全国高等学校配套教材

供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

医学物理学实验

主　编　冀　敏　陆申龙

人民卫生出版社

全国高等学校配套教材
供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

医学物理学实验

主　编　冀　敏　陆申龙
编　者（以姓氏笔画为序）
马世红（复旦大学）
刘东华（新乡医学院）
刘新纯（沈阳医学院）
苏卫锋（复旦大学）
陆申龙（复旦大学）
高　渊（复旦大学）
曹正东（同济大学）
潘玉莲（复旦大学）
冀　敏（复旦大学）

人民卫生出版社

图书在版编目(CIP)数据

医学物理学实验/冀敏等主编. —北京：人民卫生出版社，2009.2

ISBN 978-7-117-11007-5

Ⅰ. 医… Ⅱ. 冀… Ⅲ. 医学物理学—实验—医学院校—教材 Ⅳ. R312-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 190079 号

医学物理学实验

主　　编：冀　敏　陆申龙
出版发行：人民卫生出版社(中继线 010-67616688)
地　　址：北京市丰台区方庄芳群园 3 区 3 号楼
邮　　编：100078
网　　址：http://www.pmph.com
E - mail：pmph @ pmph.com
购书热线：010-67605754　010-65264830
印　　刷：北京蓝迪彩色印务有限公司
经　　销：新华书店
开　　本：787×1092　1/16　　**印张**：10
字　　数：230 千字
版　　次：2009 年 2 月第 1 版　2009 年 2 月第 1 版第 1 次印刷
标准书号：ISBN 978-7-117-11007-5/R・11008
定　　价：17.00元

前　言

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材《医学物理学》(第 7 版)的配套教材之一。

医学物理实验课程是高等医药院校的一门必修基础课。医药类专业物理实验课程的教学目标、课程结构和实验内容等方面的改革，对提高医药专业的教学质量具有重要意义。物理学及其实验技术对现代医学的形成和发展一直发挥着重要的指导和推动作用，物理学的思维方法及各种分析、测试手段在现代医学中已得到广泛的应用，因此，编写一本能反映物理学新技术及其医学应用的物理实验教材非常必要。本教材是根据医药专业大学物理实验课程教学的基本要求，在编者长期从事物理实验教学的实践及对医学物理实验教学仪器研究的基础上编写的，是编者关于医药类专业物理实验教学经验的总结。

本书的编写特色是，不仅包括了新颖的反映当代科技新成果的内容、突出了与医学结合较紧密的基础物理实验方法和新开发的仪器，还增加了具有探索意义的设计性、应用性物理实验，为培养医学生的创新能力提供了教学条件。

本书共分四章。第一章重点讲述医药专业物理实验课程的重要性及学习方法；第二章讲述测量误差、不确定度和数据处理方面的知识；第三章为基本物理实验，包括与医药有关的力学、热学、电磁学、光学和近代物理实验，其中还有传感器及电子线路方面的知识；第四章为设计性与应用性物理实验。本书的教学参考学时数为 54～72 学时。

对基本物理实验部分，注重实验原理的清晰阐述和计算公式的完整推导，使学生在预习时掌握理论依据；实验内容和步骤尽可能具体详尽，以加强对实验技能和基本实验方法的指导。对设计性与应用性物理实验，只提出实验任务和基本要求，而由学生自行查阅资料，设计实验方案，选择合适的仪器和工具，完成实验测量，以更好地发挥学生的主观能动性和创造性。本书由冀敏、陆申龙任主编，马世红、苏卫锋、高渊、潘玉莲、刘东华、刘新纯参加主要章节编写，曹正东编写第四章实验 4.13，原媛绘制了第三章的部分图形。

本书适合综合性大学医药类专业和高等医药院校的五年制、七年制、八年制临床医学专业以及基础、口腔、预防、药学、医药检验、卫生检验、护理、麻醉、影像等专业使用，也可供医药院校其他专业和生命科学、医学工程等有关专业使用。

《医学物理学》的主编，四川大学胡新珉教授审阅了全书编写大纲，复旦大学沈元华教授、周子平副教授、陈骏逸副教授给本教材的编写提供了资料，复旦天欣科教仪器有限公司的工程师和技师对本教材的编写给予大力支持，并提供了宝贵的资料，在此一并表示衷心感谢。

