高等职业教育

工科专业适用

高等数学

下

主编 唐守宪

王德才

杨明杰

主审 杜吉佩

辽宁大学出版社

高 等 数 学

（下）

主　　编　唐守宪　王德才　杨明杰
主　　审　杜吉佩

下册主编　赵文茹　张　雷
主　　审　曹成龙

辽宁大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/唐守宪等主编，一沈阳：辽宁大学出版社，2005.5
ISBN　7－5610－4873－4

Ⅰ.高...　Ⅱ.唐...　Ⅲ.高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 065129 号

出 版 者：辽宁大学出版社
（地址：沈阳市皇姑区崇山中路 66 号　邮政编码：110036）
印 刷 者：金城印刷厂
发 行 者：辽宁大学出版社
幅面尺寸：185mm×260mm
印　　张：42.25
字　　数：1040 千字
印　　数：1～3000
出版时间：2005 年 5 月第 1 版
印刷时间：2005 年 5 月第 1 次印刷
责任编辑：马　静
封面设计：刘桂湘
责任校对：依　人

定价(套)：55.00 元
联系电话：024－86864613　　http://www.lnupress.com.cn
邮购热线：024－86830665　　Email：mailer@lnupress.com.cn
如发现印装质量问题，请与印刷厂调换

内容提要

本套教材是根据2000年教育部制定的高等职业教育《高等数学》课程基本要求，并从高等职业技术教育教学特点和工科专业实际需要出发精心编写而成的.

教材分上、下册和配套的同步练习册共三部分，教材内容有：极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学、微分方程、无穷级数积分变换、概率论、数理统计初步、行列式与线性方程组. 本教材适合高等职业（院）校各工科专业使用.

前　言

本套教材是根据2000年教育部制定的高等职业教育《高等数学》课程基本要求，并从高等职业技术教育教学特点和工科专业实际需要出发精心编写而成的.

本套教材主要特色如下：

1. 教材的科学性

教材遵循以应用为目的，以“必需、够用”为度的原则. 编写不墨守成规，精选教学内容，保证基础，削枝强干，淡化理论证明，代之几何解释、物理意义等. 在教学方法上，采用具体、抽象、应用的思路，注重基本概念、基本方法和基本运算能力的培养. 教材自成体系，条理清晰，语言精练，通俗易懂. 注意渗透“大众数学（Mathematic of All)”意识. 为体现教材的宽泛性，本书还安排了一定章节的选学内容（用 * 号标示)，以满足不同的教学需要.

2. 教材的思想性

教材重视数学思想和方法的揭示，注重基本概念实际背景的揭示，注意将一些重要的数学思想和方法（集合思想、函数思想、化归思想、形数结合思想、极限思想、微元法思想、概率统计思想等）贯穿于全书内容之中，以培养学生良好的科学思维习惯.

3. 教材的创新性

根据信息时代的需求，适度更新了教学内容，将离散数学知识渗透在教材中. 教材还扩展了向量的应用，以突出知识运用的灵活性. 为促进教学手段的不断改革和创新，提高学生使用现代计算机技术解决数学问题的意识和能力，教材编写了第零章——符号计算系统 Mathematica 简介. 并重点介绍了用 Mathematica 进行一元函数微积分有关计算的方法，便于学生上机操作，开展数学实验，作为高等数学教学的延伸和补充.

4. 教材的应用性

教材对数学概念的引入是以生产、生活实际问题为背景，并选编了大量新颖的例题和习题，展示了数学的广泛应用性，使学生初步了解建立数学模型的方法. 教材将数学建模单列一章加以讨论，以培养学生的综合数学素质和应用能力.

