Introduction to Economic Dynamics

动态经济学导论

张 衔◎编著

四川大学出版社

Introduction to Economic Dynamics

动态经济学导论

张 衔◎编著

四川大学出版社

责任编辑:王　平
责任校对:张战清
封面设计:米茄设计工作室
责任印制:李　平

图书在版编目(CIP)数据

动态经济学导论 / 张衔编著. —成都: 四川大学出版社,
2009.2
(大学经济管理类丛书)
ISBN 978-7-5614-4248-7

Ⅰ. 动…　Ⅱ. 张…　Ⅲ. 动态经济学术-高等学校-教材
Ⅳ. F019.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 017271 号

书名　**动态经济学导论**

编　著	张　衔
出　版	四川大学出版社
地　址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　行	四川大学出版社
书　号	ISBN 978-7-5614-4248-7
印　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　张	19.25
字　数	440 千字
版　次	2009 年 2 月第 1 版
印　次	2009 年 2 月第 1 次印刷
印　数	0 001～3 000 册
定　价	35.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电 话:85408408/85401670/85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:www.scupress.com.cn

目 录

导 言

1 动态经济学的含义

动态是指能够产生时变（随时间演变）曲线的现象，该曲线在某一时刻的特征是与它在其他时刻的特征相联系的。因此，动态就是在连续演变的过程中所呈现的事件，它与随时间演变或变化的曲线是同义的（Luenberger，1979）。

动态系统是随时间的变化而变化的系统。按照萨缪尔森转述弗里希（1936）对动态系统的形式化定义，如果一个系统在时间过程中的行为是由那些在本质上把不同时点的变量包含在内的函数方程决定的，则这个系统就是动态的（萨缪尔森，1947）。

经济系统就是一个在时间过程中不断演化的动态系统，各经济变量之间是依时间而相互影响的，因此所有的经济变量本质上都是有时间下标的。由于经济活动是人的主体活动，这决定了经济行为人当前的经济活动不仅依赖于过去的经济活动，会受到过去的经济活动的影响，而且还会受到经济行为人关于未来预期的影响。这两种影响在性质上是不同的，这种性质上的不同在经济变量的时间下标上是有明显区别的。

描述动态系统的基本数学工具是微分方程和差分方程。前者适合于从连续时间角度来考察动态系统，后者适合于从离散时间角度来考察动态系统。

动态经济学所要研究的是经济系统随时间变化的过程，即经济系统从一个均衡点向另一个均衡点变化的过程及其结果。

2 动态经济学的形成

从经济思想史角度看，尽管古典经济学[①]多少包含了一些关于经济动态的思想，但是，最早将经济系统理解为一个动态演化过程，并对人类思想产生深远影响的是马克思。即使是在标准的形式化的动态经济学的意义上，马克思的贡献和影响也是巨大的。在《经济学手稿（1857—1858)》中，马克思独创了一个五部门联系平衡表。对平衡表的研究可以发现，这实际上是一个投入一产出系统。[②]《资本论》第二卷中的社会资本再生产理论，可以说是标准动态的。这使得前苏联经济学家费尔德曼（又译菲尔德曼）

① 这里的“古典经济学”在概念上与马克思定义的“古典政治经济学”同义。

② 张衔：《马克思的五部门联系平衡表：一个现代解释》，《海派经济学》，2007年第18卷。中国人民大学复印报刊资料《理论经济学》，2008年第3期。

能够在 1928 年，依据社会资本再生产理论建立起第一个现代经济增长模型，[①]而经济增长模型则是动态经济学的重要内容和最初形态。同时，考察马克思的经济增长思想可以发现，在马克思那里，知识、科学技术、制度等，都是内生性的。[②]

在凯恩斯革命以前，以马歇尔为代表的新古典经济学成为西方经济学的标准体系。这个体系的明显特点是它的静态性。但是，在标准体系之外，仍然存在着用动态观点和方法对经济问题的思考。