本书的编写得到复旦大学物理系与复旦大学教学实验中心领导的关心和支持，得到人民卫生出版社的支持，在此表示衷心感谢！

由于编者水平有限，本书难免有不当之处，敬请使用本书的师生和同道们批评指正。

编者

2009 年 1 月

目　录

第一章 绪论

第一节 物理实验对医学类专业的重要性

物理学的理论和实验技术对现代医学科学发展作出了重要贡献。历史上，医学科学的发展不断受益于物理学的研究成果，如X射线、核磁共振、超声、CT、生物电、激光和各种显微技术已广泛应用于医学临床和研究领域，医学和物理学相结合形成了医学物理学这门交叉学科。回顾诺贝尔生理学及医学奖的历史，不难发现其中有许多奖项与物理学有关，有多位获奖者是物理学家或具有物理背景的科学家。在现代化的医院中随处可见应用物理原理或技术的先进诊疗设备，这意味着医学类专业学生应掌握更多的物理学知识和物理实验技能，特别是近代物理的基础知识和实验技术。例如，临床医师如果不了解各种医学影像的成像原理，虽然可以凭经验对影像进行分析和判断，但很难根据病人的情况选择合适的成像参数获得最清晰的图像，并正确识别和消除伪影，这往往会影响疑难病症确诊，从而延误对病情的有效诊断。

物理学正日益渗透到医学和其他各个领域，而这种渗透无不与物理实验密切相关，医学物理实验正是将物理基础理论运用到医学领域所需物理实验及诊断手段的桥梁。在医学物理实验课程中，将学习用于医学的有关物理知识、实验手段和技能，只有真正掌握医学物理实验的基本功，才能顺利地把物理原理和技术应用到医学学科而产生质的飞跃，这也将为后继医学课程打好必要的基础。

第二节 医学物理实验课要求

物理实验既然那么重要，怎样才能通过医学物理实验教学使学生掌握物理实验基本功，达到培养高素质创新人才的目的呢？概括起来，应达到以下三方面的基本要求：

一、在医学专业所需的物理实验基本知识、基本方法和基本技能方面得到严格的训练。为此，本书提供一定数量的典型的基本医学物理实验供学生实践，学生应学习如何根据物理实验思想确定合理的实验方案，正确选择和使用基本仪器，掌握各种测量技术、实验方法，并能对实验数据进行处理，包括有效数字运算、作图、误差分析等。

二、学习用实验方法观察和分析物理现象，探求物理规律，通过实验加深对重要的

基本物理规律的认识和理解，进而，还要用已学过的理论和实验知识指导新实验，分析实验中的问题。

三、培养实事求是的科学态度和积极创新的科学精神。

这个要求应贯穿在整个实验教学过程中。物理实验既是对前人的知识、经验和创造性的学习过程，更是创造性能力的培养过程。要求学生以实事求是、严谨踏实的科学态度做好实验，决不容许任何弄虚作假的行为。在实验中，也一定会发现新问题，而解决这些问题就需要积极创新的思维和坚韧不拔的毅力，所以，物理实验课程应成为培养学生严谨科学态度和创新能力的最好平台。

第三节　如何做好医学物理实验

医学物理实验是学生在教师指导下独立进行学习的一种实践活动，因此，在实验过程中，应充分发挥学生的主观能动性，有意识培养学生独立的工作能力和严谨的工作作风。

本书第三章为基本物理实验，每个实验都有三个环节：预习、完成实验和撰写实验报告。

一、预　习

学生应仔细阅读实验教材，了解本实验的原理和方法，并基本了解有关测量仪器的使用方法，在此基础上写出实验预习报告。预习报告应包括：实验目的、实验原理、实验装置及材料、实验步骤及数据记录表格。其中，电学实验、光学实验还应画出实验电路图、光路图。

二、完成实验

学生进入实验室以后，应遵守实验室各项规章制度。首先须仔细阅读关于仪器使用的注意事项或仪器说明书，然后在教师指导下正确使用仪器。对电磁学实验，必须由教师检查电路的连接是否正确无误，才能接通电源进行实验。实验进行时，应合理操作，认真思考，并将实验数据如实记录在预习报告中的表格内。

