福建省高校
专升本统一招生考试
公共课指定教材

高等数学

下册

FUJIANSHENG GAOXIAO
ZHUANSHENGBEN TONGYI ZHAOSHENG KAOSHI
GONGGONGKE ZHIDING JIAOCAI

张国勇 / 主　编
王昆仑 / 副主编
徐荣聪 / 主　审

GAODENGSHUXUE

厦门大学出版社

高等数学

下册

张国勇 / 主　编
王昆仑 / 副主编
徐荣聪 / 主　审

福建省高校专升本统一招生考试公共课指定教材

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下/张国勇主编，一厦门：厦门大学出版社，2005.10

福建省高校专升本统一招生考试公共课指定教材(用书)

ISBN 7-5615-2465-X

Ⅰ.高…　Ⅱ.张…　Ⅲ.高等数学-成人教育：高等教育-升学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 103518 号

厦门大学出版社出版发行

(地址：厦门大学　邮编：361005)

http://www.xmupress.com

xmup @ public.xm.fj.cn

南平武夷美彩印中心印刷

(地址：南平市八一路 352 号　邮编：353000)

2005 年 10 月第 1 版　2005 年 10 月第 1 次印刷

开本：787×1092　1/16　印张：8.75　插页：2

字数：224 千字

定价：10.00 元

福建省高等学校专升本
统一招生考试教材编审委员会

（以姓氏笔画为序）

福建省高等学校专升本统一招生考试公共课指定教材

《高等数学》(下册)编写组成员

(按姓氏笔画为序)

王为民　(福建水利电力职业技术学院)

王昆仑　(福建工程学院、副主编)

张玉祥　(福建交通职业技术学院)

张国勇　(福建交通职业技术学院、主编)

编 写 说 明

随着社会主义市场经济体制的建立，经济的发展对应用型人材的需求越来越多。大力发展职业技术教育是实施科教兴国战略，提高劳动者素质，促进经济发展、社会进步以及劳动就业的重要途径。而选拔高职高专毕业生进入本科高等学校继续学习是高等职业技术教育发展的重要标志。近年来参加高职高专毕业生进入本科高等学校继续学习入学考试的学生越来越多，但目前省内缺乏《高等数学》考试教材(用书)。由省教育厅指导和组织，在厦门大学出版社支持下，福建省高等数学研究会组织了福州大学、福建农林大学、集美大学、福建工程学院、闽江学院、福建交通职业技术学院、福建水利电力职业技术学院等七所高等学校的《高等数学》任课教师编写了《高等数学》专升本考试教材(用书)，以满足广大考生的需要。本教材兼具教学与考试指导用书的性质，即既可以作为新生使用的教材，亦可以作为应届毕业生参加全省专升本考试的用书。

从 2005 年秋季起，本书分上、下两册出版。

本书上册的函数、极限与连续由集美大学陈娟老师编写；导数应用及不定积分由福建工程学院王昆仑老师编写；定积分及其应用由福建农林大学温永仙老师编写；向量代数、空间解析几何、微分方程由福建交通职业技术学院张国勇老师编写；多元函数微积分由闽江学院尤凤奇老师编写；无穷级数由福州大学徐荣聪编写；徐荣聪编写各章的复习题并对全书进行统稿。

本书下册的行列式与矩阵由张国勇老师编写；线性方程组由福建水利电力职业技术学院王为民老师编写；概率论由王昆仑老师编写；数理统计由福建交通职业技术学院张玉祥编写。下册由张国勇老师组织并进行统稿，最后由徐荣聪老师定稿。

本书在叙述上力求简明透彻、通俗易懂而又不失科学性，书中提供了较多的例题，便于自学，在每章的末尾都配有题型较为齐全的足够数量的总复习题，为使用本书的教师提供较好的复习材料，又便于考生自学与检测。

