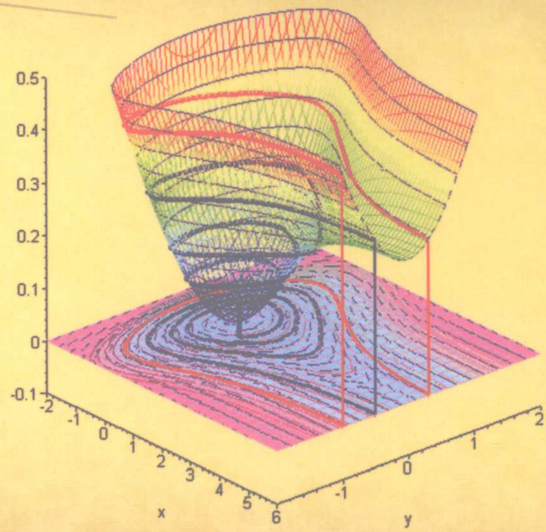
TURING 图灵数学·统计学丛书 29

WILEY



Linear Algebra and Its Applications

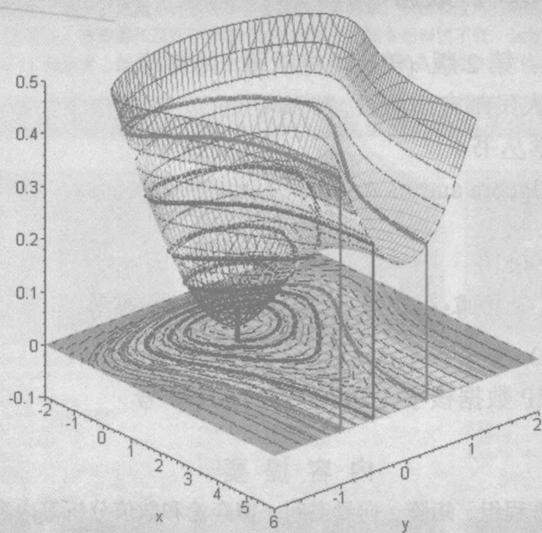
线性代数及其应用

（第 2 版）

[美] Peter D. Lax 著
傅莺莺 沈复兴 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书 29



Linear Algebra and Its Applications

线性代数及其应用

（第 2 版）

[美] Peter D. Lax 著
傅莺莺 沈复兴 译

人民邮电出版社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

线性代数及其应用：第 2 版/ (美) 拉克斯著；傅莺莺，沈复兴译. —北京：人民邮电出版社，2009.1

（图灵数学·统计学丛书）

书名原文：Linear Algebra and Its Applications, second Edition

ISBN 978-7-115-18908-0

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①拉…②傅…③沈… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 150270 号

内 容 提 要

本书全面覆盖线性方程组、矩阵、向量空间、博弈论和数值分析等内容，理论和应用相结合. 尤其介绍了凸集、对偶定理、赋范[线性]空间、赋范[线性]空间之间的线性映射以及自伴随矩阵本征值的计算等一般教材上没有的内容. 为方便读者学习，每章都有练习，并提供解答. 书后还有辛矩阵、洛伦兹群、数值域等 16 个附录.

本书是一本可供高年级本科生和研究生使用的优秀教材，同时也是数学教师和相关研究人员的一本很好的参考书.

图灵数学·统计学丛书

线性代数及其应用（第 2 版）

◆ 著　[美] Peter D. Lax
译　傅莺莺 沈复兴
责任编辑　明永玲

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编 100061　电子函件 315@ptpress.com.cn
网址：http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000 1/16
印张：20.5
字数：402 千字　2009 年 1 月第 1 版
印数：1–4 000 册　2009 年 1 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2008-0976 号

ISBN 978-7-115-18908-0/O1

定价：55.00 元

读者服务热线：(010)88593802　印装质量热线：(010) 67129223

反盗版热线：(010) 67171154

版权声明

译者介绍

傅莺莺 江西樟树人, 北京工商大学数理系讲师, 北京师范大学数学科学学院博士毕业. 主要研究数理逻辑模型论及其在代数、计算机等领域的应用, 已发表学术论文 10 篇. 具有多年数学专业课程助教和主讲经验, 曾参与云南省高中信息技术教材、全国软件水平考试辅导材料的编纂以及优秀线性代数教材的翻译, 对教材、教法有较深刻的认识.

