

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教材



21世纪高职高专规划教材 (公共基础课)

高等数学学习指导书

(理工科用)

第2版

方晓华 主编



普通高等教育“十一五”国家级规划教材



21世纪应用型本科教材

第2版

高等数学学习指导书

(理工类用)

第2版

王 明 主编

清华大学出版社



普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教材
21 世纪高职高专规划教材
(公共基础课)

高等数学 学习指导书

(理工科用)

第 2 版

机械工业出版社

本书是与普通高等教育“十一五”国家级规划教材《高等数学》(理工科用,机械工业出版社,第2版)配套的学习指导书,系根据高等职业技术教学要求编写的。全书共11章,内容与教材相呼应,包括函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用,常微分方程,多元函数微积分,级数,拉普拉斯变换,矩阵及其应用,概率与数理统计。每章均由基本要求、内容提要、例题分析、习题选解、自我检测题与答案五部分组成。附录内容介绍 MATLAB 数学实验。

本书可作为二年制及三年制高等职业院校、高等专科学校、职工大学、业余大学、夜大学、函授大学和成人教育学院等大专层次的理工科类高等数学课程的教材,也可作为广大自学者及工程技术人员的自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导书/方晓华主编. —2版. —北京:机械工业出版社, 2006.8

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教材
21世纪高职高专规划教材(公共基础课:理工科用)
ISBN 7-111-09221-X

I. 高... II. 方... III. 高等数学—高等学校:技术学校—教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 089498 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
策划编辑:余茂祚 责任编辑:余茂祚 版式设计:冉晓华
责任校对:张晓蓉 封面设计:饶 薇 责任印制:杨 曦
北京机工印刷厂印刷
2006 年 9 月第 2 版第 1 次印刷
184mm×260mm·12.25 印张·301 千字
0 001—5 000 册
定价:19.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换
本社购书热线电话(010) 68326294
编辑热线电话(010) 68354423
封面无防伪标均为盗版

第1版前言

本书是与21世纪高职高专系列教材中的《高等数学》(理工科用,机械工业出版社2000年8月第1版)配套的学习指导书。

在编写本书时,我们注意到初学者对高等数学的一些基本概念理解不透或产生错误,对掌握解题的方法感到困难,对于怎样将一个实际问题抽象成一个数学模型缺乏分析能力和解决问题的能力。而教材本身由于受篇幅等诸多因素的限制,不可能对学生在学习过程中所遇到的各种问题都给出详细的解答。为此,我们编写了这本学习指导书。其目的是帮助高等数学的初学者正确理解与掌握基本概念和有关的基本理论;帮助学生总结解题规律,提高分析问题和解决实际问题的能力,开拓视野、活跃思路;帮助学生逐步解决学习中的困难,为他们在学过程中提供一个良师益友;同时也是对《高等数学》教材的一种补充。

本书每章由基本要求、内容提要、例题分析、习题选解与答案、自我检测题与答案五部分组成。基本要求按教学要求的不同,分为两个层次。文中用黑体字排印的属较高要求,必须使学生深入理解,牢固掌握,熟练应用。其中,概念、理论用“理解”一词表述,方法、运算用“掌握”一词表述。非黑体字排印的,也是必不可少的,只是在教学要求上低于前者。其中,概念、理论用“了解”一词表述,方法、运算用“会”或“了解”表述。例题及习题选解中的题目一般都是较典型的或较难的习题。自我检测题的命题既注意知识的覆盖面,又注意突出各章的基本要求,学生通过做自我检测题,可使他们及时了解知识的掌握情况和解题能力,对于不足之处可及时予以提高,起到温故知新的作用。对于内容提要,力求克服内容的复述或内容的缩影的倾向,而把重点放在如何理解相应内容和应注意事项以及揭示知识的内在联系上,这样就能帮助学生更好地复习和巩固本章的知识。

编写本书的指导思想为强化基本概念的教学;淡化数学技巧的训练;删去不必要的逻辑推导;突出应用能力的培养。

编写时力求应用性较强,适用面较宽,文字简明通顺,加大信息量,渗透现代数学思想。由于本书是通过实际问题来说明数学思想方法的,所以它比抽象的叙述要丰富、具体,而且易为读者接受。因此,本书除可作为高职理工科类教学用书外,也可作为成人高校、高专、夜大、职大、业大、函大等大专层次的教学用书和广大自学者及工程技术人员的自学用书。