5. 教材的系统性

教材在每章前配有本章提要，章后习题设计系统科学，可以帮助学生检测学习

效果，训练解题技巧，延伸和补充教材内容．教材还配有独立的同步练习册．

本套教材由唐守宪、王德才、杨明杰主编，负责全套教材的策划、统稿和定稿工作．分册主编为，上册：杨松梅、邢亚军；下册：赵文茹、张雷．上册主审孙增学；下册主审曹成龙．

参加各章编写的有唐守宪（第三章、第十二章、第十三章）；杨明杰（第七章）；杨松梅（第一章、第二章、第四章）；王德才（第零章、第五章、第六章）；冯丽（第八章）；李景龙（第九章）；张雷（第十章、第十一章）；赵文茹（第十四章、第十五章、阅读材料）；陈玄令、杜晓梅（同步练习册）．

渤海船舶职业技术学院杜吉佩教授对全部书稿进行了认真的审阅，并提出了许多有价值的修改建议；沈阳药科大学高职院朱明刚副教授对全书的习题做了认真的核对，在此一并表示感谢．

限于编者的水平，不当之处敬请读者批评指正．

编　　者

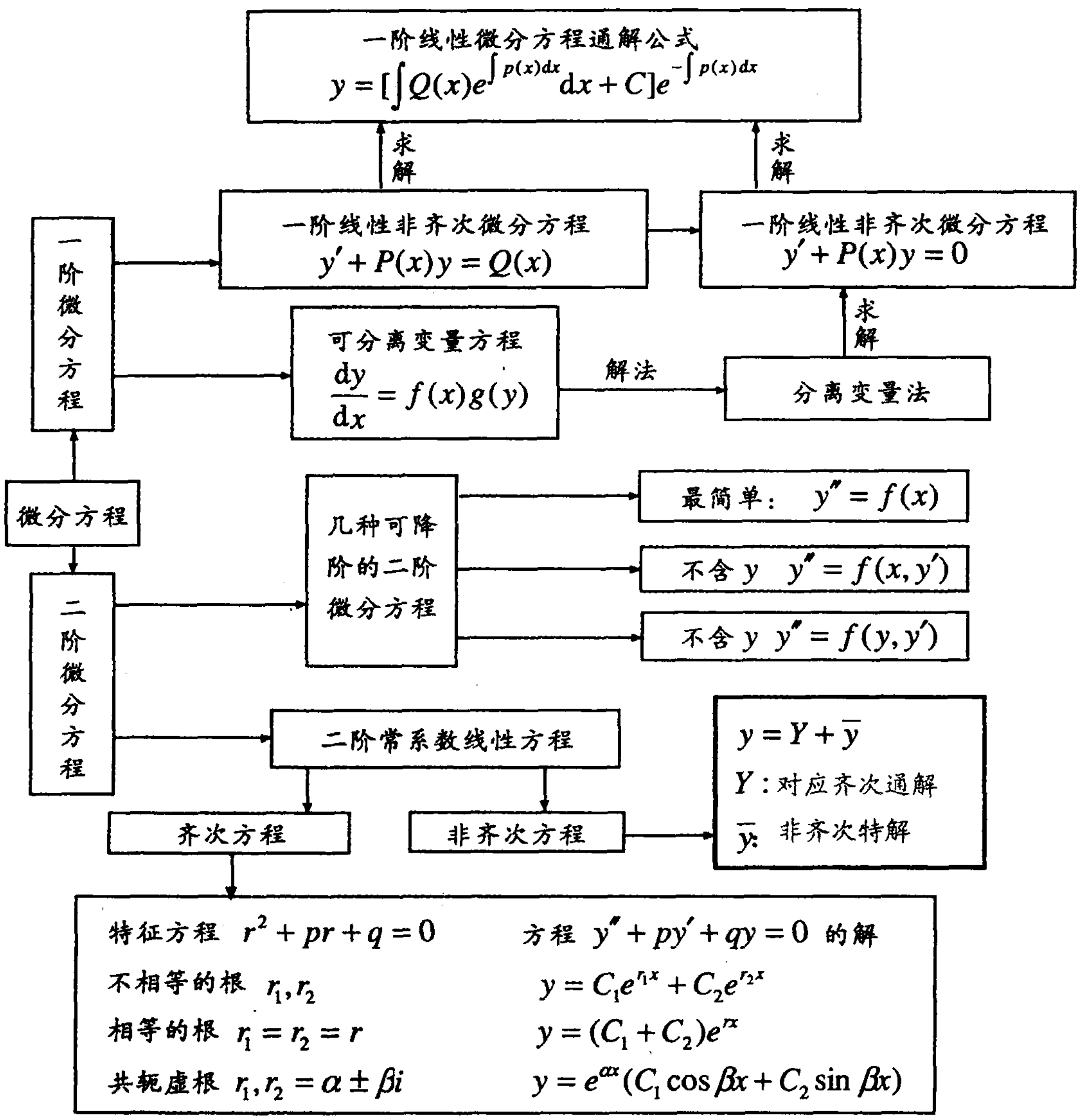
2005 年 5 月 18 日

目　　录

第九章　微分方程

在科学技术与经营管理中，有的问题需要通过未知函数及其导数(或微分)所满足的等式求未知函数，这个等式就是微分方程.本章讨论微分方程的基本概念和几种常用的微分方程的解法.

本章基本概念、基本方法、基本定理、公式如下：



§9－1　微分方程的基本概念

我们通过两个实例来说明微分方程的基本概念.

例 1　设作直线运动的物体的速度是 $v(t)=\cos t(\mathrm{m/s})$，当 $t=\frac{\pi}{2}(\mathrm{s})$ 时，物体经过的路程为 $s=10\mathrm{m}$，求物体的运动规律.

解　设物体的运动方程为 $s=s(t)$，由导数的物理意义有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\cos t. \tag{1}$$

根据题意，函数 $s(t)$ 还应满足条件

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right)=10. \tag{2}$$

对方程(1) 两端积分得

$$s=\sin t+C, \tag{3}$$

其中 C 是任意常数. 把条件(2) 代入(3) 式得

$$10=\sin\frac{\pi}{2}+C,$$

即 $C=9$，于是得所求物体的运动方程为

$$s=\sin t+9. \tag{4}$$

例 2　一条曲线通过点(0,1)，且该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线斜率为 $3x^2$，求这曲线的方程.