沈复兴 江苏常熟人, 北京师范大学教授, 博士生导师. 长期从事数理逻辑和计算机科学等领域的研究与教学工作. 曾获 1986 年国家教委科技进步一等奖、1996 年国家教委科技进步三等奖, 北京师范大学 2002 "十佳教师"、2003 "本科生教学名师奖", 2004 宝钢优秀教师奖, 2004 年北京市教学成果 (高教) 一等奖、国家级教学成果二等奖, 2005 北京师范大学首届钱媛教育基金优秀教师奖. 曾任北京师范大学教务长、信息科学学院院长, 教育部教学指导委员会计算机基础教学指导分委员会委员. 现任中国数学会数理逻辑分会副理事长、秘书长, 全国高等师范学校计算机教育研究会荣誉副理事长, 全国高等院校计算机基础教育研究会师范专业委员会主任, 美国*Mathematical Reviews* 评论员.

译者曾应人民邮电出版社之邀, 翻译了 David C. Lay 教授所著的*Linear Algebra and Its Applications*(第 3 版修订版), 中译本《线性代数及其应用》于 2007 年 7 月出版, 深受读者好评.

译 者 序

现年 82 岁的彼得 · 拉克斯 (Peter D. Lax) 教授原籍匈牙利, 自 1958 年开始就一直在美国纽约州立大学从事教学与研究工作, 是美国科学院院士、纽约大学柯朗数学研究所前所长. 他在纯数学与应用数学的诸多领域都有极其卓越的建树, 被公认为是当代最顶尖的数学家和数学教育家之一. 2005 年, 拉克斯凭借其“在偏微分方程的理论研究以及应用中起到的奠基性贡献, 以及在计算该类方程结果时做出的不懈努力”荣获世界数学最高荣誉的阿贝尔奖. 拉克斯教授一生致力于数学教育, 独立撰写或与他人合著教材逾 20 部. 正如授予他阿贝尔奖的挪威科学院所言, 他“在数学领域有着相当深远的影响, 这不仅表现在他的研究贡献里, 而且他的著作、他对教育事业付出的毕生心血以及他在培养年轻一代数学家时体现出的孜孜不倦的精神, 都在世界数学领域留下了不可磨灭的影响”.

本书的第 1 版 (*Linear Algebra*) 是拉克斯唯一一本专门介绍线性代数的著作, 在书中他以分析的眼光、理论联系应用的观点讲述线性代数, 为读者展开了一片新的视野, 为线性代数教学的改革揭开了新的篇章. *American Mathematical Monthly* 这样评价道:“此书不仅应该推荐给相关领域的研究生、教师和学者, 而且也值得每一位数学家拥有. ”

本书在秉承第 1 版风格的前提下, 进一步丰富了内容, 全面覆盖了线性方程组、矩阵、向量空间、博弈论、数值分析等内容, 并根据最新的研究进展补充了自伴随矩阵本征值的 QR 算法等内容. 此外, 为了提高原书作为教材的实用性, 第 2 版从学生的角度出发, 扩充了第 1 版中前面章节的内容, 增加了练习, 并且补充了部分练习的答案. 总的说来, 经过修订, 第 2 版更加精炼厚实, 是一本可供高年级本科生和研究生使用的优秀教材, 同时也是数学教师、数学研究人员的一本很好的参考书, 计算机工程技术人员的一本理想的工具书.

此次人民邮电出版社引进了该书, 使我们有幸向国内广大师生介绍并一同分享这本教材. 本书前言以及第 12 章至第 18 章由沈复兴翻译, 其余部分由傅莺莺翻译, 最后由傅莺莺统稿. 在翻译过程中, 北京师范大学物理系马永革教授和北京工商大学数理系物理教研室徐登辉老师对第 11 章物理名词的译法提出了宝贵建议, 北京师范大学数学科学学院的研究生马鑫、李永强、田巧丽和刘文新帮助校对了部分书稿, 人民邮电出版社编辑为译本做了大量工作, 在此一并表示感谢.

由于译者水平有限, 书中难免疏漏和不妥之处, 敬请广大师生、同行专家批评指正!