本书章序与《高等数学》(理工科用)相一致,共12章。参加编写的单位及人员有:

第1章、第8章、附录 金华职业技术学院 方晓华;第2章,第3章,第4章 成都航空职业技术学院 黄兴廉、刘红;第5章、第6章、第11章 北方交通大学 桂文豪、程飞;第7章 燕山大学 尚仲平;第9章 燕山大学 刘德有;第10章 金华职业技术学院 吕焱飞;第12章 燕山大学 牛燕影。

本书由金华职业技术学院理工学院费定晖教授任主编,他提出了全书的总体构思及编写的指导思想和应注意事项。刘德有、黄兴廉、方晓华、桂文豪为副主编。全书的修改和统稿工作由费定晖、刘德有完成。

本书由天津大学齐植兰教授主审，她认真、仔细地审阅了全稿，并提出了许多宝贵的修改意见，对此表示衷心感谢。

在本书的编写过程中，得到作者所在院校的大力支持和帮助，在此一并表示感谢。

限于作者水平，加之时间仓促，书中难免有缺点和不当之处，敬请专家、同仁和广大读者批评指正。

编 者

2001 年 5 月

第2版前言

《高等数学》(理工科用)第2版自出版发行以来,得到了各方的好评,并于2006年8月评为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。为了能更好地配套使用该教材,我们组织了教授高职类高等数学具有丰富教学经验的教师修订了本指导书。第2版学习指导书在第1版的基础上做了较大的调整:

1. 参照教育部最新制定的高等职业教育数学基础课程教学基本要求,重新制定了教学基本要求。

2. 与教材同步增删了有关内容。

3. 加强了对基本概念의阐述与典型例题的分析求解,强调解题思想方法的归纳总结,以使读者能够举一反三,融会贯通。

4. 重新编制了自测题,题型包括填空题、选择题、解答题、证明题,题目突出基础,难易适中。

5. 为培养学生“用数学”的能力,以附录形式增加了MATLAB数学实验,供师生选用。

第2版编写人员及分工如下:

方晓华第1、2、10章及附录A;罗飞第3章;刘红、杜瑜第4、5、9、11章;潘天娟第6章;杜凤英第7章;徐展锋第8章。

本书(第2版)由方晓华主编,刘红、徐展锋、杜凤英为副主编,杜瑜、罗飞、潘天娟参编,黄兴廉主审,全书由方晓华统稿。

参加本书第1版编写的全部作者及主审为本书打下了良好的基础,这次由于各种原因,有些作者没有参加本书第2版的修订工作,在此对他们表示衷心感谢。

限于编者水平,加之时间仓促,书中一定存在不妥之处,敬请使用本书的同行和广大读者批评指正。

编者

21 世纪高职高专规划教材

编 委 会 名 单

编 委 会 主 任 王文斌

编委会副主任 (按姓氏笔画为序)

王建明	王明耀	王胜利	王寅仓	王锡铭
刘 义	刘晶磷	刘锡奇	杜建根	李向东
李兴旺	李居参	李麟书	杨国祥	余党军
张建华	茆有柏	秦建华	唐汝元	谈向群
符宁平	蒋国良	薛世山	储克森	

编 委 会 委 员 (按姓氏笔画为序, 黑体字为常务编委)

王若明	田建敏	成运花	曲昭仲	朱 强
刘 莹	刘学应	许 展	严安云	李连邺
李学锋	李选芒	李超群	杨 飒	杨群祥
杨翠明	吴 锐	何志祥	何宝文	余元冠
沈国良	张 波	张 锋	张福臣	陈月波
陈向平	陈江伟	武友德	林 钢	周国良
宗序炎	赵建武	恽达明	俞庆生	晏初宏
倪依纯	徐炳亭	徐铮颖	韩学军	崔 平
崔景茂	焦 斌			

