VB6.0 程序设计实训教程
Java 程序设计
C ++ 程序设计
PASCAL 程序设计
Delphi 程序设计
计算机网络技术
网络应用技术
网络数据库技术
网络操作系统
网络安全技术
网络营销
网络综合布线
网络工程实训教程
计算机图形学实用教程
动画设计与制作
ASP 动态网页设计
管理信息系统
电工与电子实验
专业英语（电类用）
物流技术基础
物流仓储与配送

物流管理
物流运输管理与实务

建筑制图
建筑制图习题集
建筑 CAD
建筑力学
建筑材料
建筑工程测量
钢筋混凝土结构及砌体结构
房屋建筑学
土力学及地基基础
建筑设备
建筑给排水
建筑电气
建筑施工
建筑工程概预算
房屋维修与预算
建筑装修装饰材料
建筑装修装饰构造
建筑装修装饰设计
楼宇智能化技术
钢结构
多层框架结构
建筑施工组织
房地产开发与经营
工程造价案例分析
土木工程实训指导
土木工程基础实验教程
建设工程监理
建设工程招标与合同管理
房地产法规与案例分析
建设法规与案例分析

21世纪高职高专规划教材
编 委 会 名 单

前　言

本书是由中国机械工业教育协会和机械工业出版社组织全国 80 多所高职高专院校编写的 21 世纪高职高专规划教材，是理工科教学用书。

全书分为 4 个部分共 12 章，着重介绍了离散数学的经典内容：①集合论。②代数结构。③图论。④数理逻辑。

注重概念的论述和应用，而不侧重定理本身的证明；内容讲解清楚，通俗易懂；例题丰富等是本书的特点。本书的目的是让学生较方便地学到必备的离散数学知识。

本书第 1～3 章由唐铸文编写，第 4～7 章由胡延忠编写，第 8 章和第 9 章由陈晓炜编写，第 10 章由欧阳勇编写，第 11 章和第 12 章由廖家平编写。

在本书编写和出版过程中得到了余茂祚教授、吴振彪教授和廖家平教授的大力支持和热情帮助，谨此致谢。

由于作者水平有限，书中难免有不妥和错误之处，恳请广大师生指正。

编　者

目　录

第1章 集　　合

1.1 集合的概念及其表示

1.1.1 集合的概念

集合是不能精确定义的数学概念。一般认为，集合是一些确定的可区别的对象的全体。对象既可以是抽象的事物，也可以是具体的事物。对于给定的集合和事物，应该可以断定这个特定的事物是否属于这个集合。如果属于，就称它为这个集合的元素。集合的例子有：

直角坐标系中满足方程：$x^2+y^2\leqslant r^2$ 的点的集合；

C 语言中保留字的集合；

全体地球人的集合；

⋮

通常用大写的带标号或不带标号的英文字母来表示集合。例如，

N 代表自然数集合(包括 0)；

Z 代表整数集合；

Q 代表有理数集合；

R 代表实数集合；

C 代表复数集合。

一般用小写的带标号或不带标号的英文字母来表示集合的元素，如，a_1、b_2、x、y 等。

1.1.2 集合的表示方法

为了表示一个集合由哪些元素组成，通常有两种方法：列举法和描述法。

1. **列举法**　列出集合的所有元素，元素之间用逗号隔开，并把它们用花括号括起来。例如，

$A=\{a,7,x,y\}$，其中 a 是 A 的元素，记作 $a\in A$。同样有 $7\in A$，$x\in A$，$y\in A$，但 x_1 不是 A 的元素，记作 $x_1\notin A$。

2. **描述法**　把元素的共同性质刻画出来。例如，$B=\{x\mid x$ 是锐角三角形$\}$，一般地用下列方式表示之：$A=\{x\mid P(x)\}$，其中 P 表示某性质，这个集合 A 由满足性质 P 的元素 x 所组成。

1.1.3 集合的特点

集合具有如下的特点：

确定性　集合中的元素是确定的，对于给定的集合和事物，事物或属于此集合或不属于此集合，两者必居其一。例如，全体胖子不能构成集合，除非规定何谓胖子。

互异性　集合中的每个元素均不相同，也即集合$\{a,b,b,c,d\}$与集合$\{a,b,c,d\}$是一样的。

无序性　集合中的元素没有顺序的差别，也即集合$\{1,2,3\}$与集合$\{2,1,3\}$是一样的。

多样性　集合中的元素可以是多种多样的，元素的个数也是多种多样的。例如，$A=$

$\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{1, 2, A\}$，自然数集合 **N** 由无限个元素组成。