译 者

2008 年 5 月

前　言

本书沿袭了第 1 版的框架，力图呈现线性代数作为线性空间和线性映射的理论与应用的全貌. 为便于理解与计算，书中将向量看成数列、将映射看成矩阵——这不过是还其原貌而已.

一旦掌握了足够多的线性代数知识，你就会发现，如果能将一个数学问题化为线性代数的问题，那么问题多半能迎刃而解. 由此可见，扎实深厚的线性代数背景对学生非常重要. 事实上，合格的本科教学应该为高年级学生开设线性代数提高课程，这正是我编写本书的初衷. 此次所做的相当一部分修订也力求使本书更适用于教学，这方面的修订包括：补充了第 1 版，尤其是前面章节中过于简短的叙述，增加了练习并且补充了部分练习的答案.

除此之外，本版还增加了相当一部分新内容. 例如，给出了利用单位球的紧致性判定赋范线性空间维数有限的准则. 新增一章专门讨论求自伴随矩阵本征值的 QR 算法，补充了将自伴随矩阵化为三对角矩阵的豪斯霍尔德算法，较详细地介绍了戴夫特 (Deift)、南达 (Nanda) 和托梅 (Tomei) 将收敛的 QR 算法推广至连续托达 (Toda) 流的工作，给出了刻画当时间趋于无穷时托达流渐近行为的默泽尔 (Moser) 定理.

本书在第 1 版 8 个附录的基础上又增加了 8 个新的附录，其中，附录 9 介绍了快速傅里叶变换，附录 10 利用矩阵的舒尔分解证明了谱半径定理，并且概述了矩阵值解析函数理论，附录 11 介绍了洛伦兹群，附录 12 是有限维空间紧致性判定的一个有趣的应用，附录 13 刻画了换位子的特征，附录 14 给出了李亚普诺夫稳定性判定法的一个证明，附录 15 介绍了如何构造矩阵的若当标准形，附录 16 给出了卡尔 · 潘塞 (Carl Pearcy) 关于矩阵数值域的哈尔莫斯 (Halmos) 猜想的一个极为精致的证明.

最后是我的一点希望，我始终认为高中数学应该囊括线性代数中最基本的内容，比如只含两三个分量的向量、标量积、向量积、用矩阵描述旋转及其几何应用. 当前高中数学课程的改革已经迫在眉睫了.

在此次修订过程中，我有幸得到雷 · 米卡雷克 (Ray Michalek) 的大力帮助，与艾伯特 · 诺维科夫 (Albert Novikoff) 和查理 · 佩斯金 (Charlie Peskin) 的交谈也让我受益匪浅，在此深表谢意. 我还要感谢罗杰 · 赫恩 (Roger Horn)、贝雷斯福德 · 帕雷特 (Beresford Parlett) 和杰瑞 · 加斯旦 (Jerry Kazdan) 提出了很多很好的意见，感谢杰弗里 · 赖安 (Jeffrey Ryan) 帮助完成校对.

彼得 · D. 拉克斯

于纽约

第 1 版前言

本书是在我多年来为纽约大学柯朗数学研究所一年级研究生授课的讲稿基础上整理而成的. 除了面向新入学的研究生, 这门课程也向通过资格考试的本科生开放, 间或也有一些非常优秀的高中生来听课, 其中就有艾伦 · 艾德尔曼 (Alan Edelman), 我为能第一个教他线性代数而备感荣幸. 与这门课程一样, 这本书的内容除极少部分以外, 其余都只需要读者了解线性代数的基本知识, 并没有很高的要求.

50 年前, 线性代数的研究几近沉寂. 然而在过去的 50 年中, 以高速计算机和超大内存的诞生为契机, 许多线性代数的新思想、新方法空前爆发, 其中包括如何求解线性方程组、怎样实现最小二乘法、如何处理线性不等式以及如何求矩阵的本征值等. 线性代数也由此走向了数值数学舞台的中心. 当然, 这就对我们今天如何讲授线性代数产生了深远的影响, 其中有好的一面, 也有不好的一面.