总 策 划 余茂祚

21 世纪高职高专规划教材目录（机、电、建筑类）

高等教学（理工科用） （第 2 版） 高等数学学习指导书（第 2 版） （理工科用） 计算机应用基础 应用文写作 经济法概论 经济学概论 法律基础 法律基础概论 C 语言程序设计 计算机文化基础 职业院校学生心理健康 工程制图（机械类用）（第 2 版） 工程制图习题集（机械类用） （第 2 版） 计算机辅助绘图—AutoCAD 2005 中文版 几何量精度设计与检测 工程力学 金属工艺学 机械设计基础 工业产品造型设计 液压与气压传动 电工与电子基础 电工电子技术（非电类专业用） 机械制造基础 数控技术 专业英语（机械类用） 金工实习 数控机床及其使用维修 数控加工工艺及编程 机电控制技术 计算机辅助设计与制造 微机原理与接口技术 机电一体化系统设计 控制工程基础 机械设备控制技术 金属切削机床 机械制造工艺与夹具 冷冲模设计及制造 塑料模设计及制造 模具 CAD /CAM	汽车构造 汽车电器与电子设备 公路运输与安全 汽车检测与维修 汽车营销学 工程制图（非机械类用） 工程制图习题集（非机械类用） 离散数学 电路基础 单片机原理与应用 电力拖动与控制 可编程序控制器及其应用 （三菱机型） 可编程序控制器及其应用 （欧姆机型） 工厂供电 微机原理与应用 模拟电子技术 数字电子技术 数字逻辑电路 办公自动化技术 现代检测技术与仪器仪表 传感器与检测技术 制冷原理与设备 制冷与空调装置自动控制技术 电视机原理与维修 自动控制原理与系统 电路与模拟电子技术 低频电子线路 电路分析基础 常用电子元器件 单片机原理及接口技术案例教程 多媒体技术及其应用 操作系统 数据结构 软件工程 微型计算机维护技术 汇编语言程序设计 VB6.0 程序设计 VB6.0 程序设计实训教程 Java 程序设计 C++ 程序设计	Delphi 程序设计 计算机网络技术 网络应用技术 网络数据库技术 网络操作系统 网络安全技术 网络营销 网络综合布线 网络工程实训教程 计算机图形学实用教程 动画设计与制作 管理信息系统 电工与电子实验 专业英语（电类用） 物流技术基础 物流仓储与配送 物流管理 物流运输管理与实务 建筑制图 建筑制图习题集 建筑力学 建筑材料 建筑工程测量 钢筋混凝土结构及砌体结构 房屋建筑学 土力学及地基基础 建筑设备 建筑给排水 建筑电气 建筑施工 建筑工程概预算 房屋维修与预算 建筑装饰装饰材料 建筑装饰装饰构造 建筑装饰装饰设计 楼宇智能化技术 钢结构 多层框架结构 建筑施工组织 工程造价案例分析 土木工程实训指导 土木工程基础实验教程
--	--	--

21 世纪高职高专规划教材

编 委 会 名 单

编 委 会 主 任 王文斌

编委会副主任 (按姓氏笔画为序)

王建明	王明耀	王胜利	王寅仓	王锡铭
刘 义	刘晶磷	刘锡奇	杜建根	李向东
李兴旺	李居参	李麟书	杨国祥	余党军
张建华	茆有柏	秦建华	唐汝元	谈向群
符宁平	蒋国良	薛世山	储克森	

编 委 会 委 员 (按姓氏笔画为序, 黑体字为常务编委)

王若明	田建敏	成运花	曲昭仲	朱 强
刘 莹	刘学应	许 展	严安云	李连邨
李学锋	李选芒	李超群	杨 飒	杨群祥
杨翠明	吴 锐	何志祥	何宝文	余元冠
沈国良	张 波	张 锋	张福臣	陈月波
陈向平	陈江伟	武友德	林 钢	周国良
宗序炎	赵建武	恽达明	俞庆生	晏初宏
倪依纯	徐炳亭	徐铮颖	韩学军	崔 平
崔景茂	焦 斌			