克拉克（1899）提出将经济学分为静态经济学和动态经济学，熊彼特（1912）则采用动态观点对资本主义经济中的创新过程进行了考察，形成了属于动态学的创新理论。1928 年，拉姆齐在《储蓄的数学理论》一文中，研究了社会最优储蓄行为即跨时资源最优分配问题，构建了家庭最优消费选择模型，这是在经济学中对变分法的最早运用之一，并对动态经济学产生了广泛影响。经凯斯和库普曼斯（1965）改进的拉姆齐模型已经成为动态最优化理论的基本模型。

瑞典学派的经济学家在 20 世纪 30 年代区别了静态经济学和动态经济学，并给出了关于动态经济学的研究方法（米尔达尔，1931；林达尔，1939）。

深受马克思经济学影响的波兰经济学家卡莱茨基，在 1933—1935 年连续发表的论文中，创造了关于资本主义经济的动态经济学。[③]卡莱茨基的混合微分－差分方程的经济周期理论（1935），在数学形式的经济周期模型中有重要地位。

1936 年，弗里希在《论均衡和非均衡概念》一文中，给出了动态系统的形式化定义和动态经济学的定义。这一定义被萨缪尔森（1947）所接受，并成为动态经济学的流行定义。

凯恩斯革命（1936）的一个重要成果，就是对动态问题的思考。在凯恩斯理论的基础上，哈罗德和多马分别在 1939 年和 1946 年、1947 年，通过将凯恩斯理论长期化、动态化，创造了现代经济增长理论。哈罗德将这一理论称为“动态理论”和“经济动态学”（economic dynamics 又译“动态经济学”）。经济增长理论是动态经济学早期的主要内容。

1938 年，Ezekiel 提出了蛛网理论，这是动态方法在微观经济学中的运用。古德温（1947）通过引入期望价格，发展了蛛网理论。

1939 年，萨缪尔森发表《乘数分析与加速原理的相互作用》一文，将乘数分析与加速数分析结合起来，给出了凯恩斯主义的经济周期理论模型，即汉森－萨缪尔森周期

---

① 费尔德曼：《关于国民收入增长理论》，[苏]《计划经济》，1928 年第 11 期。多马对费尔德曼的模型作了细致的研究。见多马：《苏联的增长模型》，载《经济增长理论》，商务印书馆，1983 年。《新帕尔格雷夫经济学大辞典》有对费尔德曼贡献的介绍。

② 在讨论劳动生产力决定因素时，马克思就已经给出了一个内生性生产函数：

$$L=F(A,\ S_p,\ P_s,\ P_m,\ N)$$

其中包括劳动者的熟练程度(A)、科学的发展水平及其在工艺上应用的程度(S_p)、生产过程的社会结合(P_s)、生产资料的规模和效能(P_m)以及自然(N)。按马克思的理论，自然是可以通过人的活动来改造的，它同样取决于技术进步。然而，新古典生产函数所考虑的只是劳动和资本 $Y=F(L,\ K)$。

③ 参见柳欣：《资本理论》，陕西人民出版社，1994 年。

模型，这是动态分析方法在宏观经济学中的运用。1950年，希克斯在《对经济周期理论的贡献》一书中，发展了萨缪尔森的乘数－加速数模型，提出了希克斯周期理论，这成为影响持久的凯恩斯主义的周期理论。与此同时，古德温（1951）提出了形式上更加复杂的非线性加速数的经济周期模型。1941年，梅茨勒运用动态方法建立了库存周期模型。

在经济周期理论动态化的同时，出现了运用动态方法对宏观经济政策稳定化问题的研究。菲利浦斯（1954，1957）运用反馈控制原理，给出了稳定化政策模型，这是动态方法在宏观经济政策方面的运用。菲利浦斯的研究具有先驱性和超前性（甘道尔夫，2003）。

1956年，卡甘给出了一个动态货币模型，以解释超级通货膨胀。卡甘的这个动态模型在以后讨论理性预期中被当做一个起点。

另一方面，作为动态经济学主要内容的经济增长理论有了重要进展。1956年，索罗和斯旺建立了新古典增长理论。这一理论随后发展成为经济增长理论的主流。20世纪60年代，经济增长理论的内生化已经开始。索罗（1964）提出了技术体现型生产函数的同期模型，这是技术内生化的最初尝试。①