三、撰写实验报告

实验结束后，应对原始测量数据进行整理计算，用简洁的文字书写实验报告。实验报告可以在预习报告的基础上续写，即增加数据处理、实验结果、误差分析及讨论几个部分。实验报告的文字应字迹清楚，文理通顺。通过实验报告的撰写，逐步培养学生分析和总结问题的能力。

本书第四章为设计性与应用性物理实验。对这部分实验，每个学生可选做 1～2 个，一般情况下安排在课内，一个实验一般用 4～6 学时完成。当然，也允许有兴趣的学生利用课外开放时间进一步探索。教材中只提出实验任务和要求，至于实验方案、实验步骤等均由学生在预习时自行拟订，实验操作等也由学生独立完成。要求学生更多地发挥自己的主观能动性和创造性，最终完成一篇小论文，并在实验小组中报告和交流，以培养学生的总结和表述能力。

第二章

实验误差及数据处理

物理实验的目的是探寻和验证物理规律，而许多物理规律是用物理量之间的定量关系来表述的。在物理实验中可以获得大量的测量数据，这些数据必须经过认真地、正确地、有效地处理，才能得出合理的结论，从而把感性认识上升为理性认识，发现或验证物理规律。所以，数据处理是物理实验中一项极其重要的工作。本章将介绍一些最基本的数据处理方法，包括实验误差及其分析、实验不确定度评定、有效数字及其运算法则、制表、作图及拟合以及实验数据的计算机处理等。

第一节　物理量的测量及实验误差

物理学作为一门基础实验科学，对它的研究往往离不开物理量的测量，而物理实验教学是重复前人的实验过程，因此同样要进行各种测量。一个待测物理量的大小，在客观上应该有一个真实的数值，叫作“真值”。由于测量方法、测量仪器、测量条件及测量者的种种问题，实际测得的数值即测量值，只能是一个真值的近似值。测量值与真值之差称为误差。测量方法的考虑、测量仪器的选择、测量条件的确定、测量数据的处理等都应在可能的范围内力求减少误差。

所谓测量，就是由测量者采取某种测量方法、用某种测量仪器将待测量与标准量进行比较。例如，为测量一个铁球的质量，可以把铁球（待测物）放在天平（测量仪器）的一侧，把适量的砝码（其质量为标准量）放在另一侧，适当调节而使两侧平衡（测量方法），即可得到待测物的质量，即测量值。由此可知，测量值并不等于真值，测量值存在误差的原因可能有以下三方面：测量仪器（及标准量）的问题、测量方法的问题、测量者的问题。现分述如下：

1. 测量仪器及标准量的问题　在许多情况下，测量仪器上的刻度（或数字显示）就代表了标准值，如米尺、温度计等。但是这种“标准量”也并非真正标准，它与真正的标准量必有差距。例如，米尺端边会磨损、刻度有不均匀性或不够准确、在不同温度下米尺本身的长度有变化等。

2. 测量方法的问题　采用不同的测量方法可能会得到不同的测量结果，其影响是很明显的。例如，为了测量一块玻璃板的温度，用一般的温度计测量和用激光测量，其结果就往往不一样；为了测量重力加速度，用测单摆周期的方法或用自由落体的方法结

果也可能会不同。

3. 测量者的问题 这方面的问题很多。首先是"估读"的不同。待测量位于标准量的某两刻度之间时，必须估读其数值，不同测量者的估读会有不同；这与测量者的位置、熟练程度及仪器所处的环境状况等有关。其次是"判断"的不同。例如，要测量干涉条纹间的距离，为确定何处是干涉条纹的中心位置（即光最亮处或最暗处），需要经验和判断能力。最后还有"误读"的可能，即测量者长期工作中难免犯错误，把数据读错也是很可能会发生的。

以上三方面的问题都会造成误差。其中第一个问题和第三个问题产生的误差大小与测量仪器、测量者、测量条件和测量次数有关，可以用一定的方法进行评定（第三个问题中的"误读"除外），这种评定的方法将在第二节详述。而测量方法的问题则要进行定性分析以尽量避免或进行定量分析予以修正。