总 策 划 余茂祚

目 录

第2版前言	
第1版前言	
第1章 函数、极限与连续	1
1.1 基本要求	1
1.2 内容提要	1
1.2.1 函数	1
1.2.2 极限	3
1.2.3 极限运算	4
1.2.4 函数的连续性	4
1.3 例题分析	5
1.4 习题选解	10
1.5 自我检测题与答案	14
1.5.1 自我检测题	14
1.5.2 自我检测题答案	15
第2章 导数与微分	17
2.1 基本要求	17
2.2 内容提要	17
2.2.1 导数的概念	17
2.2.2 导数的运算	19
2.2.3 微分的概念	20
2.3 例题分析	20
2.4 习题选解	24
2.5 自我检测题与答案	27
2.5.1 自我检测题	27
2.5.2 自我检测题答案	28
第3章 导数的应用	29
3.1 基本要求	29
3.2 内容提要	29
3.2.1 拉格朗日中值定理	29
3.2.2 函数的单调性与极值	29
3.2.3 曲线的凹凸和拐点	30
3.2.4 洛必达法则	30
*3.2.5 曲线的曲率	31
3.3 例题分析	31
3.4 习题选解	35
3.5 自我检测题与答案	38
3.5.1 自我检测题	38
3.5.2 自我检测题答案	39
第4章 不定积分	41
4.1 基本要求	41
4.2 内容提要	41
4.2.1 不定积分的概念	41
4.2.2 不定积分的性质	42
4.2.3 换元积分法	42
4.2.4 分部积分法	44
4.3 例题分析	44
4.4 习题选解	46
4.5 自我检测题与答案	48
4.5.1 自我检测题	48
4.5.2 自我检测题答案	49
第5章 定积分及其应用	51
5.1 基本要求	51
5.2 内容提要	51
5.2.1 定积分的概念	51
5.2.2 定积分的基本定理	52
5.2.3 定积分的换元积分法和分部积分法	53
*5.2.4 广义积分	53
5.2.5 定积分在几何中的应用	54
5.2.6 定积分在物理中的应用	55
5.3 例题分析	56
5.4 习题选解	59
5.5 自我检测题与答案	67
5.5.1 自我检测题	67
5.5.2 自我检测题答案	69
第6章 常微分方程	70
6.1 基本要求	70
6.2 内容提要	70

6.2.1 常微分方程的概念	70	9.2.2 拉普拉斯变换的性质	125
6.2.2 一阶微分方程	70	9.2.3 拉普拉斯变换的逆变换	125
6.2.3 二阶常系数线性微分方程	71	9.2.4 拉普拉斯变换的应用	125
6.2.4 微分方程应用	72	9.3 例题分析	126
6.3 例题分析	73	9.4 习题选解	128
6.4 习题选解	76	9.5 自我检测题与答案	130
6.5 自我检测题与答案	84	9.5.1 自我检测题	130
6.5.1 自我检测题	84	9.5.2 自我检测题答案	131
6.5.2 自我检测题答案	85	第 10 章 矩阵及其应用	132
第 7 章 多元函数微积分	86	10.1 基本要求	132
7.1 基本要求	86	10.2 内容提要	132
7.2 内容提要	86	10.2.1 n 阶行列式的概念	132
7.2.1 空间解析几何简介	86	10.2.2 矩阵	134
7.2.2 多元函数的概念	87	10.2.3 矩阵的初等变换与矩阵 的秩	135
7.2.3 偏导数	87	10.2.4 线性方程组	136
7.2.4 全微分的概念	88	10.3 例题分析	137
7.2.5 多元函数求导法则	88	10.4 习题选解	143
7.2.6 多元函数的极值	89	10.5 自我检测题与答案	148
7.2.7 二重积分	90	10.5.1 自我检测题	148
7.3 例题分析	92	10.5.2 自我检测题答案	149
7.4 习题选解	98	* 第 11 章 概率与数理统计	151
7.5 自我检测题与答案	104	11.1 基本要求	151
7.5.1 自我检测题	104	11.2 内容提要	151
7.5.2 自我检测题答案	106	11.2.1 随机事件与概率	151
第 8 章 级数	107	11.2.2 概率的基本性质与公式	152
8.1 基本要求	107	11.2.3 事件的独立性	152
8.2 内容提要	107	11.2.4 随机变量	152
8.2.1 数项级数	107	11.2.5 随机变量的数字特征	154
8.2.2 幂级数	109	11.2.6 数理统计基础	155
* 8.2.3 傅里叶级数	110	11.2.7 参数估计	155
8.3 例题分析	112	11.2.8 假设检验	156
8.4 习题选解	117	11.3 例题分析	157
8.5 自我检测题与答案	122	11.4 习题选解	160
8.5.1 自我检测题	122	11.5 自我检测题与答案	166
8.5.2 自我检测题答案	123	11.5.1 自我检测题	166
* 第 9 章 拉普拉斯变换	125	11.5.2 自我检测题答案	168
9.1 基本要求	125	附录 MATLAB 数学实验	169
9.2 内容提要	125	A.1 MATLAB 基本操作	169
9.2.1 拉普拉斯变换的概念	125		