解　设所求曲线为 $y=y(x)$，由导数的几何意义有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2. \tag{5}$$

由于曲线过点(0,1)，因此有

$$y(0)=1. \tag{9}$$

对方程(5) 两端积分得

$$y=\int 3x^2\mathrm{d}x=x^3+C, \tag{7}$$

其中 C 为任意常数. 把条件(6) 代入(7) 式得

$$1=0+C,$$

即 $C=1$，于是得所求曲线的方程为

$$y=x^3+1. \tag{8}$$

两个例子中的方程(1) 和(5) 都含有未知函数的导数，对这样的方程我们有定义.

定义 1　凡含有自变量、自变量的未知函数以及未知函数的导数(或微分) 的方程称为**微分方程**(differential equation).

必须指出：在微分方程中，未知函数和自变量可以不出现，但未知函数的导数或微分必须出现.

微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为**微分方程的阶**(order). 例如，方程

(1) 和(5) 都是一阶微分方程. 又如,方程 $y\frac{d^4y}{dt^4}+t^2\frac{d^2y}{dt^2}+ty\frac{dy}{dt}=3y\sin t$ 是四阶微分方程.

如果把函数 $y=y(x)$ 代入微分方程后能使方程成为恒等式,这个函数就称为该微分方程的解. 例如,函数(3) 和(4) 都是方程(1) 的解,函数(7) 和(8) 都是方程(5) 的解. 求微分方程解的过程称为解微分方程.

如果微分方程的解中含有任意常数,且任意常数的个数正好与方程的阶数相同,这样的解称为通解(general solution). 例如,(3) 式是方程(1) 的通解,(7) 式是方程(5) 的通解.

如果微分方程的解中不含有任意常数,则此解称为特解(particular solution). 例如,(4) 式是方程(1) 的特解,(8) 式是方程(5) 的特解. 特解通常可按问题所给条件从通解中确定任意常数的值而得到. 用来确定特解的条件,称为初始条件. 例如,例 1 中的(2) 式与例 2 中(6) 式分别是例 1 和例 2 的初始条件. 一般地,如果微分方程是一阶的,则初始条件为

当 $x=x_0$ 时,$y=y_0$,或写成　$y|_{x=x_0}=y_0$,

其中 x_0、y_0 都是给定的值. 如果微分方程是二阶,则初始条件为

当 $x=x_0$ 时,$y=y_0$,$y'(x_0)=y'_0$;或写成 $y|_{x=x_0}=y_0$,$y'|_{x=x_0}=y'_0$,

其中 x_0、y_0 及 y'_0 都是给定的值.

