数学名著译丛

代数学 II

〔荷〕B.L. 范德瓦尔登 著
曹锡华 曾肯成 郝钠新 译
万哲先 校

科学出版社
www.sciencep.com

数学名著译丛

代数学 II

〔荷〕 B. L. 范德瓦尔登 著
曹锡华 曾肯成 郝钢新 译
万哲先 校

科学出版社
北京

图字: 01-2009-2859 号

内 容 简 介

全书共分两卷, 涉及的面很广, 可以说概括了 1920–1940 年代数学的主要成就, 也包括了 1940 年以后代数学的新进展, 是代数学的经典著作之一. 本书是第二卷. 这一卷可分成 3 个独立的章节组: 第 12 至 14 章讨论线性代数、代数和表示论; 第 15 至 17 章是理想理论; 第 18 至 20 章讨论赋值域、代数函数及拓扑代数.

图书在版编目 (CIP) 数据

代数学. II/(荷)范德瓦尔登(Van der Waerden, B. L.)著; 曹锡华等译. —北京: 科学出版社, 2009
(数学名著译丛)
ISBN 978-7-03-024563-2
I. 代… II. ① 范… ② 曹… III. 高等代数 IV. O15
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 072339 号

责任编辑: 赵彦超 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
双 青 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009 年 5 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)
2009 年 5 月第一次印刷 印张: 19
印数: 1—3 000 字数: 362 000

定价: 56. 00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

出 版 说 明

范德瓦尔登的《代数学》是现代数学的一部奠基之作, 这部书不仅对提高数学家的学识修养有很大意义, 对现代数学如扑拓学、泛函分析等以及一些其他科学领域也有重要影响.

我社分别于 1963 年和 1976 年出版了该书的中译本上册 (第五版, 丁石孙, 曾肯成, 郝钢新译, 万哲先校) 和下册 (第四版, 曹锡华, 曾肯成, 郝钢新译, 万哲先校). 2003 年, Springer 出版了该书上册 (第七版) 和下册 (第五版). 在丁石孙先生的支持下, 我社委托陈志杰、赵春来两位教授对原中译本进行审校, 修改了一些现在已不常用的名词术语, 如亏数; 纠正了英文版和原中译本中的部分疏漏和错误; 原书第 I 和 II 卷的 "全书综览图" 不同, 这次也按第 II 卷综览图作了统一处理, 等等. 根据 Springer 出版的英译版本补充翻译了部分章节, 如第 4 章、第 7.7 节、第 12.7 节、第 19.9 节以及第 20.10–20.14 节.

同时, 我们也积极进行寻找原译者的工作, 但是遗憾的是, 我们只与丁石孙和郝钢新先生及曹锡华先生的夫人陈希伦女士取得了联系, 并得到了他们的大力支持和热情帮助, 请其他译者见到本书后与我们联系.

在此谨向所有译者和审校者表示诚挚的谢意!

中译本再版序言

本书的第七版 (德文版) 于 1966 年由 Springer-Verlag 出版, 1970 年被译成英文出版. 第七版在内容安排上有较大的改动, 还增添了少量内容. 科学出版社的同志认为应当重新翻译本书, 这个想法是好的. 现在的中译本是陈志杰教授在德文第四版的中译本的基础上, 依据 2003 年由 Springer-Verlag 出版的英文平装本整理、翻译而成, 赵春来教授作了校对.

丁石孙

2008 年 12 月

中译本序言

代数学是数学的一个重要的基础的分支, 历史悠久. 我国古代在代数学方面有光辉的成就. 一百多年来, 尤其是 20 世纪以来, 随着数学的发展以及应用的需要, 代数学的研究对象以及研究方法发生了巨大的变革. 一系列的新的代数领域被建立起来, 大大地扩充了代数学的研究范围, 形成了所谓近世代数学. 它与以代数方程的根的计算与分布为研究中心的古典代数学有所不同, 它是以研究数字、文字和更一般元素的代数运算的规律及各种代数结构 —— 群、环、代数、域、格等的性质为其中心问题的. 由于代数运算贯穿在任何数学理论和应用问题里, 也由于代数结构及其中元素的一般性, 近世代数学的研究在数学中是具有基本性的. 它的方法和结果渗透到那些与它相接近的各个不同的数学分支中, 成为一些有着新面貌和新内容的数学领域 —— 代数数论、代数几何、拓扑代数、Lie 群和 Lie 代数、代数拓扑、泛函分析等. 这样, 近世代数学就对于全部现代数学的发展有着显著的影响, 并且对于一些其他的科学领域 (如理论物理学、计算机原理等) 也有较直接的应用。