1.1.4 空集∅和全集 *E*

我们给出两个重要的集合：空集和全集的定义。

定义 1 不含任何元素的集合叫做**空集**。记作$\{\ \}$或$\varnothing$。

$\varnothing=\{x \mid x \neq x\}$。空集是客观存在的。

如，方程 $x^2+1=0$ 的实数解组成的集合就是$\{\}$，即$\varnothing=\{x \mid x$ 是实数且$x^2+1=0\}$。

定义 2 在一个具体问题中，如果所涉及的元素都属于某个集合，则称这个集为**全集**，记为 E(或 U)。

全集是一个相对的概念。由于所研究的问题不同，所取的全集也不同。例如，在研究平面解析几何的问题时可以把整个坐标平面取作全集。在研究整数的问题时，可以把整数集合 **Z** 取作全集。

1.2 集合间的关系

元素和集合之间只有属于和不属于关系，而集合间一般有两种关系：相等关系和包含关系。

定义 1 若集合 A、B 的元素相同，则称 A、B 是**相等**的，记作 $A=B$，否则 A、B 是**不相等**的，记作 $A \neq B$。

如，A 是全体非负整数的集合，则 $A=\mathbf{N}$。

定义 2 给定集合 A、B。若 $a \in A$ 时一定有 $a \in B$，则称 A 是 B 的**子集**或称 ***B* 包含 *A***，记作 $A \subseteq B$；若 $A \subseteq B$，但是 $A \neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A \subset B$。若集合 A、B 不满足 $A \subseteq B$，则称 ***B* 不包含 *A***，记作 $A \subsetneq B$。

显然，$A \subset B$ 当且仅当$A \subseteq B$，且存在 $a \in B$ 但$a \notin A$。

例 1 设 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$，则我们有 $A \subseteq \mathbf{N}$，且 $A \subset \mathbf{N}$。

例 2 设 $A=\{a, b, b, c\}$，$B=\{a, b, c\}$，则有 $A=B$。

例 3 设 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{a, b, c, 2, 3\}$，则有 $A \subsetneq B$。

定理 1 对任一集合 A，必有$\varnothing \subseteq A$。

证明 假设定理不成立，则必至少存在一个 x，满足 $x \in \varnothing$且 $x \notin A$，但空集$\varnothing$中无元素，故 $x \notin \varnothing$。由此与假设矛盾，从而得证。

【证毕】

推论 空集是惟一的。

定理 2 对任一集合 A，必有 $A \subseteq E$。

证明略。

由以上两定理我们有：

定理 3 对任一集合 A，必有$\varnothing \subseteq A \subseteq E$。

定理 4 给定集合 A 与 B，则 $A=B$ 当且仅当$A \subseteq B$ 和$B \subseteq A$ 同时成立。
这个定理建立了集合相等与包含间的关系。

定义 3 给定集合 A，称 A 的全体子集构成的集合叫做A 的**幂集**，记作 $P(A)$(或 2^A)。即 $P(A)=\{s \mid s \subseteq A\}$。

定义 4 含有 m 个元素的集合简称 ***m* 元集**，其含有 n 个($n \leqslant m$)元素的子集称作 ***n* 元**

子集。

如，$A=\{a, b, c, \cdots, z\}$的3元子集有$\{a, b, c\}$，$\{a, b, d\}$，…，等。

例 4 设 $A=\{1, 2, 3\}$，求 A 的幂集。

解 将 A 的子集从小到大分类：

0元子集，即空集，只有一个：$\varnothing$。

1元子集，即单元集，有 C_3^1 个：$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$。

2元子集，有 C_3^2 个：$\{1, 2\}$，$\{2, 3\}$，$\{3, 1\}$。

3元子集，有 C_3^3 个：$\{1, 2, 3\}$。

$P(A)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2, 3\}\}$。

由二项式定理知：若 A 是 m 元集，则 $P(A)$有 2^m 个元素。

例 5 求下列集合的幂集：

(1) $A=\{a, \{a\}\}$。

(2) $A=\{\varnothing, a, \{a\}\}$。

(3) $A=\{1, \{2, 3\}\}$。

解 (1) $P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{\{a\}\}, A\}$。

(2) $P(A)=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\varnothing, a\}, \{\varnothing, \{a\}\}, \{a, \{a\}\}, A\}$。