微分方程的通解在几何上是一族积分曲线,特解则是满足初始条件的一条积分曲线.

例 3　把质量为 m 的物体从地面以初速度 v_0 竖直上抛,设物体只受重力作用,求物体的运动方程.

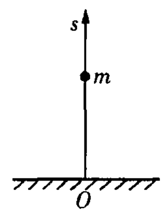


图 9－1

解　如图 9－1,建立坐标系,设物体的运动方程 $s=s(t)$. 根据牛顿第二定律有 $F=m\frac{d^2s}{dt^2}$,因物体只受重力作用,所以 $F=-mg$,其中负号是由于重力加速度 g 的方向与所建立坐标系的正方向相反,因此得

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-mg,$$

即

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g. \tag{9}$$

此外,根据题意,函数 $s(t)$ 还应满足两个条件

$$\begin{cases} s|_{t=0}=0, \\ \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=v_0. \end{cases} \tag{10}$$

对(9) 式两端积分一次得

$$\frac{ds}{dt}=-gt+C_1, \tag{11}$$

再积分一次得

$$s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \tag{12}$$

其中 C_1、C_2 都是任意常数.

将条件 $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=v_0$ 代入(11) 式,得 $C_1=v_0$,将条件 $s|_{t=0}=0$ 代入(12) 式得 $C_2=0$.

把 C_1、C_2 的值代入(12) 式得所求物体的运动方程 $s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t$.

练习题 9－1

1. 选择题

(1)(　　)是微分方程.

A. $dy=(4x-1)dx$　　B. $y=2x+1$　　C. $y^2-3y+2=0$　　D. $\int \sin x dx=0$

(2)(　　)不是微分方程.

A. $y'+3y=0$　　B. $\frac{d^2y}{dx^2}=3x+\sin x$

C. $3y^2-2x+y=0$　　D. $(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy=0$

(3) 微分方程$(y')^2+3xy=4\sin x$的阶数为(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 1　　D. 0

(4)(　　)是二阶微分方程.

A. $(x+\sin x)dx+(y-\cos y)dy=0$　　B. $(y')^2+y'+xy=0$

C. $3x\frac{dy}{dx}+2y=0$　　D. $y''+3xy+6\sin x=0$

2. 判断函数是否为所给微分方程的解:

(1)$xy'=2y, y=5x^2$;　(2)$y''=x^2+y^2, y=\frac{1}{x}$;　(3)$y''=0, y=ax+b$,($a,b$为常数);

(4)$y''+y'+3x=0, y=3x+4$;　(5)$y''+y=0, y=\sin x+\cos x$.

3. 判断函数是否为所给微分方程的通解:

(1)$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0$,　$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}(\lambda_1\neq\lambda_2)$;

(2)$(x-2y)y'=2x-y$,由方程$x^2-x+y^2=C$确定的隐函数y;

(3)$y'+2x=0, y=-x^2$;　(4)$\frac{dx}{dy}+\sin y=0$,　$y=\arccos x+C$.

4. 判断函数:(A)$y=2\sin x$;　(B)$y=\sin 2x$;　(C)$y=e^{2x}$;　(D)$y=e^{-2x}$是哪些方程的解.

(1)$\frac{dy}{dx}=-2y$;　(2)$\frac{dy}{dx}=2y$;　(3)$\frac{d^2y}{dx^2}=4y$;　(4)$\frac{d^2y}{dx^2}=-4y$.

§9－2　可分离变量的微分方程

一、可分离变量的微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \tag{9-2-1}$$

的微分方程称为可分离变量的微分方程(differential equation of separable variables).