例如，要测量一块正在加热的平面玻璃的温度，无论用温度计或热电偶，放在玻璃板的任何一侧，都不可能测准，因为测温元件（温度计或热电偶）与待测元件（玻璃板）的受热与散热情况都不相同，它们的温度不可能相同。因此，可以改用激光测温的方法，它利用待测元件本身作为测温元件，从玻璃表面间反射光的干涉条纹变化来确定其温度变化，就可以避免因测温元件与待测元件的温度差而形成的误差。

又如，用单摆测量重力加速度的一般公式为

$$g=4\pi^2\frac{L}{T^2}$$

式中 T 为单摆周期，L 为摆长。这里忽略了单摆摆线的质量，忽略了单摆运动是非简谐振动，也忽略了空气阻力的影响等。如要修正上述这些因素造成的误差，则要进行严格的计算和修正。如摆线质量为 μ，摆球半径为 r，质量为 m，则上述公式应修正为

$$g=4\pi^2\frac{L}{T^2}\left(1+\frac{2}{5}\frac{r^2}{L^2}-\frac{1}{6}\frac{\mu}{m}\right)$$

摆动的幅角较大或空气的浮力与阻力的影响较大时还应对上式作其他各种修正。

为了减小实验误差，需要分析在测量过程中产生误差的根源。误差按照其产生的原因、性质和特点可以分为三类，即系统误差、随机误差和异常值：①在相同实验条件下多次测量同一物理量时，其误差的绝对值和符号均保持不变，或按其确定的规律变化，这种误差称为系统误差；②在相同实验条件下多次重复测量同一物理量时，各次测量值之间存在一定的差异，其产生的误差的绝对值和符号以不可预定的方式变化着，但总体来说有一定的统计规律，这种误差称为随机误差或偶然误差；③在测量数据中，有时会发现过大或过小的异常数据，这往往是由于测量中的过失（如读数的错误、记录的错误、计算的错误、操作不当以及仪器故障等）或外界干扰等因素引起的，以前称为粗大误差。包含粗大误差的测量值或粗大误差称为异常值（outlier）。测量时要尽量避免出现高度显著的异常值，已被谨慎确定为异常值的个别数据要被剔除掉（详见本章附录 2-3）。

因此，对实验误差的分析是科学工作者一项十分重要的工作，要考虑实际上可能对测量结果产生影响的各种因素，分析其影响的大小。任何实验都不要求把一切影响因

素全部消除，这在经济上、时间上、精力上都将造成浪费，而实际上也是不可能做到的；只要达到一定的误差允许范围之内就行。而这种分析需要广博的基础知识、丰富的实践经验和高超的判断能力。这就要求我们在各种实验中认真思索，仔细考虑，以积累经验，丰富知识，提高分析判断能力。

第二节 实验不确定度的评定

一、不确定度的评定

如上所述，即使采用了正确的测量方法，由于测量仪器和测量者的问题，测量结果仍不可能是绝对准确的，它必然有不确定的成分。实际上，这种不确定的程度是可以用一种科学的、合理的、公认的方法来表示，这就是“不确定度”的评定。在测量方法正确的情况下，不确定度愈小，表示测量结果愈可靠。反之，不确定度愈大，测量的质量越低，它的可靠性愈差，使用价值就越低。

不确定度必须得到正确评价。评价得过大，在实验中会怀疑结果的正确性而不能果断地作出判断，在生产中会因测量结果不能满足要求而需再投资，造成浪费；评价得过小，在实验中可能得出错误的结论，在生产中则产品质量不能保证，造成危害。

二、不确定度的分类

不确定度是表征测量结果具有分散性的一个参数，它是被测量的真值在某个量值范围内的一个评定。

所谓“标准不确定度”是指以“标准偏差”表示的测量不确定度估计值，简称不确定度，常记为 u。(关于“标准偏差”的意义请参阅本章附录 2-1)

