21世纪高职高专规划教材

高等数学

GAO DENG SHU XUE

主　编：付振中
副主编：樊晓红　臧玉强
主　审：李海涛

中国工商出版社

21 世纪高职高专规划教材

高等数学

GAODENGSHUXUE

主　编:付振中
副主编:樊晓红　臧玉强
编　委:林丹凤　毛秀山
　　　　王　刚　刘　佳
主　审:李海涛

中国工商出版社

策　　划/ 邱秉新
责任编辑/ 张欣然
封面设计/ 胡倖僖

图书在版编目(CIP)数据
高等数学/付振中主编. -北京:中国工商出版社,2008.8
ISBN 978-7-80215-272-4

Ⅰ.高…　Ⅱ.付…　Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 131792 号

书　名/ 高等数学
主　编/ 付振中

出版·发行/ 中国工商出版社
经销/ 新华书店
印刷/ 北京市朝阳区小红门印刷厂
开本/ 787 毫米×1092 毫米　1/16　印张/ 9.5　字数/ 150 千字
版本/ 2008 年 8 月第 1 版　2008 年 8 月第 1 次印刷
印数/ 01-5000 册

社址/ 北京市丰台区花乡育芳园东里 23 号(100070)
电话/ (010)63730074,83670785　电子邮箱/ zggscbs@263.net

书号/ ISBN 978-7-80215-272-4/O·1
定价/ 20.00 元

前言

为了适应高职高专教育的需要，培养更多的实用型人才，我们根据教育部高职高专规划教材的要求，遵循教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在参考、研究、剖析、对比多种同类教材的基础上，组织具有高职高专教学经验的教师集体编写了本书。

高等数学是高职高专各专业必修的重要基础课。我们在编写本教材时，根据高职高专培养目标的定位和学生的实际情况，注意突出以应用为目的，以必需够用为度的高职教学特色，兼顾专业后续课程教学对数学知识的要求。本教材具有以下特色：

(1)在尽可能保持数学学科特点的基础上，对教学内容进行了精简、更新、重组，删除与高职层次不符的内容，淡化理论性和系统性，加强实用性和针对性，体现适应、实用、简明的要求，并注意根据共性及实际教学课时数精选内容。

(2)在教学内容的编排上做到由易到难，循序渐进，强调数学概念与实际问题的联系，从具体例子抽象到概念，注意与高中课程的衔接，特别是考虑到高职学生的心理和思维特点，在每节后，选编了紧扣教学内容和例题的习题，教师可以边讲边练，让学生在课堂上能动脑动手，对所学内容及时理解，形成师生互动的课堂教学气氛。

(3)在处理深度广度、习题选编、语言表述等问题时，充分考虑学生实际、教学实际，讲解基本概念和方法时力求通俗易懂，淡化逻辑证明，利用几何说明。每章末有本章小结，指出了重点难点、教学目的，可供学生学习时了解本章宏观结构。自测题可以帮助学生梳理知识框架，掌握重点，自我检测。

(4)本书着重强化了微积分理论的教学，在教材内容的取舍上注意了“文理兼容”，充分体现了高等数学在职业教育教学中为专业教学服务这一根本宗旨。

本书是高职高专理工类、经济类专业的通用教材，也可以作为成人高等学校及本科院校举办的二级职业技术学院各专业高等数学教材。

本书由付振中担任主编，樊晓红、臧玉强任副主编。其中第一章由王刚编写；第二章由樊晓红编写；第三章由毛秀山编写；第四章由樊晓红编写；第五章由林丹凤编写；由李海涛担任本教材的主审工作。

由于编者水平有限，加上任务本身的难度大，时间又紧，书中不足和考虑不周之处肯定不少，错误也在所难免，我们期望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书在教学实践中不断完善。

编　者

2008 年 7 月

目 录

第一章　函数、极限与连续

在中学已经学习过函数的定义，讨论过函数的单调性、奇偶性、周期性和有界性等函数的几何特性，为了《高等数学》学习的方便，本章我们先复习一下函数的有关知识.

第一节　函数的概念

一、函数

在同一现象所碰到的各种变量中，通常并不都是独立变化的，它们之间存在着依赖关系，例如：

例 1　正方形的边长 x 与面积 S 之间的关系为：$S=x^2$，显然当 x 确定了，S 也就确定了.