将(9－2－1)分离变量得$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$,

两端积分

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx,$$

得方程(9－2－1)的通解$G(y)=F(x)+C$,其中,$G(y)$、$F(x)$分别是$\frac{1}{g(y)}$、$f(x)$的原函数.

例1　求微分方程$\frac{dy}{dx}=2xy$的通解.

解　方程为可分离变量微分方程,分离变量得　$\frac{dy}{y}=2xdx$. 两端积分得

$$\int\frac{dy}{y}=\int 2x dx,\quad \ln|y|=x^2+C_1,$$

从而　$|y|=e^{x^2+C_1}=e^{C_1}e^{x^2}$，

即　$y=\pm e^{C_1}e^{x^2}$.

由于 $\pm e^{C_1}$ 仍是任意常数，可记为 C，于是，方程的通解为 $y=Ce^{x^2}$.

以后为了运算方便起见，可把 $\ln|y|$ 写成 $\ln y$.

例 2　求微分方程 $\tan x\sin^2 y dx+\cos^2 x\cot y dy=0$ 的通解.

解　方程为可分离变量微分方程，分离变量得 $-\dfrac{\cot y}{\sin^2 y}dy=\dfrac{\tan x}{\cos^2 x}dx$.

两边积分

$$-\int\frac{\cot y}{\sin^2 y}dy=\int\frac{\tan x}{\cos^2 x}dx$$

得　$\dfrac{1}{2}\cot^2 y=\dfrac{1}{2}\tan^2 x+C_1$，

即　$\tan^2 x-\cot^2 y=2C_1$，令 $C=-2C_1$，

则所求通解为 $\tan^2 x-\cot^2 y=C$.

例 3　求微分方程 $y'=10^{x+y}$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=0$ 的特解.

解　把原方程改写为　$\dfrac{dy}{dx}=10^x\cdot 10^y$.

分离变量，得 $10^{-y}dy=10^x dx$.

两边积分，得 $\int 10^{-y}dy=\int 10^x dx$，

$$-10^{-y}\cdot\frac{1}{\ln 10}=10^x\cdot\frac{1}{\ln 10}+C_1,$$

化简得　$10^x+10^{-y}=-C_1\ln 10$，令 $C=-C_1\ln 10$

则方程的通解为 $10^x+10^{-y}=C$，

把初始条件 $y|_{x=1}=0$ 代入通解，求得 $C=11$，故所求方程的特解为 $10^x+10^{-y}=11$.

例 4　设 RC 充电电路如图 9－2 所示，如果合闸前，电容器上电压 $U_C=0$，求合闸后电压 U_C 的变化规律.

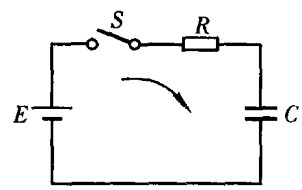


图 9－2

解　根据回路电压定律 $U_R+U_C=E$，因为

$$i=\frac{dq}{dt}=C\frac{dU_C}{dt}\quad(q=CU_C),$$

所以　$U_R=iR=R\dfrac{dq}{dt}$，$U_R=RC\dfrac{dU_C}{dt}$

于是得微分方程　$RC\dfrac{dU_C}{dt}+U_C=E$.

又由题意得初始条件 $U_C|_{t=0}=0$. 将微分方程分离变量得 $\dfrac{dU_C}{E-U_C}=\dfrac{dt}{RC}$，

两边积分得　$-\ln(E-U_C)=\dfrac{1}{RC}t-\ln\lambda$　（λ 为任意常数）.

化简得微分方程的通解 $U_C=E-\lambda e^{-\frac{1}{RC}t}$.

把初始条件代入得 $0=E-\lambda e^0$，即 $\lambda=E$，于是，所求的充电电路的电压 U_C 的变化规律是 $U_C=E(1-e^{-\frac{1}{RC}t})$.

* **例 5** 生物活体含有少量固定比的放射性^{14}C，其死亡时存在的^{14}C量按与瞬时存量成比例的速率减少，其半衰期约为 5 730 年，在 1972 年初长沙马王堆一号墓发掘时，若测得墓中^{14}C含量为原量的 77.2%，试断定马王堆一号墓主人轪侯夫人辛追的死亡时间.