许多学生学习线性代数的目的仅仅是为了应用, 因此在线性代数课程中引入新的数值方法有一定的好处, 它能将新鲜有趣的素材以及新的实际应用带进课堂. 不过, 将应用和算法带到前台也会模糊线性代数的理论结构, 这是我不愿意看到的. 我认为, 将学生与埃米 · 诺特 (Emmy Noether) 和埃米尔 · 阿廷 (Emil Artin) 所创建的线性代数理论的伊甸园分隔开来, 对学生来说是一种莫大的损失. 我编写本书的目的之一就是希望在一定程度上纠正这种不平衡.

我编写这本书的第二个目的是希望展示丰富多彩的解析成果以及它们的一些应用, 包括矩阵不等式、本征值估计和行列式估计等. 这些对分析学家和物理学家来说漂亮且十分有用的线性代数内容常常被教材所忽略.

编写过程中, 对于定理证明的处理, 我尽量选用简短且具启发性的证法. 如果同一个问题有两种不同的解决思路, 我也尽可能都列出来.

全书的内容从目录一览即知. 下面我对材料的选取和处理略作说明. 前 4 章介绍了线性空间和线性变换的抽象理论. 为了避免使用一个又一个未加说明的概念, 这部分的证明采用线性结构, 还特别引入商空间作为维数计算的工具. 此外, 为了让这部分较枯燥的内容变得生动有趣, 我加进了一些非平凡的应用, 例如多项式的求积公式、多项式插值、求解离散拉普拉斯方程的狄利克雷问题.

在第 5 章中, 行列式被赋予了几何意义—— 有序单形带符号的体积, 由此即可推得行列式的基本代数性质.

第 6 章给出了复数方阵的谱理论. 本征向量和广义本征向量完备性的证明没有用到本征方程, 只依赖于多项式代数的可除理论. 同法我们证得, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似当且仅当对任意复数 k 和任意正整数 m, $(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{I})^m$ 与 $(\boldsymbol{B}-k\boldsymbol{I})^m$ 的零空

间都具有相同的维数. 这个命题的证明引出了若当标准形的概念.

欧几里得结构第一次出现是在第 7 章. 第 8 章中我用它推导出自伴随矩阵的谱理论. 书中给出了两种证明: 一种基于普通矩阵的谱理论, 另一种利用了本征向量和本征值的特征. 费希尔 (Fischer) 的最小最大原理也在这一章中介绍.

第 9 章介绍了单变元向量值、矩阵值函数的微积分, 这是在本科生教材中不常见到的一个重要内容. 这一章最重要的结果是非退化可微矩阵函数的本征值和单位本征向量的连续性及可微性特征, 此外还对"错开交叉 (avoided crossings)"的奇特现象作了简要叙述和解释.

本书前 9 章, 或者严格地说前 8 章, 构成线性代数的核心理论. 后 8 章讨论的则是一些专题, 可以根据教师和学生的兴趣进行取舍. 对此我只作非常简要的评论.

第 10 章可以说是由矩阵不等式、矩阵本征值不等式以及矩阵行列式不等式汇成的一曲交响乐, 其中许多证明要用到微积分知识.

我用第 11 章来弥补一般课程中往往缺失的力学内容, 揭示了如何利用矩阵描述空间运动. 借助矩阵, 刚体运动的角速度、流体向量场的散度和旋度都有极为自然的表示. 此外, 利用对称矩阵本征值的单调相关性可知, 当弹簧不易弯曲、质点质量减小时, 弹簧振子的固有频率增大.

第 12~14 章都围绕凸集概念展开. 第 12 章从度规函数和支撑函数的角度刻画了凸集, 这部分的主要工作有: 利用哈恩 - 巴拿赫 (Hahn-Banach) 过程证明了超平面分离定理, 证明了极点的卡拉泰奥多里 (Carathéodory) 定理并由此导出双随机矩阵的寇尼希 - 伯克霍夫 (König-Birkhoff) 定理, 给出并证明了关于凸集交的黑利 (Helly) 定理.

第 13 章讨论了线性不等式, 导出了法卡斯 - 闵可夫斯基 (Farkas-Minkowski) 定理并由此证明对偶定理. 最后介绍了对偶定理的两个常见的应用 —— 经济学中的最小最大 - 最大最小问题, 以及冯 · 诺依曼 (von Neumann) 关于双人零和博弈的最小最大定理.

第 14 章是关于赋范线性空间的, 除点到线性子空间的距离的对偶特征之外, 其余内容并没有很大难度. 对赋范线性空间之间的线性映射的讨论放在第 15 章.