抽去上面例子中所考虑的量的实际意义，它表达了两个变量之间的相互依赖关系，这种关系给出了一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义　设 x 和 y 为两个变量，D 为一个给定的数集，如果对每一个 $x\in D$，按照一定的法则 f 变量 y 总有确定的数值与之对应，就称 y 为 x 的函数，记为 $y=f(x)$. 数集 D 称为该函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.（或函数）.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，依法则 f 的对应值称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值. 所有函数值组成的集合 $W=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域.

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总是只有一个，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数. 例 1 的函数就是单值函数. 多值函数如：

例 2　$y^2=x$，对于任意正实数 x 有一对互为相反数的实数 $y=\pm\sqrt{x}$ 与之对应，是多值函数.

以后凡没有特别的说明，函数都是指单值函数.

下面举几个特殊函数的例子.

例3 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, x>0\\0, x=0\\-1, x<0\end{cases}$$，它的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$.

例4 取整函数 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分记作 $[x]$，例如，$[0.5]=0$，$[\pi]=3$，$[-1.5]=-2$，把 x 看作变量，则得一函数

$y=[x]. x\in R.$

称为取整函数.

例5 狄立克莱(*Dirichlet*)函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1,\text{当 } x \text{ 为有理数时}\\0,\text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$$

此函数的图形作不出来，其直观想象是：有无数多个点稠密地分布在 x 轴上，也有无数多个点稠密地分布在直线 $y=1$ 上.

二、具有某些特性的函数

1\. 单调函数 设函数 $f(x)$ 定义域为 D，区间 $I\subset D$，对于区间 I 上任意的两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的，I 叫做单调增区间；当 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的，I 叫做单调减区间. 单调增加和单调减少的函数统称单调函数，单调增区间和单调减区间统称为单调区间.

2\. 奇函数和偶函数 如果 $f(x)$ 的定义域为 $(-a,a)$（这里 $a>0$），并且定义域内的任何 x 满足 $f(-x)=-f(x)$，就称 $f(x)$ 为奇函数，它的图形关于原点对称；如果对定义域内的任何 x 满足 $f(-x)=f(x)$，就称 $f(x)$ 为偶函数，它的图形关于 y 轴对称.

3\. 周期函数 凡使 $f(x+\omega)=f(x)$ 成立的函数 $f(x)$ 称为周期函数，ω 称为周期. 如正弦函数 $y=\sin x$ 是周期函数，周期为 2π. 按照周期的定义，$\pm4\pi$，$\pm6\pi$ 也是正弦函数的周期，而 2π 是它的最小正周期. 通常函数的周期专指它的最小正周期. 但并不是每一个周期函数都有最小正周期，例如狄立克莱函数，任何有理数 ω 都是它的周期，但是它没有最小正周期.

4\. 有界函数 设函数 $f(x)$ 在数集 X 有定义，如果存在 $M>0$，使得对于任意的 $x\in X$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 有界；如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

三、复合函数与反函数

1. 复合函数

我们先考察一个例子. 设有一个质量为 m 的沿直线运动的物体,速度是 v,那么它的动能为

$$E=\frac{1}{2}mv^2$$

如果这个物体是自由落体,其速度为

$$v=gt$$

其中 g 是重力加速度. 于是它的动能是

$$E=\frac{1}{2}m(gt)^2=\frac{1}{2}mg^2t^2$$

现在抽去其中的具体意义,便得到这样两个函数:

$$E=\frac{1}{2}mv^2, v=gt,$$

将 $v=gt$ 代到 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 中去,就得知 E 通过中间变量 v 而为 t 的函数. 这种形式的函数称为复合函数.

一般地说,设 $y=f(u)$,定义域为 D_1,$u=\varphi(x)$,定义域为 D_2,值域为 W_2,且 $W_2\subset D_1$,这样对于 $\forall x\in D_2$,由 $u=\varphi(x)$ 可算出函数值 $u\in W_2\subset D_1$ 所以 $u\in D_1$,由 $y=f(u)$ 又可算出其函数值 y,因此对于 $\forall x\in D_2$,有确定的值 y 与之对应,从而得一个以 x 为自变量,y 为因变量的函数,我们称之为以 $y=f(u)$ 为外函数,$u=\varphi(x)$ 为内函数复合成的复合函数,记为 $y=f(\varphi(x))$,其中 u 为中间变量.

利用这一概念,有时可以把函数分解为几个函数,另一方面也可以用它来产生新的函数. 应当指出,函数 $u=\varphi(x)$ 的值域不能超出函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_1,这是极为重要的,否则不能由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合成一个复合函数.