历史上, 近世代数学可以说是从 19 世纪之初发生的, Galois 应用群的概念对于高次代数方程是否可以用根式来解的问题进行了研究并给出彻底的解答, 他可以说是近世代数学的创始者. 从那时起, 近世代数学由萌芽而成长而发达. 大概由 19 世纪的末叶开始, 群以及紧相联系着的不变量的概念, 在几何上、在分析上以及在理论物理上, 都产生了重大的影响. 深刻研究群以及其他相关的概念, 如环、理想、线性空间、代数等, 应用于代数学各个部分, 这就形成近世代数学更进一步的演进, 完成了以前独立发展着的三个主要方面 —— 代数数论、线性代数及代数、群论的综合. 对于这一步统一的工作, 近代德国代数学派起了主要的作用. 由 Dedekind 及 Hilbert 于 19 世纪末叶的工作开始, Steinitz 于 1911 年发表的论文对于代数学抽象化工作贡献很大, 其后自 1920 年左右起以 Noether 和 Artin 及她和他的学生们为中心, 近世代数学的发展极为灿烂.

Van der Waerden 根据 Noether 和 Artin 的讲稿写成《近世代数学》(*Moderne Algebra*), 综合近世代数学各方面工作于一书. 全书分上、下两册, 第一版于 1930—1931 年分别出版. 自出版后, 这本书对于近世代数学的传播和发展起了巨大的推动作用. 到 1959—1960 年, 上、下两册已分别出到第五版和第四版. 时至今日, 这本书仍然是在近世代数学方面进行学习和开展科学研究的一部好书.

当然, 近世代数学是不断向前发展的. 20 世纪 30 年代, 当时所谓近世代数学的一些基本内容已经逐渐成为每个近代数学工作者必备的理论知识, 所以本书从

50 年代第四版起就去掉“近世”两字而改名为《代数学》, 同时做了较大的增补和改写, 但仍保持着原来的基本内容和风格. 至于 Jacobson 的《抽象代数学讲义》和 Bourbaki 的《代数学》等书, 则出版较后而风格和内容亦有异.

本书的第二版曾有武汉大学故教授萧君绛先生译本, 流传不广, 文字亦较艰涩. 华罗庚先生于 1938—1939 年在昆明西南联合大学讲授近世代数课程时, 曾以本书上册为参考编写讲义, 变动较大而非全文照译. 1961 年 9 月国内代数学工作者于北京颐和园举行座谈会时, 皆认为此书新版有迅速译出之必要. 经过一年, 由曹锡华、万哲先、丁石孙、曾肯成、郝钠新诸同志集体合作译出第一、二卷. 今后当能对代数学的教学及科学研究起较大的推动作用. 更希望国内代数学工作者在教学和科学研究实践中有自著的书籍写成出版.

段学复

1962 年 10 月 11 日

于北京大学数学力学系

第五版前言

非常感谢 P. Roquette 提供给我代数微分 udz 的留数定理的漂亮证明, 使得“代数函数”一章有了一个满意的结尾.

在“拓扑代数”一章里, 依照 Bourbaki, 利用滤网实现群、环和域的完备化, 而不是使用第二可数性公理.

有许多重要应用的“线性代数”一章现在移到了卷首,“拓扑代数”放到了最后. 本书现在可以分成三个独立的章节组:

第 12~14 章: 线性代数, 代数, 表示论;

第 15~17 章: 理想论;

第 18~20 章: 赋值域, 代数函数, 拓扑代数.

综览图更清楚地说明了内容间的联系.