(3) $P(A)=\{\varnothing, \{1\}, \{\{2, 3\}\}, A\}$。

例 6 求满足下列条件的集合 A、B：其中 A 既是 B 的元素又是 B 的子集。

解 设 $A=\{1\}$，$B=\{1, \{1\}\}$，则 A，B 为所求。又如，$A=\varnothing$，$B=\{\varnothing\}$，则 $A\subseteq B$ 和 $A\subseteq B$ 同时成立。

1.3 集合的基本运算

给定集合 A、B，通过集合的并$\cup$，交$\cap$，相对补$-$，绝对补$\sim$和对称差$\oplus$等运算产生新的集合，并建立这些运算之间基本关系式。

定义 1 由集合 A、B 的所有元素组成的集合，叫做集合 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$。

如，$A=\{1, 2, a, b\}$，$B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，则 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, a, b\}$。

定义 2 由集合 A、B 的所有公共元素组成的集合，叫做集合 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$。

当集合 A、B 的交集是空集，即 $A\cap B=\varnothing$时，称它们是**不交的或分离的**。

如，$A=\{x, y, 1, 2\}$，$B=\{1, 2, 3, a\}$则 $A\cap B=\{1, 2\}$。

定义 3 由集合 A、B 的所有属于集合 A 而不属于集合 B 的元素组成的集合，叫集合 A 与 B 的**相对补集**，记作 $A-B$，即 $A-B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$。$A-B$ 也称为 A、B 的**差集**。

如，上例中 $A-B=\{x, y\}$。

由相对补集可直接定义绝对补集和对称差。

定义 4 集合 A 的**绝对补集**可定义为

$$\sim A=E-A\text{。即}\sim A=\{x \mid x\in E \text{ 且 } x\notin A\}=\{x \mid x\notin A\}\text{。}$$

定义 5 设 A、B 是集合，则 A 与 B 的**对称差**是$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$。

如，$A=\{0,1,2\}$，$B=\{2,3\}$，则 $A\oplus B=\{0,1\}\cup\{3\}=\{0,1,3\}$。

A 与 B 的对称差还有一个等价的定义，即

$$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)。$$

在上面的例子中用这种定义得到的结果相同，即

$$A\oplus B=\{0,1,2,3\}\cup\{2\}=\{0,1,3\}。$$

到此为止，我们定义了四个二元运算和一个一元运算(绝对补 ~)。

集合之间的相互关系和有关的运算可以用文氏图(John Venn 英国数学家，1834 ~ 1883)给予形象的描述，文氏图的构造方法如下：

首先画一个大矩形表示全集 E，其次在矩形内画一些圆，用圆的内部表示 E 的任意子集合。在一般情况下，如果不作特殊的说明，这些表示集合的圆应该是彼此相交的。如果已知某两个集合是不交的，则表示它们的圆彼此相离。

通常在图中画有阴影的区域表示新组成的集合。图 1-1 所示是一些文氏图的实例。

下面讨论集合间的代数运算，其中 A，B，C 表示任意的集合。

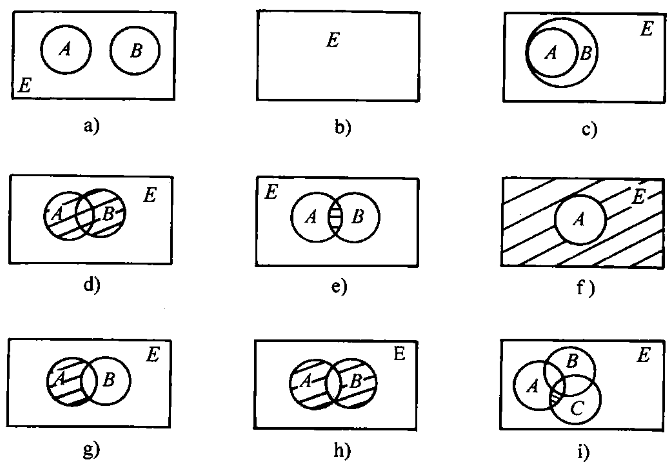


图 1-1

幂等律 $A\cup A=A$；

$A\cap A=A$。

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

交换律 $A\cup B=B\cup A$；

$A\cap B=B\cap A$。

分配律 $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$。

同一律 $A\cup\varnothing=A$；

$A\cap E=A$。

零　律 $A\cup E=E$；

$A\cap\varnothing=\varnothing$。

排中律 $A\cup\sim A=E$。

矛盾律 $A\cap\sim A=\varnothing$。

吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$；

$A\cap(A\cup B)=A$。

德·摩根律 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$；

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$；

$$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B;$$
$$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B;$$
$$\sim\varnothing=E;$$
$$\sim E=\varnothing。$$