书中打“*”的为选用部分。

限于作者的水平，书中不妥之处，恳请读者不吝指出。

徐荣聪

2005 年 8 月

目　录

第一章　行列式和矩阵…………………………………………………………………(1)
1.1　行列式的概念 ……………………………………………………………(1)
1.1.1　二阶行列式 ……………………………………………………………(1)
1.1.2　三阶行列式 ……………………………………………………………(2)
1.1.3　n 阶行列式 ……………………………………………………………(4)
习题 1—1 ……………………………………………………………………(5)
1.2　行列式的性质与计算 ……………………………………………………(6)
1.2.1　行列式的性质 …………………………………………………………(6)
1.2.2　行列式的计算 …………………………………………………………(9)
习题 1—2 ……………………………………………………………………(12)
1.3　克莱姆法则…………………………………………………………………(13)
习题 1—3 ……………………………………………………………………(15)
1.4　矩阵的概念及其基本运算…………………………………………………(15)
1.4.1　矩阵的概念………………………………………………………………(15)
1.4.2　矩阵的基本运算…………………………………………………………(18)
习题 1—4 ……………………………………………………………………(25)
1.5　矩阵的逆……………………………………………………………………(26)
习题 1—5 ……………………………………………………………………(30)
1.6　矩阵的初等行变换…………………………………………………………(31)
1.6.1　初等行变换的定义………………………………………………………(31)
1.6.2　利用初等行变换求逆矩阵………………………………………………(32)
1.6.3　利用初等行变换求矩阵的秩……………………………………………(34)
习题 1—6 ……………………………………………………………………(37)
复习题一 ………………………………………………………………………(39)
第二章　线性方程组 ……………………………………………………………(41)
2.1　向量组的线性相关性………………………………………………………(41)
2.1.1　n 维向量 ………………………………………………………………(41)
2.1.2　向量组的线性相关性……………………………………………………(43)
2.1.3　向量组的秩………………………………………………………………(47)
习题 2—1 ……………………………………………………………………(51)
2.2　齐次线性方程组……………………………………………………………(52)
2.2.1　解的性质…………………………………………………………………(52)
2.2.2　基础解系…………………………………………………………………(53)

习题 2—2 …………………………………………………………………………………… (56)
2.3 非齐次线性方程组 …………………………………………………………………… (57)
2.3.1 有解的判定 ……………………………………………………………………… (57)
2.3.2 解的结构 ………………………………………………………………………… (60)
习题 2—3 …………………………………………………………………………………… (63)
复习题二 ……………………………………………………………………………………… (64)
第三章 概率论 ……………………………………………………………………………… (66)
3.1 随机事件与概率 ………………………………………………………………………… (66)
3.1.1 随机事件 ………………………………………………………………………… (66)
3.1.2 概率的定义 ……………………………………………………………………… (68)
习题 3—1 …………………………………………………………………………………… (71)
3.2 概率的基本公式 ………………………………………………………………………… (72)
3.2.1 条件概率 ………………………………………………………………………… (72)
3.2.2 全概率公式 ……………………………………………………………………… (73)
3.2.3 事件的独立性 …………………………………………………………………… (74)
3.2.4 伯努利概型 ……………………………………………………………………… (75)
习题 3—2 …………………………………………………………………………………… (76)
3.3 离散型随机变量及其分布 ……………………………………………………………… (76)
3.3.1 随机变量的概念 ………………………………………………………………… (76)
3.3.2 离散型随机变量的分布 ………………………………………………………… (77)
3.3.3 随机变量的分布函数 …………………………………………………………… (79)
习题 3—3 …………………………………………………………………………………… (80)
3.4 连续型随机变量及其分布 ……………………………………………………………… (81)
3.4.1 分布密度 ………………………………………………………………………… (81)
3.4.2 几种常用连续型随机变量的分布 ……………………………………………… (83)
3.4.3 正态分布的概率计算 …………………………………………………………… (84)
习题 3—4 …………………………………………………………………………………… (86)
3.5 数学期望与方差 ………………………………………………………………………… (87)
3.5.1 数学期望 ………………………………………………………………………… (87)
3.5.2 方差 ……………………………………………………………………………… (90)
习题 3—5 …………………………………………………………………………………… (92)
复习题三 ……………………………………………………………………………………… (94)
第四章 数理统计 …………………………………………………………………………… (96)
4.1 统计量及其分布 ………………………………………………………………………… (96)
4.1.1 总体、样本、统计量 ……………………………………………………………… (96)
4.1.2 抽样分布 ………………………………………………………………………… (97)
习题 4—1 …………………………………………………………………………………… (101)
4.2 估计 ……………………………………………………………………………………… (102)
4.2.1 参数的点估计 …………………………………………………………………… (102)
4.2.2 区间估计 ………………………………………………………………………… (108)