例 6 设 $f(x)=2x^2+1, g(x)=\cos x$,求 $f(g(x)), g(f(x)), f(f(x))$

解 设 $f(x)=2x^2+1, g(x)=\cos x$,那么将 $u=g(x)$ 代到 $f(u)$ 里去,就得到

$$f(g(x))=2g^2(x)+1=2\cos^2 x+1$$

同样,

$$g(f(x))=\cos(f(x))=\cos(2x^2+1),$$

$$f(f(x))=2f^2(x)+1=8x^4+8x^2+3.$$

2. 反函数

设$f(x)$的定义域为D,值域为W,因此,对$\forall y\in W$,必$\exists x\in D$,使得$f(x)=y$,这样的x可能不止一个,若将y当作自变量,x当作因变量,按函数的概念,就得到一新函数$x=\varphi(y)$(一般记为$x=f^{-1}(y)$),称$y=f(x)$的反函数,并称$y=f(x)$为直接函数.

此时,$y=f(x)$当然也是$x=\varphi(y)$的反函数,或者说,$y=f(x)$和$x=\varphi(y)$互为反函数.前者的定义域和后者的值域相同,前者的值域和后者的定义域相同.

例如,直接函数$y=f(x)=4x+3,x\in R$的反函数为

$$x=f^{-1}(y)=\frac{1}{4}(y-3),y\in R.$$

习惯用上x表示自变量,y表示因变量,于是我们约定$y=f^{-1}(x)$也是直接函数$y=f(x)$的反函数.

我们还有下面的结论:

若函数$y=f(x)$在区间I上单调,则$y=f(x)$在区间I一定存在反函数.

四、初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这五类函数叫做基本初等函数.

1. 幂函数$y=x^a$(a为实数),$x\in(0,+\infty)$

它的定义域和值域依a的取值不同而不同,但是无论a取何值,幂函数在$(0,+\infty)$内总有定义.当$a\in \mathbf{N}$或$a=\dfrac{1}{2n-1}$时,$y=x^a$定义域为R.

2. 指数函数　$y=a^x(a>0,a\neq1),x\in(-\infty,+\infty)$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$.

3. 对数函数　$y=\log_a x(a>0,a\neq1),x\in(0,+\infty)$

定义域为　$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$.对数函数$y=\log_a x$是指数函数$y=a^x$的反函数.

特别当$a=e=2.718\quad 281\quad 828\cdots$作为指数函数和对数函数的底时,函数分别记为$y=e^x$和$y=\ln x$.

4. 三角函数

三角函数有正弦函数$y=\sin x$、余弦函数$y=\cos x$、正切函数$y=\tan x$、余切函数$y=\cot x$、正割函数$y=\sec x$和余割函数$y=\csc x$.三角函数为周期函数,正弦和余弦函数的周期为2π,正切和余切函数的周期为π.还要指出,在微积分中,三角函数的自变量x一般总是弧度.

5. 反三角函数

反三角函数主要包括反正弦函数 $y=\arcsin x$、反余弦函数 $y=\arccos x$、反正切函数 $y=\arctan x$ 和反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 等.

通常把由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和有限次的复合所得到的并能用一个解析式表达的函数,称为初等函数. 例如

$$y=\ln(\sin x+4)e^{2x}$$

$$y=\sqrt{\cos x+a^x}$$

就是初等函数.

初等函数的表达形式直接明了,研究起来比较方便. 本书中讨论的函数主要是初等函数.

下面简单地介绍一下邻域的概念.

五、邻域

设 α 与 δ 是两个实数,并且 $\delta>0$,我们把满足不等式 $|x-\alpha|<\delta$ 的全体实数 x 称为 α 的 δ 邻域,记作 $U(\alpha,\delta)$,即

$$U(\alpha,\delta)=\{x|\alpha-\delta<x<\alpha+\delta\}=\{x||x-\alpha|<\delta\}$$

点 α 称为这邻域的中心,δ 称为这邻域的半径.