第 16 章针对所有元素都是正数的矩阵给出了一个非常漂亮的定理 —— 佩龙 (Perron) 定理. 这一章还介绍了马尔可夫链渐近问题的经典应用, 最后证明了非负矩阵本征值的弗罗贝尼乌斯 (Frobenius) 定理.

最后一章讨论了迭代求解形如 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$(其中 $\boldsymbol{A}$ 为正定的自伴随矩阵) 的线性方程组的几种不同方法: 导出了一个变分公式, 同时对最速下降法予以分析; 接下来还给出了基于切比雪夫多项式的两种迭代法, 以及基于正交多项式的共轭梯度法.

对于未能单列一章介绍自伴随矩阵本征值的数值计算, 我感到非常遗憾. 因为

最近我发现这个问题与一些看似无关的论题之间存在着惊人的联系.

书后共有 8 个附录, 补充了一些不适宜放入教材正文的内容. 这些结果或者异常惊人, 或者本身就很重要, 有必要写进来以引起学生的关注, 它们包括: 可以显式求值的特殊行列式、普法夫 (Pfaff) 定理、辛矩阵、张量积、格、快速矩阵乘法的施特拉森 (Strassen) 算法、格希高瑞 (Gershgorin) 定理以及本征值的重数. 除此之外, 还有一些论题是本应该归入附录却未能实现的, 包括贝克 - 坎贝尔 - 豪斯多夫 (Baker-Campbell-Hausdorff) 公式、克里斯 (Kreiss) 矩阵定理、数值域以及三对角矩阵的逆.

书中有很多练习, 其中少数是普通的题目, 大部分都需认真思考, 还有一些需要计算.

书中采用的记号是新古典主义记号. 我喜欢用 4 个字母的盎格鲁 - 撒克逊 (Anglo-saxon) 语, 比如 "into" (到内)、"onto" (到上) 以及 "1-to-1" (一一), 而不用诺曼底 (Norman) 原来的多音节词. 书中每个证明的结尾都用一个空白方格标记.

我所参考的文献包括常见的书籍, 以及一些新近出版的教材, 另外还包括柯朗 - 希尔伯特 1924 德文原版未经改动的第 1 卷 —— 几代数学家和物理学家, 包括作者本人, 第一次学习线性代数就是从这本书的第 1 章开始的.

感谢柯朗数学研究所的同事以及怀俄明 (Wyoming) 大学的麦隆 · 阿伦 (Myron Allen) 阅读本书手稿, 提出宝贵意见, 并在他们的班级里试讲. 我还要感谢康妮 · 恩格尔 (Connie Engle) 和詹尼斯 · 旺特 (Janice Want) 细致地录入本书.

我从理查德 · 贝尔曼 (Richard Bellman) 的名著《矩阵分析导引》(*Introduction to Matrix Analysis*) 中学到很多东西, 它对本书的影响是巨大的. 为此, 也为了我们自 1945 年开始一直保持至 1984 年他逝世那一刻的友谊, 我谨以此书缅怀理查德 · 贝尔曼.

彼得 · D. 拉克斯
于纽约

目 录

① 本书正文中每章并未分节, 目录中小标题为原作者所加. —— 编者注

第 1 章　预 备 知 识

本章主要介绍抽象线性空间的基本概念和记号, 以期扭转人们总把向量当作由分量构成的阵列这一习惯认识. 然而, 我不得不承认, 抽象线性空间的概念并不比由阵列形式的向量所构成的空间更宽泛. 那么, 将线性空间的概念加以抽象, 其目的何在?

首先, 抽象化的结果允许我们用简单的记号来表示阵列; 于是在讨论线性空间时我们可以把向量作为最基本的单位, 而不用关心它由哪些分量构成. 线性空间概念的这种抽象还使许多结果的证明更为简单、明了.

其次, 在许多有实际意义的向量空间中, 元素往往不能写成若干个分量构成的阵列. 例如, 考虑一个 n 阶线性常微分方程, 它的解集构成一个 n 维向量空间, 但它们并不以阵列形式呈现.

即便向量空间中的元素以数的阵列形式给出, 其子空间中的元素也不一定能够自然地解释为阵列. 例如, 由各分量之和为零的全体向量所构成的子空间就是这样.