习题 4—2 …………………………………………………………………………… (111)
4.3 假设检验 ……………………………………………………………………… (112)
4.3.1 假设检验 ………………………………………………………………… (112)
4.3.2 正态总体的假设问题 …………………………………………………… (113)
习题 4—3 …………………………………………………………………………… (116)
4.4 一元线性回归分析 ……………………………………………………………… (116)
习题 4—4 …………………………………………………………………………… (120)
复习题四……………………………………………………………………………… (122)
参考答案……………………………………………………………………………… (124)
习题 1—1 …………………………………………………………………………… (124)
习题 1—2 …………………………………………………………………………… (124)
习题 1—3 …………………………………………………………………………… (124)
习题 1—4 …………………………………………………………………………… (125)
习题 1—5 …………………………………………………………………………… (125)
习题 1—6 …………………………………………………………………………… (126)
复习题一……………………………………………………………………………… (127)
习题 2—1 …………………………………………………………………………… (127)
习题 2—2 …………………………………………………………………………… (128)
习题 2—3 …………………………………………………………………………… (128)
复习题二……………………………………………………………………………… (129)
习题 3—1 …………………………………………………………………………… (129)
习题 3—2 …………………………………………………………………………… (130)
习题 3—3 …………………………………………………………………………… (130)
习题 3—4 …………………………………………………………………………… (131)
习题 3—5 …………………………………………………………………………… (132)
复习题三……………………………………………………………………………… (132)
习题 4—1 …………………………………………………………………………… (133)
习题 4—2 …………………………………………………………………………… (133)
习题 4—3 …………………………………………………………………………… (133)
习题 4—4 …………………………………………………………………………… (133)
复习题四……………………………………………………………………………… (134)

第一章　行列式和矩阵

行列式和矩阵是《线性代数》这门课程中最基本的概念. 它们不仅是讨论线性方程组可解性及其求解的有力工具,而且在工程技术、生产管理等方面都有着广泛的应用.

1.1　行列式的概念

行列式是《线性代数》这门课程中最重要的概念之一. 它与线性方程组及其求解的问题有着密切的关系.

1.1.1　二阶行列式

行列式是在解二、三元线性方程组时引出的.

二元线性方程组的一般式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}. \tag{1.1.1}$$

我们可以用加减消元法推导出解的公式:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}(当\ a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0). \tag{1.1.2}$$

假设把解公式(1.1.2)中的分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 记成 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

上式左边排成两行两列(形成正方形状)的符号称为二阶的行列式,其中横排称为行,纵排称为列,从左上角至右下角的对角线称为主对角线,从左下角至右上角的对角线称为次对角线,行列交叉处的数叫元素. 右边的式子称为该二阶行列式的展开式.

类似地,也可以用二阶的行列式符号表示解公式中的分子,即

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1.$$

二阶行列式的值可以由其展开式计算得到. 例如,二阶的行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}=-3\times 12-$

$2\times5=-46$，$\begin{vmatrix}\sin\alpha & -\cos\alpha\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

如果用 D,D_1,D_2 分别表示解公式(1.1.2)中分母和分子的各行列式，即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix},$$

则方程组(1.1.1)当 $D\neq0$ 时有唯一解，且解可表示为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}\\ x_2=\dfrac{D_2}{D}\end{cases}. \tag{1.1.3}$$

容易发现，解(1.1.3)中的行列式 D 由方程组(1.1.1)中未知数的系数按原来的顺序排成，称为方程组的系数行列式；行列式 D_1 由方程组(1.1.1)中右边的常数项替换系数行列式中的第一列而得到，行列式 D_2 由方程组(1.1.1)中右边的常数项替换系数行列式中的第二列而得到.

例 1 用行列式求方程组的解：

$$\begin{cases}3x-2y-3=0\\ x+3y+1=0\end{cases}$$

解：原方程组化为一般式

$$\begin{cases}3x-2y=3\\ x+3y=-1\end{cases},$$

$$D=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=9-(-2)=11,D_1=\begin{vmatrix}3 & -2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=9-2=7,D_2=\begin{vmatrix}3 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3-3=-6,$$

所以得方程组的解为

$$\begin{cases}x=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{7}{11}\\ y=\dfrac{D_2}{D}=-\dfrac{6}{11}\end{cases}$$

注意：例 1 中的方程组若不是一般式则需先化为一般式.