因为 $|x-\alpha|$ 表示点 x 与点 α 间的距离,所以 $U(\alpha,\delta)$ 表示:与点 α 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

满足不等式 $0<|x-\alpha|<\delta$ 的全体实数 x 称为点 α 去心的 δ 邻域,记作 $\dot{U}(\alpha,\delta)$,即

$$\dot{U}(\alpha,\delta)\{x|0<|x-\alpha|<\delta\}.$$

习题 1－1

1. 填空题:

(1) 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形关于________对称;

(2) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,则 $f(x^2+1)$ 的定义域是________;

(3) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数是________;

(4) $f(x)=x+1,\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,则 $f[\varphi(x)+1]=$________,$\varphi[f(x)+1]=$________

(5) $y=\log_2(\sin x+2)$是由简单函数________和________复合而成；

(6) $f(x)=x^2+1,\varphi(x)=\sin 2x$，则$f(0)=$________，$f(\frac{1}{a})$________，$f[\varphi(x)]=$________.

2. 选择题：

(1) 下列函数中既是奇函数又是单调增加的函数是(　　)；

A. $\sin^3 x$　　B. x^3+1　　C. x^3+x　　D. x^3-x

(2) 设$f(x)=4x^2+bx+5$，若$f(x+1)-f(x)=8x+3$，则b应为(　　)；

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

(3) $f(x)=\sin(x^2-x)$是(　　).

A. 有界函数　　B. 周期函数

C. 奇函数　　D. 偶函数

3. 求$y=\sqrt{3-x}+\arcsin\frac{3-2x}{5}$的定义域.

4. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$；　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$；

(3) $y=\lg(x+2)+1$；　　(4) $y=\lg\sin x$.

5. 设$f(x)=x^{-3}$，$g(x)=e^x$，求$f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$f[f(x)]$，$g[g(x)]$.

6. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^{-3}$；　　(2) $f(x)=(\frac{4}{5})^x$；

(3) $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$；　　(4) $f(x)=x\sin x$.

7. 写出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sin^3(8x+5)$；　　(2) $y=\tan(\sqrt[3]{x^2+5})$；

(3) $y=2^{1-x^2}$；　　(4) $y=\lg(3-x)$.

第二节　极限的定义与性质

在许多实际问题中，为了掌握变量的变化规律，仅仅通过有限次的算术运算是求不出来的，往往需要从它的变化过程中来判断它的变化趋势.

例如，有一个变量，它开始时是$\frac{1}{2}$，然后是$\frac{1}{3}$，接着是$\frac{1}{4}$，然后$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$，…，$\frac{1}{n+1}$，…

如此无限地变下去，虽然是无穷尽的，但它的变化却有一个趋势，就是在它的变化过程中越来越接近0. 我们就说这个变量的极限是0.

又如，求圆的面积和圆周长. 人们最初只知道求多边形的面积和求直线段的长度，通过极限的思想就可以解决这个问题，其方法是：在一个圆周内，作它的内接正多边形，这时正多边形的面积和周长都不会等于圆面积和圆周长. 然而，只要正多边形的边数不断增加，这些正多边形的面积和周长必将随着边数的不断增加而不断地接近圆面积和圆周长. 这个"不断接近"的过程就是一个极限过程，正所谓"割之弥细，失之越少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣."

在解决实际问题中逐渐形成的这种极限方法，已成为高等数学中的一种基本方法，因此有必要作进一步的阐明.

一、数列极限的定义

如果当 n 无限增大时，数列 $\{u_n\}$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称 A 为数列 $\{u_n\}$ 的极限，或称数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A，记为

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A \text{ 或 } u_n \to A(n\to\infty) \text{ 或当 } n\to\infty \text{ 时}, u_n\to A$$

如果数列没有极限，就说数列是发散的.

极限存在的数列称为收敛数列，极限不存在的数列称为发散数列.

二、自变量趋向有限值时函数的极限

先考察一个具体的例子. 设 $f(x)=3x+1$，由图1－1我们可以看出，当 x 无限趋于1时，$3x+1$ 就会无限趋于4，因此可以推知，当 $x\to 1$ 时，$f(x)=3x+1$ 的极限是4. 如图1－1.

函数在 x_0 点的极限的定义　如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称数 A 为当 $x\to x_0$ 时的函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

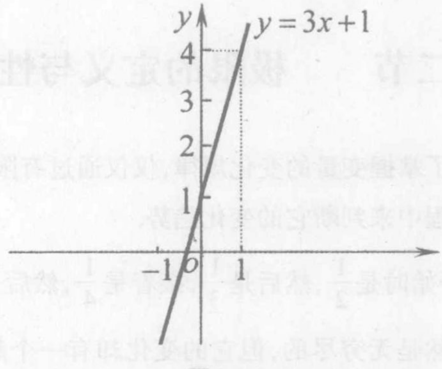

图 1－1

这时也称函数 $f(x)$ 在 x_0 的极限存在. 如果这样的常数不存在,那么称 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 没有极限.