最后, 将向量空间抽象化的观点对研究无限维空间十分必要. 尽管本书仅限于讨论有限维空间, 抽象化的思想对于今后学习泛函分析非常重要.

线性代数主要研究向量的两种基本运算 —— 向量加法和数 (标量) 乘. 仅凭如此简单的工具便可构造出各式各样 [或罗马式 (romanesque), 或哥特式 (gothic), 或巴洛克式 (baroque)] 的复杂的数学结构, 真是令人赞叹! 更为人称道的是, 线性代数不仅给出许多漂亮的结果, 而且还为众多的数学问题 (包括应用数学) 提供了最生动贴切的表述.

域 K 上的线性空间 X 是定义了下列两种运算的数学对象.

第一种运算是*加法*, 记作 +, 例如

$$x + y, \tag{1}$$ 1

加法运算满足*交换律*

$$x + y = y + x \tag{2}$$

和*结合律*

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \tag{3}$$

为方便读者进行中英文对照阅读, 在边栏加上原书的页码. —— 编者注

并且可以构成群，其中零元素记作 0,

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}. \tag{4}$$

加法的逆运算记作 −：

$$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}. \tag{5}$$

练习 1 证明：向量加法中的零元素唯一.

第二种运算是用域 K 中的元素 k 乘 X 中的元素：

$$k\boldsymbol{x}.$$

乘法运算的结果是一个向量，即是 X 中的一个元素.

用 K 中元素进行数乘的运算满足结合律

$$k(a\boldsymbol{x})=(ka)\boldsymbol{x} \tag{6}$$

和分配律

$$k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=k\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{y}, \tag{7}$$

以及

$$(a+b)\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

假设用 K 中的单位(记作 1) 进行数乘，其效果相当于恒同映射

$$1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}. \tag{9}$$

以上就是线性代数的公理. 下面我们来证明一些推论.

在 (8) 式中令 $b=0$; 由练习 1 可知，对任意 $\boldsymbol{x}$ 有

2

$$0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}. \tag{10}$$

在 (8) 式中令 $a=1, b=-1$, 由 (9) 式和 (10) 式可知，对任意 $\boldsymbol{x}$ 有

$$(-1)\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}.$$

练习 2 证明：全体分量都为零的向量是传统的向量加法中的零元素.

本书旨在讨论代数在分析中的应用，因此书中的域 K 或者是实数域 $\mathbb{R}$, 或者是复数域 $\mathbb{C}$.

线性空间的一个有趣的例子是满足下列微分方程的所有函数 $x(t)$ 构成的集合

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

该微分方程的任意两个解之和仍是方程的一个解, 任意解的常数倍也是方程的一个解. 这就表明, 该微分方程的解集构成一个线性空间.

上述方程有其实际的物理背景: 将弹簧一端固定, 另一端与质点相连, 方程的解恰好描述了质点的运动方式. 一旦给定了初始位置 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{p}$ 和初始速度 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{v}$, 质点在任意时刻 t 的运动状态就被完全确定了. 因此方程的解又可以用数对 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v})$ 来表示.

同一个方程的解, 既可看作函数, 又可看成数对, 两种表述之间的关系是线性的. 若 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v})$ 和 $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{w})$ 分别是解 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{y}(t)$ 的初值条件, 则 $(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{q},\boldsymbol{w})$ 是解 $\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{y}(t)$ 的初值条件. 类似地, $(k\boldsymbol{p},k\boldsymbol{v})=k(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v})$ 是解 $k\boldsymbol{x}(t)$ 的初值条件.

将这种联系抽象出来, 我们得到了同构的概念.

定义 如果同一个域上两个线性空间之间的一一映射保持向量加法及数乘运算, 则称该映射为**同构(isomorphism)**.

同构是线性代数的一个基本概念. 如果仅仅依赖线性空间所提供的运算, 我们无法分辨同构的线性空间. 如前所述, 两个线性空间有可能形式完全不同, 但却彼此同构.

线性空间的例子

(i) 全体行向量 $(a_1,\cdots,a_n)(a_j\in K)$ 所构成的集合, 加法和数乘都依分量定义. 这个空间常记作 K^n.