B. L. 范德瓦尔登

苏黎世, 1967 年 3 月

第四版前言

第二卷的开始增添了新的两章. 一章叙述单变量的代数函数, 直到得出任意常数域上的 Riemann-Roch 定理; 另一章讨论拓扑代数, 主要考虑拓扑群、环与体的完备化, 以及局部有界和局部紧致体的理论. Fischer 博士审慎地阅读了这两章的手稿, 作者对他所提出的许多有益的意见表示感谢.

“一般理想论”一章中收进了 Krull 关于素理想的形式幂及素理想链的重要定理, 从而作了扩充.

在“代数整量”一章中把整闭环中理想论与赋值论的关系表达得更清楚了. 在“线性代数”一章中增加了关于反对称双线性型的新的一节 (12.8 节).

“代数”一章中例子增多了. 按照 Jacobson 的方式不附加有限条件发展了根的理论. 更强调了 Noether 关于模的直和与直交的观念. 将 Jacobson 的方法与 Noether 的方法相互结合起来, 可以大大地简化几个主要定理的证明.

作者力图通过精简使得本书的篇幅不超出一个可容许的限度, 因此删去了消去法论一章. 关于齐次方程的结式的存在定理, 过去是通过消去法来证明的, 现在在 16.5 节中作为 Hilbert 零点定理的一个推论而出现.

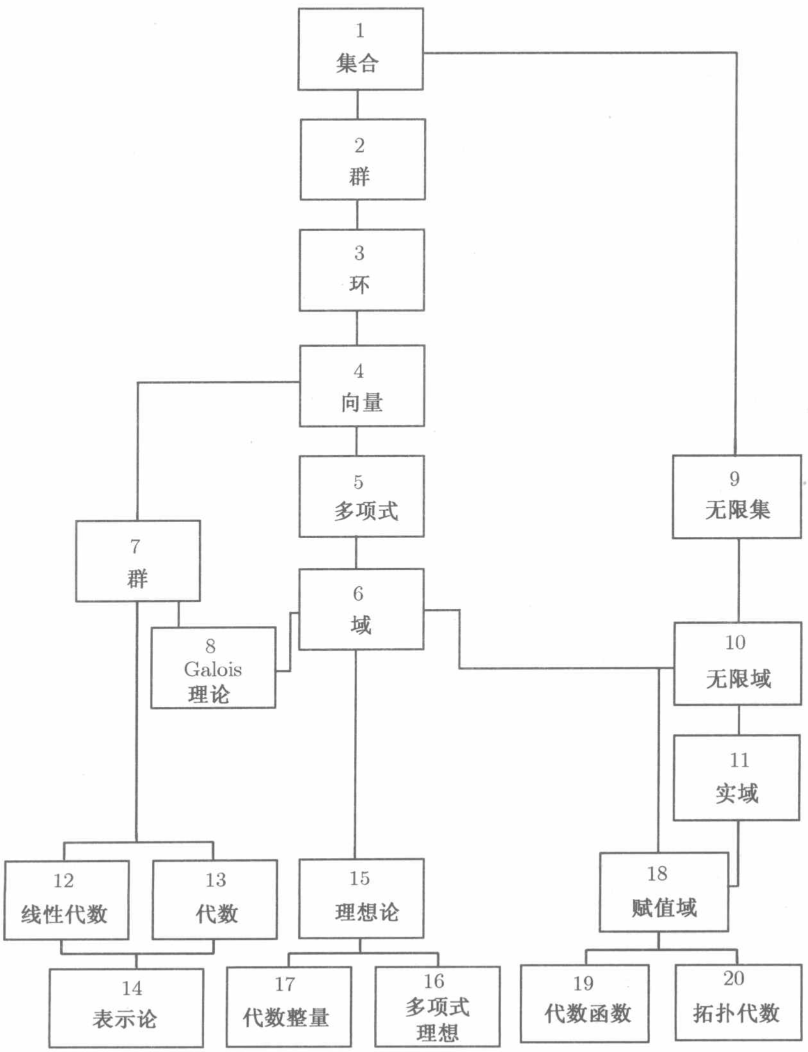
作者感谢 W. Bandler, J. J. Burckhardt 博士, H. Gross 和 H. Keller 博士诸位先生, 他们在校订手稿及阅读校样中给予宝贵的帮助.