1.1.2 三阶行列式

现在来解三元的线性方程组.

三元线性方程组的一般式为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}. \tag{1.1.4}$$

和二元线性方程组类似，可用加减消元法推导出三元线性方程组解的公式

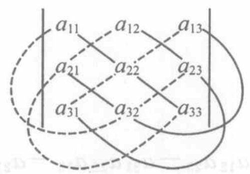
$$\begin{cases}x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{32}a_{23}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}}\\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+a_{21}b_3a_{13}+a_{31}b_1a_{23}-a_{31}b_2a_{13}-a_{21}b_1a_{33}-a_{11}b_3a_{23}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}}\\ x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{21}a_{32}b_1+a_{31}a_{12}b_2-a_{31}a_{22}b_1-a_{21}a_{12}b_3-a_{11}a_{32}b_2}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}}\end{cases}, \tag{1.1.5}$$

其中 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}\neq 0$.

类似于二阶行列式的定义，我们也可以用 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 来表示式子 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}.$$

上式左边排成三行三列(形成正方形状)的符号称为三阶的行列式，右边的式子称为它的展开式. 容易发现三阶的行列式的展开式的规律可用如下的弧线表示：



$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.1.6}$$

例如，$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 11 & 2 & 6 \end{vmatrix}=2\times 4\times 6+0\times 2\times 3+11\times(-1)\times 0-11\times 4\times 3-0\times(-1)\times 6-2\times 2\times 0=-84.$

按展开式(1.1.6)求得行列式的值的方法叫作对角线展开法. 容易发现，三阶的行列式展开式有如下规律：

(1)首项为主对角线所有元素的积，且带正号.

(2)共有 3！项，带正负号的项各占一半.

(3)每项均是取自不同行不同列的元素之积.

同样可以引入符号

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

分别表示解的公式(1.1.5)中第一、第二、第三个分式中的分子. 这样，当 $D\neq 0$ 时，三元线性方程组(1.1.4)的解可表示为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}. \\ x_3=\dfrac{D_3}{D} \end{cases} \tag{1.1.7}$$

其中行列式 D 称为方程组的系数行列式；D_1,D_2,D_3 分别由三元线性方程组的常数项替换系数行列式中的第一列、第二列、第三列而得到.

例 2　解线性方程组 $\begin{cases} 2x-5y+3z=3 \\ -3x+2y-8z=17. \\ x+7y-5z=2 \end{cases}$

解：$D=\begin{vmatrix}2&-5&3\\-3&2&-8\\1&7&-5\end{vmatrix}=138, D_1=\begin{vmatrix}3&-5&3\\17&2&-8\\2&7&-5\end{vmatrix}=138,$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&3&3\\-3&17&-8\\1&2&-5\end{vmatrix}=-276, D_3=\begin{vmatrix}2&-5&3\\-3&2&17\\1&7&2\end{vmatrix}=-414,$$

方程组的解为

$$\begin{cases}x=1\\y=-2.\\z=-3\end{cases}$$

1.1.3　n 阶行列式

从三阶行列式的展开式得

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})+a_{12}(a_{31}a_{23}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}. \tag{1.1.8}$$

上式可以看作三阶行列式的按第一行元素的展开式．其中三个二阶行列式分别是原来三阶行列式中划去 $a_{1j}(j=1,2,3)$ 元素所在行所在列的元素，剩余下来的元素保持原有相对位置所组成的行列式，称为 a_{1j} 的余子式，记作 M_{1j}，而称 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$ 为元素 a_{1j} 的代数余子式．

一般地，行列式中划去元素 a_{ij} 所在行所在列的元素，剩余下来的元素保持原有相对位置所组成的行列式，称为 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，而称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式．

有了代数余子式的概念，式(1.1.8)即可写成

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}. \tag{1.1.9}$$

若规定一阶的行列式 $|a|=a$，则二阶行列式可定义为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}. \tag{1.1.10}$$

类似地，仿照(1.1.9)、(1.1.10)的表示方法，可定义 n 阶行列式及其展开式．

定义 1.1.1　由 n^2 个元素排成 n 行 n 列的形式，称为 n 阶行列式，记为 D，即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

其中 a_{ij} 称为行列式 D 中的第 i 行第 j 列的元素 $(i,j=1,2,\cdots,n)$．假设 $n-1$ 阶行列式已定义，则 n 阶行列式

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n},$$

其中 A_{1n} 为 a_{1j} 的代数余子式．

这就是说，求 n 阶行列式可按第一行展开成 $n-1$ 阶的行列式来求.