20世纪70年代，西方国家经历了严重的滞胀。居主流地位的新古典综合宏观经济学由于不能对滞胀作出合理的解释和预期而受到批评与责难，静态的IS－LM分析构架的局限性日益明显，新古典综合宏观经济学失去了主流地位。同时，已经形成的动态理论的基本特点是后顾性的（托洛维斯基，2002），不能适应描述决策主体对价格和汇率的前瞻性预期行为。正是在这种背景下，动态经济学发生了重大变化。在穆斯（1961）理性预期假说的基础上，卢卡斯（1972）、巴罗（1980）、基德兰德和普雷斯科特（1982）等人建立了理性预期宏观经济学。②在对理性预期宏观经济学批评的基础上，形成了以经济行为人跨时最优化决策为基本特征的动态最优化理论。动态最优化方法已经成为动态经济学的当前方法。

在索罗提出技术体现型生产函数而将技术进步内生化的20多年以后，在罗默（1986）等人的推动下，形成了内生化的新经济增长理论。

到20世纪90年代，动态经济学，特别是动态最优化实际上已经成为高级经济学的前沿性内容。

---

① 索罗的模型也称为索罗－尼尔森（Nelson）单期模型。其特点是将生产函数中代表广义技术进步的效率系数 $A(t)$ 加以分解，并体现在资本上：

$$Y_t = A'_t J_t^{\alpha} L_t^{\beta}$$

其中 A'_t 是去掉了体现在资本上的技术进步作用的效率系数，J_t^{α} 是以质量加权的资本投入。

$$J_t = \sum_{m=0}^{t} K_{mt}(1+\lambda_K)^m$$

其中 K_{mt} 是在第 m 年形成而在第 t 年仍然使用的资本量，λ_K 是技术水平不断提高而使新增资本按年度提高的效率。参见李子奈：《计量经济学》，第200～203页，清华大学出版社，1992年。

② 理性预期宏观经济学不是一个准确的概括，准确的概括应当是新古典宏观经济学（new classical economics）。

3 本书的特点

本书是关于动态经济学的基础性读物。根据动态系统的时间特性，对于连续时间的动态系统和动态最优化问题，适合采用微分方程和最优控制理论来描述；对于离散时间的动态系统和动态最优化问题，则适合采用差分方程和动态规划理论来描述。本书只考虑连续时间动态问题，因此，只介绍微分方程和以变分法为基本内容的最优控制原理及其应用。

全书共 7 章，分为两个部分。第一部分为动态经济学的数学基础，由第 1～5 章构成，分别介绍一阶微分方程、二阶微分方程、高阶微分方程、联立微分方程组和动态最优化理论。第二部分为连续时间动态经济分析，是第一部分所讲内容在经济学中的运用，由第 6～7 章构成，分别介绍连续时间动态微观经济分析和连续时间动态宏观经济分析。

已有的动态经济学导论性质的著作，在结构安排上大体可以分为两类。

一类是以介绍动态经济分析的数学基础为主，考虑的是数学知识的完整性。其特点是将动态经济分析的内容分别穿插在相应的数学基础中，结合数学基础加以介绍。例如，在介绍了一阶微分方程后就介绍一阶微分方程在动态经济分析中的应用。这种结构安排的长处是数学基础与相关的动态经济分析的相互结合较为密切，不足在于人为分割了动态经济学的完整性，使动态经济分析服从数学基础的要求，使读者不能从整体上掌握动态经济学。

另一类结构安排是平行介绍动态经济学的数学基础和动态经济学原理，即在结构安排上分为数学基础部分和动态经济分析部分。这种结构安排摆脱了将动态经济分析放在服从数学基础的地位，使读者能够较完整地理解动态经济分析。本书采取的就是这种结构安排。

但是，在采取这种结构安排的已有著作中，动态经济分析部分在内容安排上较为随机，有专题性质，没有区分微观分析和宏观分析。本书的一个特点是在动态经济分析部分明确区分了微观分析和宏观分析。