标准不确定度一般可分为以下三类：

1. A 类不确定度　在同一条件下多次测量，即由一系列观测结果的统计分析评定的不确定度，简称 A 类不确定度，常记为 u_A。

2. B 类不确定度　由非统计分析评定的不确定度，简称 B 类不确定度，常记为 u_B。

3. 合成标准不确定度　某测量值的 A 类与 B 类不确定度按一定规则算出的测量结果的标准不确定度，简称合成不确定度。

以下分别讨论如何进行不确定度的评定、合成、传递和表示。

三、标准不确定度的评定

1. A 类不确定度 u_A　在相同的条件下，对某物理量 x 作 n 次独立测量，得到的 x 值为 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$，于是平均值 $\bar{x}$ 为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2-1}$$

平均值 $\bar{x}$ 为 x 的最佳值，它的不确定度为

$$u_A(\overline{x})=t_P\cdot\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n(n-1)}} \tag{2-2}$$

式中的 t_P 称为 t 分布的置信系数，它与测量次数和“置信概率”有关。（所谓“置信概率”是指真值落在 $\overline{x}\pm u(x)$ 范围内的概率。）t_P 的数值大小可以根据测量次数和置信概率从专门的数据表（请参阅本章附录 2-2）中得到。当测量次数较少或置信概率较高时，$t_P>1$；当测量次数 $n\geqslant10$ 且置信概率为 68.3%时，$t_P\approx1$；在大多数普通物理教学实验中，为了简便，一般就取 $t_P=1$。

2. B类不确定度 u_B　若对某物理量 x 进行单次测量，那么B类不确定度由测量不确定度 $u_{B1}(x)$ 和仪器不确定度 $u_{B2}(x)$ 两部分组成。

测量不确定度 $u_{B1}(x)$ 是由估读引起的，通常取仪器分度值 d 的 1/10 或 1/5，有时也取 1/2，视具体情况而定；特殊情况下，可取 $u_{B1}(x)=d$，甚至更大。例如用分度值为 1mm 的米尺测量物体长度时，在较好地消除视差的情况下，测量不确定度可取仪器分度值的 1/10，即 $u_{B1}(x)=\frac{1}{10}\times1\text{mm}=0.1\text{mm}$；但在示波器上读电压值时，如果荧光线条较宽、且可能有微小抖动，则测量不确定度可取仪器分度值的 1/2，若分度值为 0.2V，那么测量不确定度 $u_{B1}(x)=\frac{1}{2}\times0.2\text{V}=0.1\text{V}$。又如，用肉眼观察远处物体成像的方法粗测透镜的焦距，虽然所用钢尺的分度值只有 1mm，但此时测量不确定度 $u_{B1}(x)$ 可取数毫米，甚至更大。

仪器不确定度 $u_{B2}(x)$ 是由仪器本身的特性所决定的，其定义式为：

$$u_{B2}(x)=\frac{a}{c} \tag{2-3}$$

其中，a 是仪器说明书上所标明的“最大误差”或“不确定度限值”，c 是一个与仪器不确定度 $u_{B2}(x)$ 的概率分布特性有关的常数，称为“置信因子”。仪器不确定度 $u_{B2}(x)$ 的概率分布通常有正态分布、均匀分布、三角形分布以及反正弦分布、两点分布等。对于正态分布、均匀分布和三角形分布，置信因子 c 分别取 3、$\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{6}$。如果仪器说明书上只给出不确定度限值（即最大误差），却没有关于不确定度概率分布的信息，则一般可用均匀分布处理，即 $u_{B2}(x)=\frac{a}{\sqrt{3}}$。

有些仪器说明书没有直接给出其最大误差或不确定度限值，但给出了仪器的准确度等级，则其不确定度限值 a 需经计算才能得到。如指针式电表的不确定度限值等于其满量程值乘以等级，例如满量程为 10V 的指针式电压表，其等级为 1 级，则其不确定度限值 $a=10\text{V}\times1\%=0.1\text{V}$。又如电阻箱的不确定度限值等于示值乘以等级再加上零值电阻，由于电阻箱各档的等级是不同的，因此应先分别计算然后求和得出，例如常用的 ZX21 型电阻箱，其示值为 360.5Ω，零值电阻为 0.02Ω，则其不确定度限值 $a=(300\times0.1\%+60\times0.2\%+0\times0.5\%+0.5\times5\%+0.02)\Omega=0.47\Omega$。

某些常用的实验仪器的最大误差或不确定度限值已列于表 2-1 中。

表 2-1 某些实验仪器的最大误差(不确定度限值)