A.2 函数运算与作图	173	A.4 符号方程(组)的求解	180
A.2.1 函数运算	173	A.4.1 代数方程的求解	180
A.2.2 函数作图	174	A.4.2 常微分方程	181
A.3 微积分的常用符号运算	176	A.5 矩阵运算及解线性方程组	182
A.3.1 符号变量和符号表达式	176	A.5.1 矩阵运算	182
A.3.2 符号运算	176	A.5.2 解线性方程组	184

第1章 函数、极限与连续

1.1 基本要求

1. 理解函数的概念，会求函数的定义域；了解分段函数的概念。
2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性。
3. 熟练掌握基本初等函数的解析表达式及其主要性质和图形。
4. 了解复合函数的概念，知道初等函数的定义，熟练掌握将一个复合函数分解为简单函数的形式；了解反函数的概念。
5. 会建立简单实际问题中的函数关系式。
6. 了解数列极限与函数极限的概念。
7. 了解无穷小与无穷大的概念，会进行无穷小的比较。
8. 掌握函数极限的计算方法，包括极限的四则运算法则、消去极限式中的不定因子、利用无穷小的运算性质、有理化根式、两个重要极限和函数的连续性等方法。
9. 了解函数连续及间断的概念，了解函数间断点的分类；会判断分段函数在分界点处的连续性。
10. 知道初等函数在其定义域内连续的结论，知道闭区间上连续函数的性质（最值定理和介值定理及推论）。

1.2 内容提要

1.2.1 函数

1. 函数的概念 函数是高等数学研究的基本对象。在函数定义中，定义域与对应法则是函数概念的两个要素，只有定义域与对应法则都确定了，函数才能完全确定。

(1) 对于两个函数，如果定义域和对应法则都相同，它们就是同一函数，否则就不是同一函数。例如， $f(x) = \ln x^2$ 和 $g(x) = 2\ln x$ ，因 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，而 $g(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$ ，所以它们是不同的函数。又如， $f(x) = |x|$ 和 $g(x) = \sqrt{x^2}$ ，它们的定义域与对应法则都相同，所以是相同的函数。由函数定义可知，常量 $y = c$ 也是函数。

(2) 在函数记号 $y = f(x)$ 中，记号 $f()$ 表示自变量 x 与因变量 y 之间的对应法则。例如， $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ， $f()$ 指的是这样一个法则：自变量的平方与 1 的和再开平方。对应法则 $f()$ 与自变量、因变量用什么字母表示无关，且不限于表示某一个数学表达式，也可以表示几个数学表达式（如分段函数），甚至还可以表示一个几何图形或一张数据表格。必须注意，分段函数是一个函数，而不是几个函数。

(3) 函数的定义域是函数概念的重要因素。因为高等数学所讨论的范围是实数域，如果自变量取值超出了此范围，我们就说函数没有意义。函数的定义域是指使 y 有意义的自变

量 x 的取值范围,常用不等式、区间、集合、叙述、图示等方法表示。求函数定义域的方法是:若是实际问题,定义域除考虑函数解析式有意义外,还需使实际问题有意义才行。当函数为一般数学式子时,定义域一般是使这个式子有意义的一切实数集合;若函数解析式是由几个数学式子经四则运算组合而成的,则它的定义域就应取这几个数学式子自变量允许值的公共部分;对于几个式子表示的分段函数,其定义域是各项定义域加在一起。

2. 函数的简单性质 奇偶性、单调性、周期性、有界性是函数的几种主要特征,它们不仅可以从直观上帮助我们了解函数的形态和画出图形,而且是进一步研究函数所不可缺少的工具。

(1) 函数的奇偶性的讨论都是就定义域是对称区间 $(-a, a)$ 而言的,离开这个条件是无从谈一个函数的奇偶性的。例如 $f(x) = \ln x$,它既不是奇函数也不是偶函数。特别地,函数 $y=0$ 既是奇函数也是偶函数。