本书的另一个特点是介绍了马克思经济学在动态经济学形成中的地位，并介绍了马克思经济学的动态化内容，虽然只限于社会资本再生产理论。事实上，作为动态经济学的最初内容的经济增长理论就是首先从马克思经济学，而不是从凯恩斯经济学发展来的。可以认为，马克思经济学最有条件从动态学角度进行现代重述。对马克思经济学进行动态学现代重述，是作者计划中的学术任务。

第 1 章　一阶微分方程

1.1　微分方程

1.1.1　微分方程的概念

微分方程是含有未知函数的导数的函数方程。令变量 y 是时间 t 的连续函数，则方程

$$\frac{d^n y}{dt^n}=F[t,\ y(t),\ y'(t),\ \cdots,\ y^{n-1}(t);\ \alpha] \tag{1.1}$$

就是微分方程的一般形式。因此，微分方程就是时间的函数及其导数之间的关系。形如

(a)　$\frac{dy}{dt}=3x^2\sin(t+y)$

(b)　$\frac{d^2y}{dt^2}+4t\frac{dy}{dt}-3(1-t^2)y=0$

(c)　$\frac{d^3y}{dt^3}=e^{-y}+t+\frac{d^2y}{dt^2}$

(d)　$\frac{dy}{dt}=ky$

的方程都是微分方程。在这些方程中，除了时间变量 t，都只含有一个变量 y，这类方程称为常微分方程。若未知函数中包含多个自变量，并且包含未知函数的偏导数，如下列方程：

(e)　$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial t}+6u=0$

(f)　$\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}$

(g)　$\frac{\partial^2 v(x,\ y,\ z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v(x,\ y,\ z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v(x,\ y,\ z)}{\partial z^2}=0$

则被称为偏微分方程。在本书，我们只讨论常微分方程。

微分方程的阶数就是方程中出现的函数的最高阶导数的阶数。在上述微分方程中，(a)和(d)是一阶微分方程，(b)和(c)分别是二阶微分方程、三阶微分方程。

微分方程的解或积分是指一个连续函数 $y(t)$，这个函数能够满足微分方程中表达的关系。因此，微分方程的解是不再包含导数或微分的方程，它被定义在一定的区间内，当自变量取这个区间内的任意值，它均能满足微分方程。例如，求解满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a$$

的所有函数 $y(t)$，只要对方程两边求积分即可：

$$y(t)=\int a\mathrm{d}t=at+c$$

函数 $y(t)=at+c$ 即是一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a$$

的解。事实上，对 $y(t)=at+c$ 进行微分就得到$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a$。而函数

$$y(t)=\frac{1}{2}at^2+bt+c$$

则是二阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=a$$

的解。因为对这个解微分两次就得到$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=a$。

在上述例子中，解都存在任意常数 b 和 c，因此解不是唯一的。含有任意常数的解称为通解，通解包含了所有的在一个开区间内的可能的解。n 阶微分方程的通解是一个恰好包含 n 个任意常数的关于 t 的函数：

$$y(t)=f(t;\ C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n)$$

或

$$Y=Y(t;\ C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n)$$

其中 C 是任意常数。

若任意常数是确定的，则微分方程就有一个特殊解或定解。定解是满足 $y(t^*)=y^*$ 时的特殊解。

在动态经济学中，线性微分方程有着广泛的应用。n 阶线性微分方程的一般形式是：

$$a_0(t)\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)y=g(t) \tag{1.2}$$