仪器名称	量程	分度值	最大误差
木尺(竹尺)	30～50cm	1mm	±1.0 mm
	60～100cm	1mm	±1.5mm
钢板尺	150mm	1mm	±0.10mm
	500mm	1mm	±0.15mm
	1000mm	1mm	±0.20mm
钢卷尺	1m	1mm	±0.8mm
	2m	1mm	±1.2mm
游标卡尺	125mm	0.02mm	±0.02mm
		0.05mm	±0.05mm
螺旋测径器(千分尺)	0～25mm	0.01mm	±0.004mm
七级天平(物理天平)	500g	0.05g	满量程 0.08g 1/2 量程 0.06g 1/3 量程 0.04g
三级天平(分析天平)	200g	0.1mg	满量程 1.3mg 1/2 量程 1.0mg 1/3 量程 0.7mg
普通温度计(水银或有机溶剂)	0～100℃	1℃	±1℃
精密温度计(水银)	0～100℃	0.1℃	±0.2℃
电表(0.5 级)			0.5%×量程
电表(1.0 级)			1.0%×量程
数字万用电表			α%·Ux+β%·Um。(其中 Ux 表示测量值即读数,Um 表示满度值即量程,α 和 β 对不同的测量功能有不同的数值。通常将 β%·Um 用"字数"表示,如"2 个字"等)

四、标准不确定度的合成与传递

由正态分布、均匀分布和三角形分布所求得标准不确定度可以按以下规则进行合成与传递。

1. 合成

(1) 在相同条件下,对 x 进行多次测量时,待测量 x 的标准不确定度 $u(x)$ 由 A 类不确定度 $u_A(x)$ 和仪器不确定度 $u_{B2}(x)$ 合成而得。即

$$u(x)=\sqrt{u_A^2(x)+u_{B2}^2(x)} \tag{2-4}$$

其中,$u_{B2}(x)$ 的值由(2-3)式根据相应的概率分布进行估算。

(2) 对待测量 x 进行单次测量时,待测量 x 的标准不确定度 $u(x)$ 由测量不确定度 $u_{B1}(x)$ 和仪器不确定度 $u_{B2}(x)$ 合成而得。即

$$u(x)=\sqrt{u_{B1}^2(x)+u_{B2}^2(x)} \tag{2-5}$$

对于单次测量，有时会因待测量的不同，其不确定度的计算也有所不同。例如用温度计测量温度时，温度的不确定度合成公式为上述的(2-5)式；而在长度测量中，长度值是两个位置读数 x_1 和 x_2 之差，其不确定度合成公式为 $u(x)=\sqrt{u_{B1}^2(x_1)+u_{B1}^2(x_2)+u_{B2}^2(x)}$。这是因为 x_1 和 x_2 在读数时都有测量不确定度，因此在计算合成不确定度时都要考虑。

2. 传递　在间接测量时，待测量(即复合量)是由直接测量的量通过计算而得的。若 $y=f(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_N)$，且各 x_i 相互独立，则测量结果 y 的标准不确定度 $u(y)$ 的传递公式为：

$$u^2(y)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) \tag{2-6}$$

由(2-6)式可以得到一些常用的不确定度传递公式如下：

对加减法：$y=x_1\pm x_2$，则

$$u^2(y)=u^2(x_1)+u^2(x_2) \tag{2-7}$$

对乘除法：$y=x_1\cdot x_2$，或 $y=\frac{x_1}{x_2}$，则

$$\left[\frac{u(y)}{y}\right]^2=\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2+\left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 \tag{2-8}$$

对乘方(或开方)：$y=x_1^m x_2^n x_3^p$，则

$$\left[\frac{u(y)}{y}\right]^2=\left(m\cdot\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2+\left(n\cdot\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2+\left(p\cdot\frac{u(x_3)}{x_3}\right)^2 \tag{2-9}$$

五、不确定度的表示

由于不确定度 $u(x)$ 表示的是待测量 x 的真值在一定的置信概率下可能存在的范围，因而，测量结果常表示为 $x\pm u(x)$，如：所测长度为(1.05±0.02)米。这是不确定度的一般表示法。