解 设墓中^{14}C在 t 时含量为 $x(t)$，由题设有 $\frac{dx}{dt}=-kx(k>0)$，分离变量得$\frac{dx}{x}=-kdt$，两边积分得 $\ln x=\ln C-kt$，即 $x=Ce^{-kt}$. 记^{14}C原含量为 x_0，代入方程通解得 $C=x_0$，所以 $x=x_0e^{-kt}$，又由^{14}C半衰期为 5 730 年. 所以，$\frac{1}{2}x_0=x_0e^{-k\cdot 5\,730}$，解得 $k=\frac{\ln 2}{5\,730}$，于是 $x=x_0e^{-\frac{\ln 2}{5\,730}t}$，解出 $t=-\frac{5\,730}{\ln 2}\ln\frac{x}{x_0}$. 当$\frac{x}{x_0}=0.772$ 时，$t=-\frac{5\,730}{\ln 2}\ln 0.772\approx 2\,139$(年).

这表明距 1972 年初马王堆一号墓发掘时，墓中人已死亡约 2 139 年，由 $2\,139-1\,971=168$(年)，即墓中人轪侯夫人辛追死亡时间约为公元前 168 年.

一般地，用微分方程寻求实际问题中未知函数的步骤是：

(1) 分析问题，建立微分方程，确定初始条件；

(2) 求出微分方程的通解；

(3) 由初始条件确定通解中任意常数，得方程相应特解，即为所求函数.

*二、齐次方程

若一阶微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 中的函数 $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$，这类方程称为**齐次微分方程**.

例如：

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}$， $f(x,y)=\dfrac{\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}}{1-2\frac{y}{x}}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$；

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}$， $f(x,y)=\dfrac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$；

(3) $x\frac{dy}{dx}+y=2\sqrt{xy}$，$f(x,y)=\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}+2\frac{\sqrt{xy}}{x}=-\frac{y}{x}+2\sqrt{\frac{y}{x}}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

都是齐次微分方程.

现在我们来求齐次微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{9-2-2}$$

的解. 设$\frac{y}{x}=u$，则 $y=ux$，两端对 x 求导得$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，

代入原方程(9－2－2)得 $u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$，即 $x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u$.

分离变量得
$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x},$$

两端积分，即得齐次方程的通解.

例 6 求方程$(xy-y^2)dx-(x^2-2xy)dy=0$ 的通解.

解　原方程可化为$\frac{dy}{dx}=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}=\frac{\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-2\frac{y}{x}}$.

设$\frac{y}{x}=u$，则 $y=ux$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$. 代入原方程得 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{u-u^2}{1-2u}$，即

$$x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{1-2u},$$

分离变量得　$\frac{1-2u}{u^2}du=\frac{dx}{x}$,

两边积分　$\int\frac{du}{u^2}-2\int\frac{du}{u}=\int\frac{dx}{x}$，得 $-\frac{1}{u}-2\ln u=\ln x+\ln C$，即

$$-\frac{1}{u}=\ln Cxu^2,\qquad Cxu^2=e^{-\frac{1}{u}}.$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代回得　$Cx\left(\frac{y}{x}\right)^2=e^{-\frac{x}{y}}$，　$y^2=\frac{1}{C}xe^{-\frac{x}{y}}$.

故原方程的通解为　$y^2=C_1xe^{-\frac{x}{y}}$　$\left(C_1=\frac{1}{C}\right)$.

例 7　求方程 $x\frac{dy}{dx}+y=2\sqrt{xy}$ 的通解.

解　原方程可化为　$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}$.

设　$\frac{y}{x}=u$，则 $y=xu$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$. 代入原方程得 $u+x\frac{du}{dx}=2\sqrt{u}-u$.

分离变量得$\frac{dx}{x}=\frac{du}{2(\sqrt{u}-u)}$，两端积分　$\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}-u}$.