若 $a_0(t)$，$a_1(t)$，$\cdots$，$a_n(t)$是常数（它们独立于时间 t），则方程（1.2）就是一个常系数 n 阶线性微分方程，即

$$a_0\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_ny=g(t) \tag{1.2a}$$

若方程（1.2）的 $g(t)\equiv0$，则 n 阶线性微分方程（1.2）变为

$$a_0(t)\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)y=0 \tag{1.3}$$

方程（1.3）被称为齐次的。相应的常系数 n 阶齐次线性微分方程为

$$a_0\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_ny=0 \tag{1.3a}$$

若方程（1.2）的 $g(t)\neq 0$，则 n 阶线性微分方程（1.2）就是非齐次的。与非齐次方程相比，齐次方程是简单的。

比较而言，在经济学中，应用得最多的微分方程是常系数线性微分方程。在数学上，常系数线性微分方程也是最容易处理的一类微分方程。

1.1.2　常系数线性微分方程的基本定理

下面我们不加证明地给出常系数线性微分方程的基本定理。

定理 1.1　若 $y_1(t)$是齐次线性方程（1.3）的解，则 $Cy_1(t)$也是齐次线性方程（1.3）的解，其中 C 是任意常数。

定理 1.2（叠加原理）　若 $y_1(t)$和 $y_2(t)$是齐次线性方程（1.3）的两个解，则它们的线性组合

$$C_1y_1(t)+C_2y_2(t)$$

也是齐次线性方程（1.3）的解，其中 C_1，C_2 为任意常数。

显然，若 $y_1(t)$，$y_2(t)$，…，$y_n(t)$是齐次线性方程（1.3）的 n 个解，C_1，C_2，…，C_n 是 n 个常数，则它们的线性组合

$$C_1y_1(t)+C_2y_2(t)+\cdots+C_ny_n(t)$$

同样是齐次线性方程（1.3）的解。

定义 1.1　如果对于函数组 $y_1(t)$，$y_2(t)$，…，$y_n(t)$，$t\in(\alpha,\beta)$，存在 n 个不全为零的常数

$$C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n$$

使恒等式

$$C_1y_1(t)+C_2y_2(t)+\cdots+C_ny_n(t)\equiv 0$$

对一切 $t\in(\alpha,\beta)$成立，就称函数组 $y_1(t)$，$y_2(t)$，…，$y_n(t)$在区间(α,β)内线性相关；否则，如果上述恒等式仅当 $C_1=C_2=\cdots=C_n=0$ 时才成立，就称函数组在该区间内线性无关。

定义 1.2　设函数组 $y_1(t)$，$y_2(t)$，…，$y_n(t)$有直至 $n-1$ 阶导数，则称由它们构成的行列式

$$W(t)\triangleq\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ y_1^{n-1}(t) & y_2^{n-1}(t) & \cdots & y_n^{n-1}(t)\end{vmatrix}\equiv 0,\ t\in(\alpha,\beta)$$

为函数组 $y_1(t)$，$y_2(t)$，…，$y_n(t)$的朗斯基行列式。

引理 1.1　函数组 $y_1(t)$，$y_2(t)$，…，$y_n(t)$在区间(α,β)内线性无关的充分必要条件是它们的朗斯基行列式不等于零，即

$$W(t)\neq 0,\quad t\in(\alpha,\beta)$$

由引理 1.1 可以证明，n 阶齐次线性方程有且仅有 n 个线性无关的解。

定义 1.3　n 阶齐次线性方程（1.3）的 n 个线性无关的解，称为齐次线性方程（1.3）的一个基本解组。

定理 1.3（齐次线性方程的通解结构定理） 如果函数组 $y_1(t)$，$y_2(t)$，…，$y_n(t)$，$t\in(\alpha,\beta)$，是齐次线性方程（1.3）的一个基本解组，则齐次线性方程（1.3）的通解是

$$f(t;C_1,C_2,\cdots,C_n)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)+\cdots+C_ny_n(t)$$

其中 C_1，C_2，…，C_n 为任意常数。

由定理 1.3 可知，为了求齐次线性方程（1.3）的通解，只需求得齐次线性方程（1.3）的一个基本解组 $y_1(t)$，$y_2(t)$，…，$y_n(t)$，然后分别乘以任意常数 C_1，C_2，…，C_n，再相加即可。

引理 1.2 设 $\bar{y}(t)$与 $y(t)$是方程（1.2）的两个解，则 $\varphi(t)=y(t)-\bar{y}(t)$是方程（1.2）对应的齐次线性方程（1.3）的解；设 $\bar{y}(t)$与 $\varphi(t)$分别是方程（1.2）和与它对应的齐次方程的解，则 $y(t)=\varphi(t)+\bar{y}(t)$也是方程（1.2）的解。