(ii) 全体定义在实数轴 $K=\mathbb{R}$ 上的实值函数 $f(x)$ 所构成的集合.

(iii) 全体定义在任一集合 S 上, 且取值在 K 中的函数所构成的集合.

(iv) 全体系数取自 K 且次数 $<n$ 的多项式所构成的集合.

练习 3 证明 (i) 和 (iv) 同构.

练习 4 证明: 若 S 仅含 n 个元素, 则 (i) 和 (iii) 同构. 3

练习 5 证明: 若 $K=\mathbb{R}$, $S\subseteq\mathbb{R}$ 且 S 仅含 n 个不同的元素时, (iii) 和 (iv) 同构.

定义 称线性空间 X 的一个子集 Y 为**子空间(subspace)**, 如果 Y 中元素的和与数乘仍属于 Y.

子空间的例子

(a) X 同例 (i), Y 是首分量与末分量均为零的全体向量 $(0,a_2,\cdots,a_{n-1},0)$ 所构成的集合.

(b) X 同例 (ii), Y 是全体以 π 为周期的周期函数所构成的集合.

(c) X 同例 (iii), Y 是 S 上的全体常函数所构成的集合.

(d) X 同例 (iv), Y 是全体偶多项式所构成的集合.

定义 线性空间 X 的两个子集 Y, Z 的**和(sum)**，记作 $Y+Z$，是全体形如 $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\ (\boldsymbol{y}\in Y, \boldsymbol{z}\in Z)$ 的向量所构成的集合.

练习 6 证明：若 Y, Z 均为 X 的线性子空间，则 $Y+Z$ 也是.

定义 线性空间 X 的两个子集 Y, Z 的**交(intersection)**，记作 $Y\cap Z$，是 Y, Z 的所有公共向量 $\boldsymbol{x}$ 所构成的集合.

练习 7 证明：若 Y, Z 均为 X 的线性子空间，则 $Y\cap Z$ 也是.

练习 8 证明：由线性空间 X 的零元素构成的集合 $\{\mathbf{0}\}$ 是 X 的一个子空间. 称作**平凡子空间(trivial subspace)**.

定义 线性空间中向量 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_j$ 的一个**线性组合(linear combination)**是具有下列形式的一个向量：

$$k_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+k_j\boldsymbol{x}_j,\quad k_1,\cdots,k_j\in K.$$

练习 9 证明：$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_j$ 的全体线性组合所构成的集合是 X 的一个子空间，并且是 X 的包含 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_j$ 的最小的子空间. 这个子空间称为**由 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_j$ 张成的子空间(subspace spanned by $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_j$)**.

定义 如果任意 $\boldsymbol{x}\in X$ 都可以表示成 X 中的向量 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 的线性组合，则称 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ **张成(span)**整个空间 X.

定义 如果 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_j$ 之间存在非平凡的线性关系，即满足

$$k_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+k_j\boldsymbol{x}_j=0,$$

4 其中 $k_1,\cdots,k_j$ 不全为零，则称 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_j$ **线性相关(linearly dependent)**.

定义 如果一组向量 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_j$ 不是线性相关的，则称它们**线性无关(linear independent)**.

练习 10 证明：若向量 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_j$ 线性无关，则每个 $\boldsymbol{x}_i$ 都不是零向量.

引理 1 设向量 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 张成线性空间 X. 若 X 中的向量 $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_j$ 线性无关，则

$$j\leqslant n.$$

证明 由于 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 张成 X, X 中的任意向量都能写成 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 的线性组合. 特别地，对于 $\boldsymbol{y}_1$，有

$$\boldsymbol{y}_1=k_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{x}_n.$$

因为 $\boldsymbol{y}_1\neq\mathbf{0}$(见练习 10)，所以上式中的 k 不全为零. 不妨设 $k_i\neq 0$，则 $\boldsymbol{x}_i$ 可以表示成 $\boldsymbol{y}_1$ 以及其余 $\boldsymbol{x}_s$ 的线性组合. 于是将原来全体 $\boldsymbol{x}$ 向量中的 $\boldsymbol{x}_i$ 替换为 $\boldsymbol{y}_1$ 后，得到的向量集仍可张成 X. 如果 $j\geqslant n$，将上述过程重复 $n-1$ 次，就知 $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n$