B. L. 范德瓦尔登

苏黎世, 1959 年 6 月

全书综览图

I, II 卷中各章总览及其逻辑关系



目　　录

第 12 章　线性代数

线性代数讨论模及其同态, 特别是向量空间及其线性变换. 在 12.3 节, 作为模论的应用, 证明了 Abel 群的基本定理. 12.7 节讨论二次型, 12.8 节则是反对称双线性型.

第 12 章完全建立在带算子群理论 (第 7 章) 之上.

12.1　环上的模

设 $\mathfrak{R}$ 是有单位元 ε 的环, 且设 $\mathfrak{M}$ 是右 $\mathfrak{R}$ 模, 也就是以 $\mathfrak{R}$ 作为算子集的加群. $\mathfrak{M}$ 的元素用拉丁字母表示, 而 $\mathfrak{R}$ 的元素则用希腊字母表示. 除了加群的运算外, 其他合成规则如下所示:

$$(a+b)\lambda = a\lambda + b\lambda,$$
$$a(\lambda+\mu) = a\lambda + a\mu,$$
$$a\cdot\lambda\mu = a\lambda\cdot\mu.$$

由分配律可以导出同样的对减法的规则、负号的乘法规则, 以及乘积为零时可得出其中一个因子等于零 (可以是 $\mathfrak{R}$ 的零元素或 $\mathfrak{M}$ 的零元素).

把乘法写在右方是一个随意的规定. 所有的定理对于写在左方的乘法同样正确.

$\mathfrak{R}$ 的单位元不一定是恒等算子, 对于某些 a, $a\varepsilon$ 可以不等于 a (例如, 如果规定对所有的 a 及 λ 均有 $a\lambda = 0$, 那么所有的合成规则都被满足). 但是总是有

$$a = (a - a\varepsilon) + a\varepsilon, \tag{12.1}$$

其中 $a - a\varepsilon$ 被 ε 的右乘零化, 而第二项则在 ε 的右乘下不变. 第一项构成 $\mathfrak{M}$ 的子模 $\mathfrak{M}_0$, 它被 ε 零化, 从而被 $\mathfrak{R}$ 的任意元素 $\varepsilon\lambda$ 零化. 第二个因子构成子模 $\mathfrak{M}_1$, 其中 ε 是恒等算子. 这两个子模只有一个公共元, 就是零元素, 这是因为其他元素不可能同时被零化又保持不变. 表示式 (12.1) 说明了 $\mathfrak{M}$ 是直和 $\mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_1$. 除去 $\mathfrak{M}$ 的无趣部分 $\mathfrak{M}_0$ 后, 就能得到一个 ε 是恒等算子的模. *以后总是假设 $\mathfrak{R}$ 的单位元是 $\mathfrak{M}$ 的恒等算子.*

特别当 $\mathfrak{R}$ 是体时, $\mathfrak{M}$ 是 4.1 节意义下的 $\mathfrak{R}$ 上向量空间.

模 $\mathfrak{M}$ 称为在 $\mathfrak{R}$ 上*有限*, 如果它的元素可以表示成有限多个基元素 $u_1, \cdots, u_n$ 的线性组合:

$$u_1\lambda_1 + \cdots + u_n\lambda_n. \tag{12.2}$$

这时 $\mathfrak{M}$ 是子模 $u_1\mathfrak{R}, \cdots, u_n\mathfrak{R}$ 之和:

$$\mathfrak{M} = (u_1\mathfrak{R}, \cdots, u_n\mathfrak{R}). \tag{12.3}$$

(12.3) 也可以简写成

$$\mathfrak{M} = (u_1, \cdots, u_n).$$

如果在表示式 (12.2) 中, 系数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 由 u 唯一确定, 就称 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{R}$ 上的**线性型模**. 在这种情形, 和式 (12.3) 是直和:

$$\mathfrak{M} = u_1\mathfrak{R} + \cdots + u_n\mathfrak{R}.$$

根据 4.1 节, 有限维向量空间里总可以选取一个线性无关基 $(u_1, \cdots, u_n)$, 因此是线性型模. 由 4.2 节, 维数 n 与基的选取无关.