(2) 从函数 $f(x)$ 的有界性定义可得 $-M \leq f(x) \leq M$,因此从直观上看,在平面直角坐标系中,有界函数的图像应完全落在以直线 $y = -M$ 及 $y = M$ 为边的“带形”区域之内。

3. 反函数要弄清以下两个方面的问题

(1) 当函数的反对应关系是单值时,才有反函数,如果反对应关系不是单值,则需增加约束条件,使其单值对应,否则就没有反函数。例如函数 $y = x^2, x \in R$ 。由于它的反对应关系不是单值的,所以它在定义域内没有反函数。但如果将函数 $y = x^2$ 的定义域限制为 $x \geq 0$,那么,就有反函数 $y = \sqrt{x}$;如果定义域限制为 $x \leq 0$,那么,就有反函数 $y = -\sqrt{x}$ 。

(2) 函数 $f(x)$ 与反函数 $x = f^{-1}(y)$,从方程角度来看,它们是变量 x 与 y 之间的同一个方程,因此它们在同一坐标平面上是同一条曲线。由于习惯上常用 x 表示自变量,而用 y 表示因变量,所以把函数 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 写成 $y = f^{-1}(x)$ 。这样,函数 $y = f(x)$ 的图像与它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称,它们的定义域与值域互相交换。

4. 复合函数 搞清复合函数的概念主要在于把一个比较复杂的函数适当引入中间变量,即分解成若干个简单函数——基本初等函数,或有常数与基本初等函数经过有限次四则运算而成的函数,使我们对复杂函数的讨论,可转化为对基本初等函数的讨论。

(1) 几个简单函数能够复合成复合函数应具备一定的条件,即中间变量的值域应包含在函数的定义域内,因此,不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的。例如, $y = \arcsin u$ 及 $u = x^2 + 2$ 就不能复合成一个复合函数。因为对于 $u = x^2 + 2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 中任何 x 值所对应的 u 值都大于或等于2,它们都不能使 $y = \arcsin u$ 有意义。

(2) 复合函数的分解指的是把复合函数分解成基本初等函数或基本初等函数与常数的和、差、积、商的形式,就算分解完成了。分解的步骤是由运算的最外层起逐层往里分解。

例如, $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ 可分解为 $y = \sqrt{u}, u = \frac{x+1}{x-1}$ 。

5. 初等函数 高等数学中所研究的函数主要是初等函数。在自然科学与工程技术中最常见的函数也是初等函数。初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算与有限次函数复合所构成并且能用一个解析式表示的函数(这里虽未曾提及乘方及开方运算,但通过幂函数的复合,可以包括这两种运算)。因此,作为构成初等函数的基本初等函数就显得尤其重要,虽然基本初等函数在中学已经学过,但仍要引起足够重视,对它们的定义域、图

形、简单性质还需牢记。

一般情况下,分段函数是非初等函数,但也有例外,例如,分段函数 $y = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ 能转化为 $y = \sqrt{x^2}$, 而 $y = \sqrt{x^2}$ 是由 $y = \sqrt{u}$ 和 $u = x^2$ 复合而成的,所以这个分段函数是一个初等函数。

1.2.2 极限

1. 极限的定义 极限的概念反映了函数在自变量无限变化的过程中,因变量的某种变化趋势。极限是高等数学的基本概念。极限方法是高等数学研究问题的根本方法,是研究微积分的重要工具。数列即整序变量(或称整数函数),其实质就是定义在自然数集上的函数。因此,数列极限可以看成是当连续自变量 $x \rightarrow +\infty$ 时,函数 $f(x)$ 极限的一种特殊情况。所以重点是把函数极限的有关问题弄清楚。教材中极限的定义是一种描述性定义,通过观察不难得出结果。此外还有极限的分析定义,本教材不作介绍。

2. 无穷小与无穷大 要注意以下几点:

(1) 一个函数是否是无穷小,是与自变量的变化趋向相联系的。例如,函数 $x-2$ 是当 $x \rightarrow 2$ 时的无穷小,但当 $x \rightarrow 1$ 时它就不是无穷小。因此说一个函数是无穷小,必须指出它的自变量的变化趋向。另外,不要把无穷小与很小的数相混淆。例如, 10^{-6} 虽然是很小的数,但它的极限是它本身,并不是零。在常数中,可当作无穷小的惟一的一个数就是零。