双重否定律 $\sim(\sim A)=A$。

以上恒等式的证明的基本思想是：要证 $P=Q$，须证 $P\subseteq Q$ 且 $Q\subseteq P$，也就是要证对任意的 x，有

$$x\in P\Rightarrow x\in Q \text{ 和 } x\in Q\Rightarrow x\in P \text{ 成立，}$$

也即

$$x\in P\Leftrightarrow x\in Q。$$

例 1 证明 $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$。

证明 对任意的 x，$x\in A-(B\cap C)$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\notin B\cap C\\&\Leftrightarrow x\in A \text{ 且}(x\notin B \text{ 或 } x\notin C)\\&\Leftrightarrow(x\in A \text{ 且 } x\notin B)\text{或}(x\notin A \text{ 且 } x\notin C)\\&\Leftrightarrow x\in A-B \text{ 或 } x\in A-C\\&\Leftrightarrow x\in(A-B)\cup(A-C)。\end{aligned}$$

故 $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$。

【证毕】

除了以上的算律外，还有一些重要结果。

定理 给定集合 A，B，C 有

(1) $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$。

(2) $A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$。

(3) $A-B\subseteq A$。

(4) $A-B=A\cap\sim B$（交补运算定义差运算）。

(5) $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A-B=\varnothing$。

(6) $A\oplus B=B\oplus A$（对称差的交换律）。

(7) $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$（对称差的结合律）。

(8) $A\oplus\varnothing=A$。

(9) $A\oplus A=\varnothing$。

(10)若 $A\oplus B=A\oplus C$，则 $B=C$。

证明 只证明(4)和(10)。

(4) $A-B=A\cap\sim B$。对任意的 x 有：

$$x\in A-B\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\notin B\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\in\sim B\Leftrightarrow x\in A\cap\sim B。$$

(10)若 $A\oplus B=A\oplus C$，则 $B=C$。

由条件有 $A\oplus(A\oplus B)=A\oplus(A\oplus C)$，利用对称差的结合律，有 $(A\oplus A)\oplus B=(A\oplus A)\oplus C$，因为 $A\oplus A=\varnothing$，有 $\varnothing\oplus B=\varnothing\oplus C$，即 $B=C$。也可以用定义来证明：若 $A\oplus B=A\oplus C$，则对任意的 $x\in B$，分 $x\in A$ 和 $x\notin A$ 两种情况：

1) 若 $x\in A$，则 $x\in A\cap B$，从而 $x\notin A\oplus B=A\oplus C$。由 $x\in A$ 和 $x\notin A\oplus C$，可得 $x\in A\cap$

C，得 $x \in C$，即 $B \subseteq C$。

2）若 $x \notin A$，则 $x \in B - A$，从而 $x \in A \oplus B = A \oplus C$。由 $x \notin A$ 和 $x \in A \oplus C$，可得 $x \in C$，即 $B \subseteq C$。

同理可证：$C \subseteq B$，故 $B = C$。

【证毕】

例 2 设 A、B 为任意集合，则有

$$A - B = A - (A \cap B)。$$

证明 $A - (A \cap B)$

$= A \cap \sim(A \cap B)$（交补运算定义差运算）

$= A \cap (\sim A \cup \sim B)$（德·摩根律）

$= (A \cap \sim A) \cup (A \cap \sim B)$（分配律）

$= A \cap \sim B$（矛盾律、同一律）

$= A - B$（交补运算定义差运算）。

【证毕】

1.4 集合中元素的计数

集合的元素的个数称为该集合的**基数**。如，$A = \{a, b, c, \cdots, z\}$有 26 个元素，就说 A 的基数是 26，记作$|A| = 26$。显然$|\varnothing| = 0$。

定义 1 由有限个元素组成的集合叫**有限集**，由无限个元素组成的集合叫**无限集**。

显然，集合 A 是有限集当且仅当存在自然数 n，使得$|A| = n$。

如，$A = \{1, 2, 3\}$是有限集，而 $\mathbf{N}$，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$ 都是无限集。