有时，以不确定度对于待测量的百分比来表示更能看出不确定度的相对大小，即把测量结果的不确定度表示为 $\frac{u(x)}{x}\times 100\%$，如：所测长度为 1.05 米，相对不确定度 2%。这是不确定度的百分比表示法。

除了以上两种常用的不确定度表示法外，还有一种更为简略的表示法，叫做不确定度的有效数字表示法。

所谓有效数字，是指一个数值中，从第一个非 0 数字算起的所有数字。例如，$x=0.0035$ 中的 3 是第一个非 0 数字，因此 x 有两位有效数字：3 和 5，小数点前后的三个 0 都是表示数量级的，不是有效数字。又如，$x=3.500$ 有四位有效数字 3，5，0，0 都是有效数字，其中的两个 0 虽然对该数的大小并无意义，但它却表示这个数的准确程度可达小数点后的第三位，即 x 的值约在 3.495 和 3.505 之间，它与 $x=3.5$ 是显然不同的，后者表示小数点后的第一位数(即 5)就是可疑的、不确定的。

测量结果的不确定度，一般只取一位有效数字，而测量结果的末位有效数字应与不确定度的有效数字对齐，即测量结果的末位有效数字是不确定的。(特殊情况下，不确定度的有效数字可取两位，即测量值的末两位有效数字都是不确定的；在计算的中间过程，有效数字也可以暂时保留两位可疑数字，即多保留一位有效数字，但是最终计算结

果仍然需要按照下述的规则处理有效数字。)这样，根据测量值的不确定度，可以决定测量值的有效数字。

在计算数据时，当有效数字位数确定后，须将多余的数字舍去，被舍去的数字基本上按照四舍五入规则，但遇到被舍数字恰为“50”或只有“5”一位数字时，则“5”有时入，有时不入，应使有效数字末位保持为偶数。这样可使舍和入的机会均等，从而避免在处理较多数据时因入比舍多而带来的问题。

例如：经计算所得的长度值为 $x=3.54825\mathrm{m}$，若不确定度为 0.0003m，则应取测量值的结果为 $x=3.5482\mathrm{m}$；若不确定度为 0.002m，则应取测量值的结果为 $x=3.548\mathrm{m}$；若不确定度为 0.05m，则应取测量值的结果为 $x=3.55\mathrm{m}$；若不确定度为 0.1m，则应取测量值的结果为 $x=3.5\mathrm{m}$(如以毫米为单位，则应写成 $3.5\times10^{3}\mathrm{mm}$，绝不可写成 3500mm)。这样，从测量值的有效数字，就可大约知道它的不确定度，这就是不确定度的有效数字表示法。显然，这只是一种简略的表示法，在严格的定量实验中，应采用不确定度的一般表示法或百分比表示法。

虽然测量结果的不确定度，一般只取一位有效数字，但在运算过程中，不确定度一般要取两位或更多，中间过程测量值的有效数字也应适当多取一些，以免过早舍入，造成不合理的结果。

有效数字的运算和确定有一定的规则，最简单和常用的规则是：

1. 当两个数相加减时，其结果的有效数字的末位，应与参与运算的有效数字的较高末位对齐；

例如，$x=1.832\mathrm{m}$(共有 4 位有效数字，末位在小数点后第 3 位)，

$y=1.69\mathrm{m}$(共有 3 位有效数字，末位在小数点后第 2 位)，

则：$x+y=3.52\mathrm{m}$(末位取小数点后第 2 位)；$x-y=0.14\mathrm{m}$(末位取小数点后第 2 位)。

2. 当两个数相乘除时，其结果的有效数字的位数应与有效数字少的一致；

例如：如果 x 和 y 的数值与上例一致，

则：$xy=3.10\mathrm{mm}^2$(共取 3 位有效数字)；$\frac{x}{y}=1.08$(共取 3 位有效数字)。

3. 函数值的有效数字位数　设对测量值 x 取一函数值(如三角函数、对数、开方等)，而 x 的有效位数是已知的，则可以通过改变 x 值的末位数的一个单位，并观察其函数值的变化，以决定原来函数值的有效位数。

例如：$x=25°36'$，求 $\cos x=$？

由于 $\cos25°35'=0.901958177$ 和 $\cos25°37'=0.901706800$(由计算器算出)