上述 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限概念中,x 是从 x_0 的两侧趋向于 x_0. 但有时只能或只需讨论 x 是仅从 x_0 的左侧趋向于 x_0 的情形,或 x 是仅从 x_0 的右侧趋向于 x_0 的情形,这样得到下面两个单侧极限定义.

右极限的定义　如果当 $x \to x_0^+$ 时,函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A,那么就称数 A 为当 $x \to x_0$ 时的函数 $f(x)$ 的右极限,记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

左极限的定义　如果当 $x \to x_0^-$ 时,函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A,那么就称数 A 为当 $x \to x_0$ 时的函数 $f(x)$ 的左极限,记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A.$$

容易证明下面的定理.

定理 1　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A.$

例 1　函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, x < 2 \\ ax, x > 2 \end{cases}$$

当 a 为何值时,$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ 存在. 当 a 为何值时,$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ 不存在.

解　当 $x \to 2^-$ 时 $f(x)$ 的左极限 $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x^2 = 4$

而右极限 $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} ax = 2a$,

于是当 $2a = 4$,即 $a = 2$ 时,$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ 存在,且 $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

当 $2a \neq 4$,即 $a \neq 2$ 时,$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ 不存在.

三、自变量趋向无穷大时函数的极限

下面定义自变量 $x\to\infty$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限.

函数当 $x\to\infty$ 的极限的定义　如果当 $|x|$ 无限增大(即 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A,那么就称数 A 为当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$$

函数当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)的极限的定义　如果当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时,函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A,那么就称数 A 为当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时函数 $f(x)$ 的极限,记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A(\text{或}\lim_{x\to-\infty}f(x)=A).$$

容易证明下面的定理.

定理 2　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

四、函数极限的性质

这些性质的形式比较多,在此我们仅以 $x\to x_0$ 为例来介绍这些性质,需要注意的是:自变量有六个变化过程 $x\to x_0$,$x\to x_0^+$,$x\to x_0^-$,$x\to\infty$,$x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$,其它五个都有类似的结论.

定理 3(极限的唯一性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$,则 $A=B$.

定理 4(局部有界性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时函数 $f(x)$ 有界.

定理 5(局部保号性)　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,而且 $A>0$(或 $A<0$),那么就存在着点 x_0 的某一去心邻域,当 x 在该邻域内时,就有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

(证明略)

五、无穷小

在极限的研究中,极限为 0 的函数有着重要的作用,我们给予特别的讨论. 在以下的讨论中我们也仅仅以 $x\to x_0$ 和 $x\to\infty$ 为例,

其它如 $n\to\infty$,$x\to x_0^+$,$x\to x_0^-$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$ 的情形,请读者自己类似得出.

无穷小的定义　如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,$f(x)$ 以 0 为极限,则称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小量,无穷小量也简称为无穷小.

即，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$），则称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量.

例如，$x\to0$ 时，$x,x^2,x+x^2,\sin x$ 都是无穷小量.

注意

(1)一个函数 $f(x)$ 是无穷小量，是与自变量 x 的变化过程紧密相连的，因此必须指明自变量 x 的变化过程. 如函数 x 是当 $x\to0$ 时的无穷小量，而当 x 趋向于其他数值时，就不一定是无穷小量.

(2)切不可把绝对值很小的常数说成是无穷小量. 但 0 是无穷小量，因为它的任何极限都是 0.

关于无穷小有如下一些结论：

定理 6 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 有极限 A 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$，其中 α 是 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小.

根据极限的运算法则和无穷小的定义，容易证明无穷小的下列性质：

定理 7 有限个无穷小的和也是无穷小.

定理 8 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 1 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

注意，无穷多个无穷小量之和不一定是无穷小量；无穷多个无穷小量之积也不一定是无穷小量.

例 2 求 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}$.

解 $x\to0$ 时 x 是无穷小量，$\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界函数，所以 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

六、无穷大

下面我们介绍另以类型的“极限”，之所以在极限二字上加上引号，是因为“极限值”不是一个实数. 在这个意义上，它与前面讨论过的极限不相同. 先考察一个例子，设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$. 很显然，当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 的值变得要多大就有多大. 为了研究函数的这种特点，我们引入

无穷大的定义 如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷大量，简称无穷大.

如果函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷大量，那么它的极限是不存在的. 但为了描述函数的这种变化趋势，我们也说“函数的极限是无穷大”，并记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.