把线性型模 $\mathfrak{M} = (u_1, \cdots, u_m)$ 映到线性型模 $\mathfrak{N} = (v_1, \cdots, v_n)$ 的算子同态称为 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{N}$ 内的**线性变换**. 如同 4.5 节, 对于变换 A, 有

$$A(x+y) = Ax + Ay,$$

$$A(x\lambda) = (Ax)\lambda.$$

变换 A 完全被它的基元素 u_k 的象确定:

$$Au_k = \sum u_i \alpha_{ik}.$$

系数 α_{ik} 构成变换 A 的矩阵.

如果 A 是从 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{N}$ 上的一一映射, 则存在逆映射 A^{-1}, 有

$$A^{-1}A = 1 \quad 以及 \quad AA^{-1} = 1,$$

其中 1 代表恒等矩阵. 在这种情形, 映射 A 及其矩阵 (α_{ik}) 称为**可逆的**.

以后用同一个字母 A 表示线性变换 A 及其矩阵 (α_{ik}). 这并不太符合逻辑, 却是实用的.

12.2　Euclid 环中的模、不变因子

现在我们假设环 $\mathfrak{R}$ 是交换的, 并且是在 3.7 节中所述的意义下的一个 Euclid 环. 这就是说, 对环中每个元素 $a \neq 0$ 都给定了一个"绝对值" $g(a)$, 具有性质

$g(ab) \geqslant g(a)$, 并且除法程序成立. 由 3.7 节知道, $\mathfrak{R}$ 中每个理想都是主理想. 现在首先证明下面的定理.

定理 设 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{R}$ 上的一个线性型模, 它具有基 $(u_1, \cdots, u_n)$, 那么 $\mathfrak{M}$ 中的每个子模 $\mathfrak{N}$ 也是线性型模, 它的基元素的个数最大是 n.

证 对于零模 $\mathfrak{M} = (0)$ 来说, 定理是显然的. 现在假设对于具有 $n-1$ 个基元素的模 $\mathfrak{M}$ 来说, 这个定理成立.

如果 $\mathfrak{N}$ 完全由 $u_1, \cdots, u_{n-1}$ 的线性型组成, 那么根据归纳假设, 定理中的结论成立. 如果 $\mathfrak{N}$ 包含着一个线性型 $u_1\lambda_1 + \cdots + u_n\lambda_n$, 其中 $\lambda_n \neq 0$, 则出现于这种线性型中的 λ_n 组成 $\mathfrak{R}$ 的一个理想. 这个理想必是一个主理想 (μ_n), 其中 $\mu_n \neq 0$. 这就是说, 在 $\mathfrak{N}$ 中有一个线性型 $l = u_1\mu_1 + \cdots + u_n\mu_n$, 并且对于 $\mathfrak{N}$ 中的每个线性型 $u_1\lambda_1 + \cdots + u_n\lambda_n$, 我们可以从它减去 l 的一个倍元 l_d, 使得它里面最后一个系数等于零. 相减之后余下来的是 $u_1, \cdots, u_{n-1}$ 的线性型, 它们组成 $\mathfrak{N}$ 中的一个子模. 根据归纳假设, 这个子模有一个线性无关基 $(l_1, \cdots, l_{m-1}), m-1 \leqslant n-1$. 这时 $l_1, \cdots, l_{m-1}, l$ 显然就生成 $\mathfrak{N}$.

$l_1, \cdots, l_{m-1}$ 已经线性无关. 如果有一个线性关系

$$l_1\beta_1 + \cdots + l_{m-1}\beta_{m-1} + l\beta = 0$$

成立, 其中 $\beta \neq 0$, 那么比较 u_n 的系数即有 $\mu_n\beta = 0$, 然而这是不可能的.