由引理 1.2 可以证明非齐次线性方程的通解结构定理。

定理 1.4（非齐次线性方程的通解结构定理） 如果 $f(t;C_1,C_2,\cdots,C_n)$是齐次线性方程（1.3）的通解，$\bar{y}(t)$是非齐次方程（1.2）的任意特解，即满足非齐次方程（1.2）的一个函数，则

$$\begin{aligned}y(t)&=\bar{y}(t)+f(t;C_1,C_2,\cdots,C_n)\\&=\bar{y}(t)+C_1y_1(t)+C_2y_2(t)+\cdots+C_ny_n(t)\end{aligned}$$

是非齐次方程（1.2）的通解。

非齐次方程（1.2）的通解由两部分构成：其中 $\bar{y}(t)$被称为特别积分或特解；其余部分称为余函数，即对应的齐次方程的通解。因此，齐次方程的通解只是非齐次方程通解的一部分。

定理 1.5 若 $y_1(t)$和 $y_2(t)$分别是方程

$$a_0\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_ny=g_1(t)$$

和

$$a_0\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_ny=g_2(t)$$

的解，则 $y(t)\equiv y_1(t)+y_2(t)$就是方程

$$a_0\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_ny=g_1(t)+g_2(t)$$

的解。

定理 1.2 和定理 1.3 分别是齐次方程的叠加定理与解的结构定理。定理 1.4 和定理 1.5 是非齐次方程解的结构定理与叠加定理。这些定理给出了求解常系数线性微分方程的步骤。

根据定理 1.2 和定理 1.3，求解齐次方程通解的过程包括求出 n 个相异的根 $y_1(t)$，$y_2(t)$，…，$y_n(t)$，然后再将它们进行线性组合。

对于求解非齐次方程而言，由定理 1.4，应首先根据定理 1.1 和定理 1.2 求出与非

齐次方程对应的齐次方程的通解 $f(t;C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 即非齐次方程的余函数，然后再求出非齐次方程的一个特解 $\bar{y}(t)$，最后将两者相加就得到非齐次方程的通解。如果非齐次方程的已知函数 $g(t)$ 非常复杂，则可利用定理 1.5 将 $g(t)$ 分解为 $g(t)=g_1(t)+g_2(t)$，然后分别对 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 求解，再将解相加就得到非齐次方程的通解。

由于非齐次方程的特解 $\bar{y}(t)$ 依赖于已知函数 $g(t)$ 的形式，因此，在求非齐次方程的特解时，可以选择一个形式与 $g(t)$ 相同但系数待定的函数来试解：若 $g(t)$ 是常数，就用一个待定常数来试解；若 $g(t)$ 是一个指数函数，就用含有待定系数的同样的指数函数来试解。这种方法称为待定系数法。

非齐次方程的余函数可以用特征方程来求解。这种方法是以假定对于某个常数 λ 存在形如 $y(t)=e^{\lambda t}$ 的解为基础的。对齐次微分方程

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_0 y=0$$

令对于某个常数 λ 存在形如 $y(t)=e^{\lambda t}$ 的解，将它代入齐次方程得到

$$\lambda^n e^{n\lambda}+a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{n\lambda}+\cdots+a_0 e^{n\lambda}=0$$

消去 $e^{n\lambda}$ 得到如下特征方程

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_0=0$$

方程的左边是特征多项式，该多项式的任意根是特征值。显然，若 $y(t)=e^{\lambda t}$ 是齐次方程的解，则 λ 必须满足特征方程；反之，若 λ 是满足特征方程的一个值，则通过与上面相反的讨论可知 $y(t)=e^{\lambda t}$ 是微分方程的一个解。因此，如果特征多项式的根各不相同，则按上述方程得到的 n 个不同的解对应于原方程所固有的 n 个自由度。

