普通高等教育“十一五”国家级规划教材

数学分析教程

下册

李忠 方丽萍 编著

数学基础课程系列
简明教材

高等教育出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

数学基础课程系列简明教材

数学分析教程

(下 册)

李 忠 方丽萍 编著

高等教育出版社

内容提要

本书是为综合性大学与师范类院校的数学类专业编写的数学分析教材，全书共分上、下两册。上册的内容为一元微积分学与多元微分学，下册的内容为多元积分学、无穷级数、广义积分及傅里叶级数等。作者根据多年的教学实践经验，对数学分析的内容体系作了精心的构架与调整，分散了难点，突出了分析学的基础知识与基本训练，使全书内容深入浅出、平实自然、有用有趣。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析教程. 下册/李忠，方丽萍编著. —北京：高等教育出版社，2008.11

ISBN 978-7-04-024866-1

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①李…②方… Ⅲ. 数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 153167 号

策划编辑 李　蕊　**责任编辑** 兰莹莹　**封面设计** 张申申

责任绘图 黄建英　**版式设计** 王艳红　**责任校对** 王　雨

责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京地质印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com

开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2008年11月第1版
印　　张	13.75	印　　次	2008年11月第1次印刷
字　　数	350 000	定　　价	20.10元

物料号　24866-00

目　　录

第八章 重 积 分

自本章开始,我们进入多元函数的积分学.

与一元函数的积分的单一形式相比,多元函数的积分学显得丰富多彩.多元函数的积分是多种多样的:重积分,曲线积分以及曲面积分.它们各自有着自己的物理或几何的背景,而它们彼此之间又有着深刻的联系.

本章先讨论重积分.

§1 二重积分的概念

所谓二重积分是一个二元函数在一个平面区域上的积分.它是一元函数的定积分的直接推广.为了定义二重积分,我们需要先定义平面集合的面积.

1. 平面集合的面积

当我们谈论一个平面区域的面积时,似乎大家都对面积一词有一个直观的了解.但它需要数学上的严格定义.

设 $E\subset\mathbf{R}^2$ 是一个有界集合.下面我们定义它的面积.

我们取一个充分大的矩形

$$R=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\},$$

使得 $E\subset R$.在 $[a,b]$ 区间及 $[c,d]$ 区间中分别插入 m 个分点及 n 个分点:

$$(T):\begin{cases}a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b;\\ c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d.\end{cases}$$

那么这些分点所对应的坐标直线 $x = x_i$ 及 $y = y_j$ 对矩形形成了一个分割,将 R 分解成 $m \times n$ 个小矩形

$$R_{ij} = \{(x,y): x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j\}$$

$$(i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n).$$

我们用 $m(R_{ij})$ 表示 R_{ij} 的面积,并考虑两个和:

$$\Sigma^*(T) = \sum_{i,j}{}' m(R_{ij}) \quad (R_{ij} \cap E \neq \varnothing),$$

$$\Sigma_*(T) = \sum_{i,j}{}'' m(R_{ij}) \quad (R_{ij} \subset E).$$

前一个和是一切与 $\overline{E}$ 有交集的小矩形 R_{ij} 的面积之和;而后一个和是一切包含于 E 的内部的 R_{ij} 的面积之和. 这两个和的直观几何意义是很明显的(见图 8.1.1).

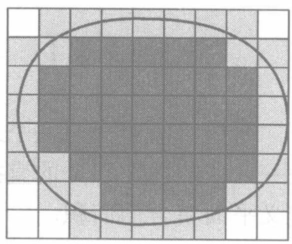

图 8.1.1

由 $\Sigma^*(T)$ 与 $\Sigma_*(T)$ 的定义立即看出两个事实:

(i) $\Sigma_*(T) \leqslant \Sigma^*(T)$;

(ii) 当分割 T 加密时,$\Sigma^*(T)$ 不增,而 $\Sigma_*(T)$ 不减.

请读者自己证明这两个结论.

我们有下列的命题:

命题 1.1 对于矩形 R 的任意两个分割 T_1 及 T_2,我们有 $\Sigma_*(T_1) \leqslant \Sigma^*(T_2)$.

证 记 T 为 T_1 与 T_2 的分点合并后所形成的新分割,这时 T 是 T_1 与 T_2 的一种加细分割. 显然,当分割加细时,Σ_* 不减,而 Σ^* 不增. 因此,我们得到

$$\Sigma_*(T_1) \leqslant \Sigma_*(T) \leqslant \Sigma^*(T) \leqslant \Sigma^*(T_2).$$

证毕.

令

$$m_*(E) = \sup_T\{\Sigma_*(T)\},$$

$$m^*(E) = \inf_T\{\Sigma^*(T)\}.$$

我们将 $m_*(E)$ 称为集合 E 的**内面积**,将 $m^*(E)$ 称为 E 的**外面积**.由命题 1.1 立即得到:

命题 1.2 $m_*(E) \leqslant m^*(E)$.