习题 12.1 设 $\mathfrak{M}$ 是一个整系数线性型模, $\mathfrak{N}$ 是由有限多个线性型 $v_k = \sum u_i\alpha_{ik}$ 生成的子模, 那么 $\mathfrak{N}$ 的一个具有上述性质的基 $(l_1, \cdots, l_m)$ 可以经过有限多个步骤作出.

习题 12.2 利用习题 12.1 中所作出的基 $(l_1, \cdots, l_m)$, 给出一个方法来判断一个给定的线性型 $u_1\beta_1 + \cdots + u_n\beta_n$ 是否属于模 $\mathfrak{N}$, 或者换一种说法, 判断线性丢番图 (Diophantos) 方程组

$$\sum \alpha_{ik}\xi_k = \beta_i$$

是否有整数 ξ_k 表示的解.

不变因子定理 设 $\mathfrak{N}$ 是线性型模 $\mathfrak{M}$ 的一个子模, 那么一定可以找到 $\mathfrak{M}$ 的一个基 $(u_1, \cdots, u_n)$ 和 $\mathfrak{N}$ 的一个基 $(v_1, \cdots, v_m)$, 使得

$$\begin{cases} v_i = u_i\varepsilon_i, \\ \varepsilon_{i+1} \equiv 0(\varepsilon_i). \end{cases} \tag{12.4}$$

证 我们从 $\mathfrak{M}$ 的一个任意基 $(u_1, \cdots, u_n)$ 和 $\mathfrak{N}$ 的一个任意基 $(v_1, \cdots, v_m)$ 出发. 设

$$v_k = \sum u_i\alpha_{ik}, \tag{12.5}$$

或把 (12.5) 写成矩阵形式

$$(v_1, \cdots, v_m) = (u_1, \cdots, u_n)A. \tag{12.6}$$

现在我们要逐步变换 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 的基, 以便将矩阵 A 化成所期望的对角线形式①:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \varepsilon_m \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}. \tag{12.7}$$

这里可容许的变换是:

(1) 交换两个 u 或两个 v, 其效果是交换 A 的两个行或两个列.

(2) 将某一 u_i 换成 $u_i + u_j\lambda (j \neq i)$. 这一变换相当于在 A 中自第 j 行减去 λ 左乘第 i 行:

$$v_k = \sum u_i \alpha_{ik} = \cdots + (u_i + u_j\lambda)\alpha_{ik} + \cdots + u_j(\alpha_{jk} - \lambda\alpha_{ik}) + \cdots .$$

(3) 将某一 v_k 换成 $v_k - v_j\lambda (j \neq k)$. 这一变换相当于在 A 中自第 k 列减去 λ 右乘第 j 列:

$$v_k - v_j\lambda = \sum u_i(\alpha_{ik} - \alpha_{ij}\lambda).$$

我们通过 (1)~(3) 来作矩阵 A 的各种可能的变换, 使得 A 中*按绝对值最小的非零元素具有尽可能小的绝对值*. 通过变换 (1) 可以使得矩阵中的这个最小元素处于 α_{11} 的位置上. 继此之后, 可以通过变换 (2) 从矩阵的各行中减去第一行的适当的倍, 使得第一列中其余的元素尽可能地小. 这时这些元素按绝对值来说小于 $|\alpha_{11}|$, 因而必须等于零. 同样, 通过变换 (3) 可以不改变第一个列而使得第一行中所有其余元素均为零. 经过这些操作之后, 整个矩阵中所有的元素都能被 α_{11} 整除. 事实上, 假如某一 α_{ik} 不能被 α_{11} 整除, 那么由带余除法有

$$\alpha_{ik} = \alpha_{11}\beta + \gamma, \quad \gamma \neq 0, \quad g(\gamma) < g(\alpha_{11}).$$

先通过变换 (2) 将第一行加到第 i 行上去, 然后通过变换 (3) 自第 k 列减去 β 乘第一列, 那么 (ik) 位置上就会出现 γ, 且有 $g(\gamma) < g(\alpha_{11})$. 而这是和我们对 α_{11} 所作的最小性假设相违的.

① 英文版有误. —— 译者注