例 1　一阶微分方程

$$\frac{dy}{dt}=ay$$

有特征方程 $\lambda-a=0$，它仅有一个根 $\lambda=a$，从而得到解函数即非齐次方程的余函数

$$y(t)=Ce^{at}$$

其中 C 为任意常数。

1.1.3　任意常数的确定

为确定 n 个任意常数 C，就需要有 n 个辅助条件。这些辅助条件规定了微分方程的解函数及其导数在某个时点的值。若取 $t=0$ 为初始时点，则与该时点相关的辅助条件称为初始条件。例如，当 $t=0$ 时，令 $y(t)$ 的值为 $y(0)$，辅助条件 $y(0)$ 即为初始条件。初始条件要求系统在时刻 $t=0$ 从某个给定的点 $y(0)$ 出发，即开始初始变动。

微分方程和一个初始条件一起被称为初值问题，问题的解是方程的一个特解。

在初始条件 $y(t)=y(0)$，$y'(t)=y'(0)$，…，$y^{n-1}(t)=y^{n-1}(0)$ 中，$y(0)$，$y'(0)$，…，$y^{n-1}(0)$ 是已知的，将它们代入微分方程的通解就可以得到一组关于 n 个未知数 C_1，C_2，…，C_n 的 n 个线性方程组。例如，非齐次方程的通解

$$y(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)+\cdots+C_ny_n(t)+\bar{y}(t)$$

中 $y_1(t)$，$y_2(t)$，…，$y_n(t)$是 n 个相应齐次方程的线性无关解。由于上式恒成立，可以对上式求导 $n-1$ 次，再令 $t=0$ 并代入已知值 $y(0)$，$y'(0)$，…，$y^{n-1}(0)$，得到线性方程组

$$
\begin{aligned}
&C_1 y_1(0)+C_2 y_2(0)+\cdots+C_n y_n(0)=y(0)-\bar{y}(0)\\
&C_1 y_1'(0)+C_2 y_2'(0)+\cdots+C_n y_n'(0)=y'(0)-\bar{y}'(0)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&C_1 y_1^{n-1}(0)+C_2 y_2^{n-1}(0)+\cdots+C_n y_n^{n-1}(0)=y^{n-1}(0)-\bar{y}^{n-1}(0)
\end{aligned}
$$

其行列式在 t 为任何值时均不为零，因此，线性方程组永远有解。

因此，求解 n 阶方程的方法是从通解中利用初始条件，定出常数 C_i，而得到方程的解。

下面给出线性微分方程解的存在性与唯一性定理。

定理 1.6 设系数 $a_i(t)$，$i=0, 1, 2, \cdots, n-1$ 和函数 $g(t)$ 在区间 $0\leqslant t\leqslant T$ 上连续，则对于任意一组数值 b_i，$i=0, 1, 2, \cdots, n-1$，满足初始条件

$$
\begin{aligned}
&y(0)=b_0\\
&\frac{\mathrm{d}y(0)}{\mathrm{d}t}=b_1\\
&\vdots\\
&\frac{\mathrm{d}y^{n-1}(0)}{\mathrm{d}t^{n-1}}=b_{n-1}
\end{aligned}
$$

的线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_0(t)y=g(t)$$

存在唯一解。

该定理允许按照 t 向前推移来解微分方程。一旦指定了一组初始条件，就可以沿着所得到的解向前推移以推测时刻 $t_1>0$ 的值。此时，即使原来的初始条件被遗忘了，时刻 t_1 的 n 个相应条件也可以用来确定一切 $t>t_1$ 时的唯一解。

1.1.4 线性微分方程的稳定性

稳定性问题是指当 $t\to\infty$时，微分方程的解是否收敛于“均衡点”的问题。对于 n 阶线性微分方程(1.2a)

$$a_0\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n y=g(t)$$

的解有如下定义：

定义 1.4 设方程的特解为 $\bar{y}(t)$. 则称 $\bar{y}(t)$为方程的均衡解；如果 $\bar{y}(t)$为常数，则称其为方程的稳态均衡解或均衡值；如果 $\bar{y}(t)$是 t 的函数，则称其为移动均衡解。

设方程 (1.2) 的均衡解（特解）为 $\bar{y}(t)$，对应的齐次方程的通解（非齐次方程的余函数）为 $y_A(t)$，则方程 (1.2) 的通解为 $y(t)=\bar{y}(t)+y_A(t)$。如果

$$\lim_{t\to\infty}[y(t)-\bar{y}(t)]=0$$