(2) 利用无穷小的性质进行计算时,必须注意性质 1 和性质 2 中“有限个”是必不可少的条件,否则会出现错误运算。例如,下面的运算是错误的,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$$

(3) 无穷小与无穷大之间是倒数关系,但需注意,无穷大的倒数是无穷小,不为零的无穷小的倒数是无穷大。无穷大与无穷小的这种关系是在自变量的同一变化过程中才成立的,不要笼统地说一个函数是无穷小,它的倒数就是无穷大。

(4) 无穷小与函数极限之间有以下重要关系: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充要条件是 $f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小。从这个关系可以看出,表达式 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 与表达式 $f(x) = A + \alpha(x)$ 是等价的。这种表达式的相互转换在以后讨论导数运算法则和建立微分概念时都要用到,因此对这个重要关系应有较清楚的了解。

3. 关于符号“ ∞ ”的理解 要搞清两点。

(1) “ ∞ ”不是数,它仅仅是一个记号。 $x \rightarrow +\infty$ 表示 $x > 0$, 且 x 单调无限增大; $x \rightarrow -\infty$ 表示 $x < 0$, 且 x 单调无限减少,即 $|x|$ 无限增大; $x \rightarrow \infty$ 表示 $|x|$ 无限增大,它包括 $x \rightarrow +\infty$ 与 $x \rightarrow -\infty$ 两种情况。在数列的极限中, n 表示自然数,这时 $n \rightarrow \infty$ 就类似于函数极限中的 $x \rightarrow +\infty$, 但不记作 $n \rightarrow +\infty$, 而规定记作 $n \rightarrow \infty$ 。

(2) “极限为 ∞ ”说明这个极限不存在,但极限不存在不一定是“极限为 ∞ ”。例如, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ 不存在,但不是 ∞ 。若从 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 这个等式看,似乎当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的极限存在,其实不然,该式是借用符号“ ∞ ”来表示 $|f(x)|$ 无限增大的这种趋势,是为了描述的方便,此处的相等并不是“真正的”相等。因此,这里虽然用等式表示,而实际上当 x

$\rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的极限还是不存在的。

1.2.3 极限运算

1. 极限的四则运算法则 必须注意这些法则是在 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都存在的前提下成立的, 如果它们之中有任何一个不存在, 这些法则就不能成立, 而学生往往容易忽视这一点。例如, $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{1-x^3} = \infty - \infty = 0$, 错在当 $x \rightarrow 1$ 时上式两项均为无穷大, 极限不存在, 所以不能用差的运算法则, 此时可先通分, 再求极限。

2. 几个常用的函数极限值可作为公式使用 应结合图形熟记:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C, \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

3. 求极限的方法 求极限的方法较多, 而且比较灵活, 现将教材中介绍的方法归纳以下几点, 供参考。

(1) 利用极限的四则运算法则求极限。

(2) 利用分子、分母的有理化求极限。

(3) 利用有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小的结论求极限。

(4) 利用等价无穷小替代法则求极限。即设 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在或 (∞) , 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$ 。但应熟记以下常用的几个等价无穷小: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $1 - \cos x \sim x^2/2$, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim x/n$ 。注意, 该法则只适用于乘除形式的运算, 不能用于加减形式的运算。

(5) 利用两个重要极限求极限。两个重要极限为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

其等价形式为: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 。这里常用变量代换的方法, 但要注意应保持形式的一致性, 以及变量的变化趋势。

(6) 利用重要结论求极限。

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0}^- f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0}^+ f(x) = A$$

该结论是求极限的有力工具, 也是证明极限不存在的有力工具, 特别是求分段函数在分界点处的极限时用得较多。

(7) 利用函数的连续性求极限。即若 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

1.2.4 函数的连续性

1. 函数连续性的概念 在实际问题中, 我们所遇到的一些函数常常是连续的或分段连续的。微积分的研究对象是函数。判别一个函数能不能微分或积分与这个函数的连续性有着重要的联系, 且闭区间上的连续函数有一些重要性质, 如最大值最小值定理和介值定理等。那么, 怎样的函数才能是连续的呢? 从直观上看, 图像是连续曲线的函数就是连续函数。但