令 $u=t^2$，$du=2tdt$ 得

$$\ln x=\frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{t-t^2}=\int\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-t)+\ln C=\ln\frac{C}{1-t},$$

即

$$x=\frac{C}{1-t}=\frac{C}{1-\sqrt{u}},\qquad \therefore x\left(1-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)=C.$$

所以原方程的通解为　$x-\sqrt{xy}=C$.

练习题 9－2

1. 判断方程是否是可分离变量微分方程：

(1)$(x^2+1)dx+(y^2-2)dy=0$；　(2)$(x^2-y)dx+(y^2+x)dy=0$；

(3)$(x^2+y^2)y'=2xy$；　(4)$2x^2yy'+y^2=2$；　(5)$x^3(y'-x)=y^3$.

2. 解微分方程：

(1) $\sqrt{1-y^2}dx-\sqrt{1-x^2}dy=0$；　(2)$y'=y\sin x$；　(3)$y'+e^xy=0$；

(4)$y'=\frac{x^3}{y^3}$，$y|_{x=1}=0$；　(5)$xy'-y=0$，$y|_{x=1}=2$；

(6)$(x^2-1)y'+2xy^2=0$，$y|_{x=0}=1$；　(7)$2x^2yy'+y^2=2$；

(8) $y' - xy^2 = 2xy$；

(9) $(1+x^2)y' = y\ln y$；

(10) $y'\sin x = y\ln y, y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$；

* (11) $(x+y)y' + (x-y) = 0$；

* (12) $y^2 + x^2\dfrac{dy}{dx} = xy\dfrac{dy}{dx}$；

* (13) $y' = \dfrac{y}{x} + \tan\dfrac{y}{x}$；

* (14) $y' = \dfrac{y^2}{xy - 2x^2}$；

* (15) $y' = 1 - \cos(y-x)$（提示：令 $y - x = t$）；

* (16) $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0, y|_{x=0} = 1$.

3. 设某曲线上任意一点的切线介于两坐标轴之间的部分恰为切点所平分，已知此曲线过点(2,3)，求它的方程.

4. 作直线运动物体的速度与物体到原点的距离成正比，已知物体在 10s 时与原点相距 100m，在 20s 时，与原点相距 200m，求物体的运动规律.

*5. 1987 年在河南省舞阳县贾湖出土的 25 只用乌腿骨做成的骨笛，能吹奏现代乐曲，经国际学术界用 ^{14}C 测定，确认为最古老的吹奏乐器，若测得这批骨笛的 ^{14}C 含量为原量的 33.66%，试确定这批骨笛的年代.

*6. 模拟一个人的学习过程用微分方程 $\dfrac{dy}{dt} = 100 - y$，其中 y 是一项知识（工作）被掌握了的百分数，时间 t 的单位为周，求学习过程规律.

*7. 在美国把核废料抛到 91.5m 深的海底是否恰当的争论中，工程师们试验发现，当废物桶落到海底的速度超过 12.2m/s 时，会与海底相撞而破裂，而废物桶速度 v 与海水深 x 满足微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{W}{g}v\dfrac{dv}{dx} = W - B, \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

美国这样抛核废物桶到海底是否妥当（其中桶重 W 为 239.46kg，g 为 $9.8m/s^2$，海水对桶的浮力 B 为 213.5kg）？

8. 物体的冷却速率正比于物体温度与环境温度之差. 用开水泡速溶咖啡，3min 后咖啡的温度是 85℃，若房间温度为 20℃. 几分钟后咖啡温度为 60℃？

§9—3　一阶线性微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (9-3-1)$$

的微分方程称为一阶线性微分方程（first order linear differential equation），若 $Q(x) \neq 0$，则方程(9—3—1)称为一阶线性非齐次微分方程（first order linear nonhomogeneous differential equation），若 $Q(x) \equiv 0$，即

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \qquad (9-3-2)$$

方程(9—3—2)称为一阶线性齐次微分方程（first order linear homoqeneous differential equation）.

例如方程 $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = 3x^2\sin x^3$ 就是一阶线性非齐次微分方程，与它对应的一阶线性齐次微分方程为 $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = 0$.