有限集的基数容易确定，无限集的基数比较复杂。我们只讨论有限集的计数问题。

例 1 有 200 人组成的翻译团，其中 47 人熟悉阿拉伯语言，35 人熟悉俄罗斯语言，23 名熟悉这两种语言。问有多少人对这两种语言都不熟悉？

解 设 A、B 分别表示熟悉阿拉伯语言和熟悉俄罗斯语言的翻译人员的集合，则该问题可以用图 1-2 来表示，将熟悉两种语言的对应人数23填到 $A \cap B$ 的区域内，不难得到 $A - B$ 和 $B - A$ 的人数分别为$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 47 - 23 = 24$，

$|B - A| = |B| - |A \cap B| = 35 - 23 = 12$。

从而得到

$|A \cup B| = 24 + 23 + 12 = 59$，

$|\sim(A \cup B)| = 200 - 59 = 141$。

所以，两种语言都不熟悉人的有 141 人。

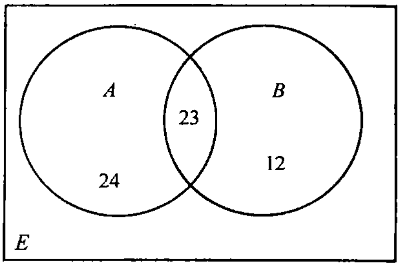


图 1-2

使用文氏图可以很方便地解决有限集的计数问题。首先根据已知条件把对应的文氏图画出来。一般地说，每一条性质决定一个集合，有多少条性质，就有多少个集合。如果没有特殊的说明，任何两个集合都是相交的。然后将已知集合的基数填入表示该集合的区域内。通常是从几个集合的交集开始填，接着根据计算的结果将数字逐步填入其他空白区域内，直到所有区域都填好为止。

例 2 求在 1 和 1000 之间不能被 5 或 6，也不能被 8 整除的数的个数。

解 设 1 到 1000 之间的整数构成全集 E，A、B、C 分别表示其中可被 5，6 或 8 整除的数的集合，文氏图如图 1-3 所示。

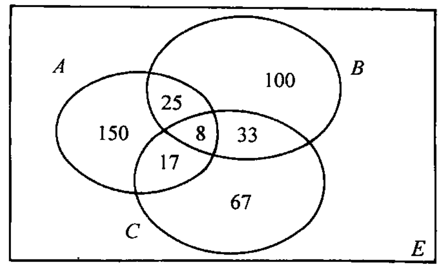


图 1-3

在 $A\cap B\cap C$ 中的数一定可以被 5，6 和 8 的最小公倍数$[5,6,8]=120$ 整除，即 $|A\cap B\cap C|=1000/[5,6,8]=1000/120=8$，其中/表示取商的除法(mod 表示取余的除法，如，$10/3=3$，$10\bmod 3=1$)。然后将 8 填入 $A\cap B\cap C$ 的区域内。

同样可得

$$|A\cap B|=1000/[5,6]=1000/30=33,$$
$$|A\cap C|=1000/[5,8]=1000/40=25,$$
$$|B\cap C|=1000/[6,8]=1000/24=41,$$

然后将 $33-8=25$，$25-8=17$，$41-8=33$ 分别填入邻近的三块区域。

最后计算

$$|A|=1000/5=200,$$
$$|B|=1000/6=166,$$
$$|C|=1000/8=125。$$

根据这些结果，剩下的区域就不难填出来了，从而得到

$$|A\cup B\cup C|=400。$$

所以，不能被 5，6 和 8 整除的数有 600 个。

除了使用文氏图的方法外，对于集合的计数还有一些重要的定理。下面介绍这些定理。

定理 1 设 A、B 是有限集，若 $A\cap B=\varnothing$，则 $|A\cup B|=|A|+|B|$。

证明略。

推论 若 A_1，A_2，…，A_n 两两不交，则有 $\left|\bigcup\limits_{1}^{n} Ai\right| = \sum\limits_{1}^{n}|Ai|$ 。

定理 2 设 A、B 是有限集，若 $A\subseteq B$，则 $|B-A|=|B|-|A|$。

证明 因为 $A\subseteq B$，所以 $B=A\cup(B-A)$，显然 $A\cap(B-A)=\varnothing$，由定理 1 得证。

【证毕】

定理 3 设 A、B、C 是有限集，则

(1) $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$。

(2) $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|$。

证明 (1) 因为 $A\cup B=A\cup(B-A\cap B)$，所以由定理 1 有 $|A\cup B|=|A|+|B-A\cap B|$，又因为 $A\cap B\subseteq B$，所以由定理 2 有 $|B-A\cap B|=|B|-|A\cap B|$，从而得证。