故 $\cos25°36'=0.901832526$(由计算器算出)只能取四位有效数字，即 0.9018。

例如：$x=591.7$，求 $\lg x=$？

同理，$\lg591.6=2.772028165$ 和 $\lg591.8=2.772174961$

故 $\lg591.7=2.772101569$ 只能取五位有效数字，即 2.7721。

例如：$x=675.8$，求 $\sqrt{x}=$？

同理，$\sqrt{675.7}=25.99423031$ 和 $\sqrt{675.9}=25.99807685$

故，$\sqrt{675.8}=25.99615356$ 只能取五位有效数字，即 25.996。

然而，对于指数函数的运算结果，其有效数字的位数应该保持与指数的小数点后的位数相同（包括小数点后的零）。

例如：$x=6.758$，小数点后有3位，所以 $e^x(x=6.758)=860.9186355$，取成 $e^x(x=6.758)=861=8.61\times10^2$；$x=0.0000956$，小数点后有7位，所以 $e^x(x=0.0000956)=1.000096$。有关 10^x 的有效数字取法与 e^x 的取法相同。

4. 常数与系数的有效数字位数　公式中常数（如 π、g、e 等）或系数（如纯数3）的有效数字位数可以被认为是无限多的，它们的有效数字位数只要取到不降低运算结果的有效数字位数即可。

例如：计算圆的面积 $S=\pi D^2/4$，若直径的测量值 $D=6.785\text{cm}$ 时，取 $\pi=3.1416$。尽管常数4的有效位数是无限的，这里可以取 $4=4.0000$ 参与运算即可。

［例2.1］　用电子天平测得一个圆柱体的质量 $M=80.36\text{g}$；电子天平的最小指示值为0.01g；不确定度限值为0.02g。用钢尺测量该圆柱体的高度 $H=H_2-H_1$，其中，$H_1=4.00\text{cm}$，$H_2=19.32\text{cm}$；钢尺的分度值为0.1cm，估读1/5分度；不确定度限值为0.01cm。用游标卡尺测量该圆柱体的直径 D（数据如下表所示）；游标卡尺的分度值为0.002cm；不确定度限值为0.002cm。

D/cm					
	2.014	2.020	2.016	2.020	2.018
	2.018	2.020	2.022	2.016	2.020

试根据上述数据，计算该圆柱体的密度及其不确定度。

解：(1) 圆柱体的质量 $M=80.36\text{g}$

$$u(M)=\sqrt{(u_{B1}(M))^2+(u_{B2}(M))^2}=\sqrt{(0.01)^2+\left(\frac{0.02}{\sqrt{3}}\right)^2}\text{g}=0.015\text{g}$$

(2) 圆柱体的高 $H=H_2-H_1=(19.32-4.00)\text{cm}=15.32\text{cm}$

$$u(H)=\sqrt{2\cdot(u_{B1}(H))^2+(u_{B2}(H))^2}=\sqrt{2\cdot(0.02)^2+\left(\frac{0.01}{\sqrt{3}}\right)^2}\text{cm}=0.029\text{cm}$$

(3) 圆柱体的直径的平均值 $\overline{D}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}D_i=2.0184\text{cm}$

$$u_A(\overline{D})=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(D_i-\overline{D})^2}{10\times(10-1)}}=0.00078\text{cm}$$

$$u(\overline{D})=\sqrt{(u_A(\overline{D}))^2+(u_{B2}(\overline{D}))^2}=\sqrt{(0.00078)^2+\left(\frac{0.002}{\sqrt{3}}\right)^2}\text{cm}=0.0014\text{cm}$$

(4) 根据上述数据计算材料的密度 ρ

$$\rho=\frac{M}{V}=\frac{4M}{\pi D^2H}=\frac{4\times80.36}{3.1416\times(2.0184)^2\times15.32}\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}=1.639\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$$

$$\frac{u(\rho)}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{u(M)}{M}\right)^2+\left(2\cdot\frac{u(D)}{D}\right)^2+\left(\frac{u(H)}{H}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{0.015}{80.36}\right)^2+\left(2\cdot\frac{0.0014}{2.0184}\right)^2+\left(\frac{0.029}{15.32}\right)^2}=0.24\%$$