例 1.1 设 $y = f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数,且 $f(x) > 0$. 令 D 是 $x = a, x = b$ 与 $y = f(x)$ 所围的区域. 那么

$$m_*(D) = m^*(D) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

为什么? 请读者自己解答.(提示:将相对 $[a,b]$ 的分割 $y = f(x)$ 所对应的达布大和与小和解释为集合的 Σ^* 与 Σ_*,然后再利用连续函数的可积性或达布定理.)

例 1.2 设集合

$$E = \{(x,y): 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, \text{且 } x \text{ 与 } y \text{ 为有理数}\},$$

这时对单位矩形的任意分割 T 都有

$$\Sigma^*(T) = 1, \quad \Sigma_*(T) = 0.$$

从而

$$m^*(E) = 1, \quad m_*(E) = 0.$$

定义 若一个平面有界集合 E 满足条件

$$m_*(E) = m^*(E),$$

则称集合 E 是**可求面积**的. 若 E 为可求面积的,则称数 $m_*(E) = m^*(E)$ 为 E 的**面积**,并记之为 $m(E)$.

例 1.1 中的区域 D 是可求面积的,并且

$$m(E) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 1.2 告诉我们,不可求面积的集合是存在的.

命题 1.3 设 E 为平面上的一个有界集合,∂E 表示它的边界点集合. 那么,E 是可求面积的充要条件是

$$m^*(\partial E) = 0.$$

证 我们先证条件的必要性. 假定 E 为可求面积的,这时 $m^*(E) = m_*(E)$. 由上确界与下确界的性质可知,对任意给定 $\varepsilon > 0$,存在 T_1 及 T_2,使得

$$0 \leqslant m_*(E) - \Sigma_*(T_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leqslant \Sigma^*(T_2) - m^*(E) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $m^*(E) = m_*(E)$ 推出

$$0 \leqslant \Sigma^*(T_2) - \Sigma_*(T_1) < \varepsilon.$$

将 T_1 与 T_2 合并为 T,则 $\Sigma^*(T) \leqslant \Sigma^*(T_2)$, $\Sigma_*(T_1) \leqslant \Sigma_*(T)$,并有

$$0 \leqslant \Sigma^*(T) - \Sigma_*(T) < \varepsilon.$$

根据定义,$\Sigma^*(T) - \Sigma_*(T)$ 恰好就是分割 T 中那些与 ∂E 有交点的小矩形的面积之和. 我们将它记作 $\Sigma^*(T;\partial E)$(这里标出 ∂E 是为强调这个 Σ^* 是关于集合 ∂E 的). 于是,我们有

$$\Sigma^*(T;\partial E) < \varepsilon.$$

由此又推出

$$m^*(\partial E) < \varepsilon.$$

由于 ε 是任意正数,故有 $m^*(\partial E) = 0$.

现在我们证明条件的充分性. 假定 $m^*(\partial E) = 0$. 这时,对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在一个分割 T,使得

$$0 \leqslant \Sigma^*(T;\partial E) - m^*(E) < \varepsilon,$$

也即有

$$\Sigma^*(T;\partial E) < \varepsilon.$$

注意到 $\Sigma^*(T;\partial E)$ 恰好就是 $\Sigma^*(T) - \Sigma_*(T)$,于是我们得到 $\Sigma^*(T) - \Sigma_*(T) < \varepsilon$,并进一步推出

$$0 \leqslant m^*(E) - m_*(E) \leqslant \Sigma^*(T) - \Sigma_*(T) < \varepsilon.$$

由 ε 的任意性即得 $m^*(E) = m_*(E)$. 证毕.

当 $m^*(E) = 0$ 时,我们称集合 E 为**零面积集合**. 上述命题这时可改述为:

有界集合 E 是可求面积的，当且仅当其边界 ∂E 是零面积集合.

一般说来，一个区域的边界可能十分复杂，但是可以证明，**当区域的边界是逐段光滑曲线时，其边界是零面积集合**. 也就是说，**边界是逐段光滑曲线时，相应的区域是可求面积的.**

假定集合 $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$，其中 E 与 $E_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是可求面积的，并且集合

$$E_i \cap E_k \quad (i \neq k; i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

都是零面积集合，那么

$$m(E) = m(E_1) + m(E_2) + \cdots + m(E_n).$$

这条性质称作**面积的可加性**.

2. 二重积分的定义

现在我们定义函数 $z = f(x, y)$ 在一个区域 D 上的二重积分.

假定 D 是平面上的一个有界闭区域，其边界 ∂D 是零面积集合. 又假定 $z = f(x, y)$ 是定义在 D 上的一个函数. 我们可以用任何方式将区域 D 划分成 n 个小区域：

$$T: D_1, D_2, \cdots, D_n$$

（见图 8.1.2）. 这些小区域互不重叠，即两两无公共内点.