(2) 利用(1)和集合的代数运算可以证明。

【证毕】

例 3 一个班里有 50 名学生，在第一次考试中有 26 人得 100 分，在第二次考试中有 21 人得 100 分。如果两次考试中都没得 100 分的有 17 人，那么两次考试都得 100 分的有多少人？

解 方法 1 设 A、B 分别表示在第一次和第二次考试中得 100 分的学生的集合，全集 E 取班上的全体同学，那么有

$$|A|=26,\ |B|=21,\ |\sim A\cap\sim B|=17。$$

因为 $\sim A\cap\sim B=\sim(A\cup B)$,

所以 $|\sim A\cap\sim B|=|\sim(A\cup B)|=|E|-|A\cup B|=|E|-(|A|+|B|-|A\cap B|)$,

即，$17=50-(26+21-|A\cap B|)$，所以，$|A\cap B|=14$。有 14 人两次考试都得 100 分。

方法 2　画出文氏图如图 1-4 所示。

因为首先要填入 $A\cap B$ 中的人数正是题目所要求的，所以设它为 x，然后填入其他区域中的数字，并列出方程如下：

$$(26-x)+x+(21-x)+17=50。$$

解得 $x=14$。

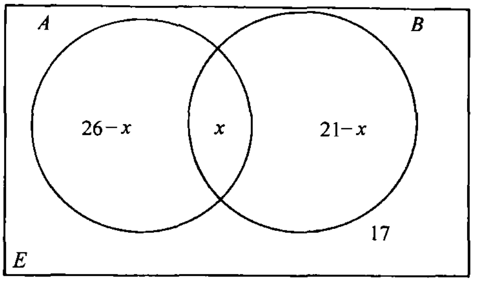


图 1-4

推论　设 A、B、C、E 是有限集，则

(1) $|A\cap B|=|\sim A\cap\sim B|-|E|+|A|+|B|$。

(2) $|A\cap B\cap C|=|\sim A\cap\sim B\cap\sim C|-|E|+|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|$。这就是**包含与排斥原理**。

本章小结

本章主要讨论了：

1. 集合和元素的概念，集合与元素之间的关系，集合及元素的表示。

2. 集合的相等与包含，子集合的概念，集合的幂集的概念。

3. 集合的基本运算，如，交、并、差(相对补)、补(绝对补)、对称差的概念及性质，运算规律，文氏图及应用。

4. 有限集与无限集的概念，有限集合的计数问题。

复习思考题

1. 列出下列集合的所有元素：

(1) 大于 6 小于 40 的素数的集合。

(2) 大于 100 小于 200 的偶数的集合。

2. 举出集合 A、B、C 的例子，使其满足 $A\in B$，$B\in C$，但 $A\notin C$。

3. 确定下列集合的幂集：

(1) $\{b,\{b\}\}$。

(2) $\{\{a\}\}$。

(3) $\{\varnothing,\{a\},\{b\}\}$。

(4) $\{1,2,3,4\}$。

(5) $\varnothing$。

4. 证明下列等式：

(1) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$。

(2) $(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$。

5. 用文氏图表示下列集合：

(1) $\sim A\cup(B\cap C)$。

(2) $(A\oplus B)-C$。

(3) $(A\cap\sim B)\cup(C-B)$。

(4) $A\cup(C\cap\sim B)$。

6. 给定集合 A、B：

(1) 若 $A-B=B$，则 A 与 B 满足什么条件。

(2) 若 $A-B=B-A$，则 A 与 B 满足什么条件。

7. 证明：(E 为全集)

(1) $A\subseteq B$ 当且仅当 $A\cap\sim B=\varnothing$。

(2) $A\subseteq B$ 当且仅当 $\sim A\cup B=E$。

(3) $A\subseteq B$ 当且仅当 $A-B=\varnothing$。

8. 某班有学生 60 人，其中有 38 人学习 PASCAL 语言，有 16 人学习 C 语言，有 21 人学习 COBOL 语言，有 3 人这三种语言都学习，有 2 人这三种语言都不学习，问仅学两种语言的学生人数是多少？(提示：利用 $A-B=A\cap\sim B$、$A-B=A-(A\cap B)$ 和包含与排斥原理)