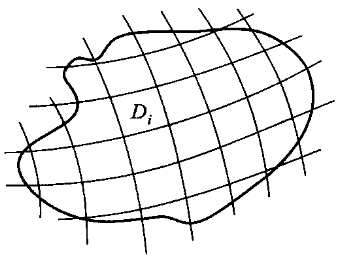

图 8.1.2

我们进一步假定上述分割中每一个小区域 D_i 都是可求面积的. 令 $\Delta\sigma_i$ 是 D_i 的面积，即 $\Delta\sigma_i = m(D_i)$，$i = 1, 2, \cdots, n$. 我们考察和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i,$$

其中 $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ 是任意取的一点，记 $\mathrm{diam}(D_i)$ 为 D_i 的直径，即

$$\mathrm{diam}(D_i) = \sup\{d(p_1, p_2) : p_1, p_2 \in D_i\},$$

其中 $d(p_1, p_2)$ 表示点 p_1 与 p_2 之间的距离. 又令

$$\lambda = \max\{\mathrm{diam}(D_i): 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

显然 λ 是依赖于 D 的分割的.

假若存在一个数 I,对任意的 $\varepsilon > 0$,存在一个 $\delta > 0$,使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i - I\right| < \varepsilon,$$

只要 $\lambda < \delta$,不论分割以任何方式进行,也不论中间点 (ξ_i, η_i) 如何选取,都是如此,这时我们则称黎曼和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

当 $\lambda(T) \to 0$ 时以 I 为极限,即

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i = I.$$

这时我们还称 $z = f(x, y)$ 在 D 上可积,并称 I 为 $z = f(x, y)$ 在 D 上的二重积分,记作

$$I = \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

或

$$I = \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例 1.3 设 D 为一有界闭区域,且可求面积. 则函数 $f(x, y) \equiv 1$ 在 D 上可积,且

$$\iint_D 1\,\mathrm{d}\sigma = m(D).$$

二重积分的几何意义: 假定 D 是可求面积的有界闭区域,而 $z = f(x, y)$ 是 D 上的连续函数①,$f(x, y) \geqslant 0$. 这时,以 D 为底,以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶便构成了 $Oxyz$ 空间中的一个曲顶柱体. 二重积分

① 后面将证明连续函数是可积的.

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

恰好就是这个曲顶柱体的体积(见图 8.1.3).

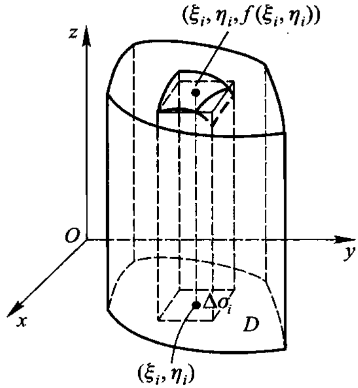

图 8.1.3

3. 可积的必要条件与充分条件

定理 1.1 设 D 为一个可求面积的有界闭区域. 则函数 $z=f(x,y)$ 在 D 上可积的必要条件是 $f(x,y)$ 在 D 上有界.

证明与一元情况类似,略去.

像一元函数一样,我们可以引入达布大和与达布小和的概念,并证明可求面积的有界闭区域上的连续函数是可积的.

假定 T 是可求面积的有界闭区域 D 的一个分割: $D_1, D_2, \cdots, D_n$,其中每个 D_i 均为一个可求面积的小区域,而且两两互不重叠. 又假定 $z=f(x,y)$ 是 D 上的连续函数. 令

$$M_i = \sup\{f(x,y):(x,y)\in D_i\},$$

$$m_i = \inf\{f(x,y):(x,y)\in D_i\},$$

下面的两个和

$$D(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta\sigma_i,$$

$$d(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta\sigma_i$$

分别称作**达布大和**与**达布小和**.显然,黎曼和要在这两个和之间:

$$d(T)\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\leqslant D(T).$$

像一元函数一样,很容易证明:**当分割 T 加细时,达布小和不减;而达布大和不增**.

此外,我们可仿照一元函数的情况,定义

$$\bar{I}=\inf_T\{D(T)\},\quad \underline{I}=\sup_T\{d(T)\}.$$

这样,我们有

$$d(T)\leqslant\underline{I}\leqslant\bar{I}\leqslant D(T).$$

重复一元函数可积性的讨论步骤,可以证明:

定理 1.2 我们有

$$\lim_{\lambda(T)\to0}D(T)=\bar{I},\quad \lim_{\lambda(T)\to0}d(T)=\underline{I}.$$

定理 1.3 $z=f(x,y)$ 在 D 上可积的充要条件是 $\bar{I}=\underline{I}$.

定理 1.4 $z=f(x,y)$ 在 D 上可积的充要条件是

$$\lim_{\lambda\to0}[D(T)-d(T)]=0.$$

这个条件可以写成

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i=0,$$

其中 $\omega_i=M_i-m_i$ 是 $z=f(x,y)$ 在 D_i 中的振幅.

假定 D 是可求面积的有界闭区域且 $z=f(x,y)$ 在 D 上连续.这时 $z=f(x,y)$ 在 D 上一致连续.因此,对于给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta$ 时,

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon.$$