按定义 1.1.1 把 n 阶行列式按第一行展开成 $n-1$ 阶的行列式，从而求得行列式的值的方法叫作定义展开法.

从二、三阶的行列式展开式的规律和 n 阶行列式的定义，可以发现 n 阶行列式的展开式也有类似的规律：

(1)首项为主对角线所有元素的积，且带正号.

(2)共有 $n!$ 项，带正负号的项各占一半.

(3)每项均是取自不同行不同列的元素之积.

例 3　按定义计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

解：按定义有

$$D=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}+(-1)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

其中有两个三阶行列式乘以 0，所以不出现. 计算上式右端的两个三阶行列式后得 $D=32$.

习题 1—1

1. 计算下列二阶、三阶列式：

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & ab \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

2. 求下列各行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -5 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 6 & 19 & -23 \\ 0 & 7 & 35 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} a & ka & x \\ b & kb & y \\ c & kc & z \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

3. 写出三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & 6 \\ 11 & 9 & -4 \end{vmatrix}$$

中元素 $a_{21}=7$，$a_{23}=6$ 的代数余子式，并求其值.

4. 用行列式解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 2x-y=8 \end{cases}$；　　(2) $\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x+2y+7=0 \end{cases}$.

5. 用行列式解方程组

$$\begin{cases} x+2y+z-12=0 \\ x+y+z-10=0 \\ 2x+3y-z-1=0 \end{cases}.$$

1.2　行列式的性质与计算

显然，按定义计算行列式的值是比较麻烦和困难的. 类似于讨论其他的运算，我们先从讨论行列式的性质入手来解决行列式的计算问题.

1.2.1　行列式的性质

以下行列式的性质，我们仅以三阶行列式展开式的规律或简单的证明来加以说明而不作严谨的论证. 其说明的正确性完全适合于 n 阶行列式. 对于 n 阶行列式性质的严谨证明，有兴趣的读者可参阅其他教材相应的部分.

为说明方便起见，再把三阶行列式展开式抄录如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23} \tag{1.2.1}$$

1. 转置性质

行列式 D 中所有元素的行标与列标对换后的行列式称为这个行列式的转置，记为 D^T 或 D'.

例如，行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 的转置为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$，即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$.

从式(1.2.1)中容易发现，行列式的转置其展开式不变，行列式的值当然亦不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. 变号性质

行列式的两行或两列互换则行列式的值变号.

例如，行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中第一行与第二行互换后变为 $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，即将展开

式(1.2.1)中第一行与第二行相应元素互换,展开式的值显然变号.

我们把第一行和第二行的互换记为 $r(2)\leftrightarrow r(1)$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \underline{\underline{r(2)\leftrightarrow r(1)}} - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. **零值性质**

(1)行列式中某行(或某列)所有的元素全为零则行列式值为零.

(2)行列式中某两行(或两列)的对应元素相同则行列式值为零.

(3)行列式中某两行(或两列)的对应元素成比例则行列式值为零.

我们仅以性质 3 中的(3)作说明,其他两个性质的正确性不难理解.

比如第三行是第一行对应元素的 k 倍,即 $a_{31}=ka_{11}, a_{32}=ka_{12}, a_{33}=ka_{13}$,代入式(1.2.1)即得行列式的值为零.

例如,分别依零值性质的(1)、(2)、(3)马上可知下列行列式的值都为零.

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -8 & -10 & -6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=0.$$

4. **倍乘性质**

一个数 k 乘以行列式相当于数 k 乘以行列式中的某行(或某列)的所有元素.

例如,一个数 k 乘以三阶行列式(1.2.1),即

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23})$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

即行列式乘以数 k 相当于数 k 乘以行列式中的第二行的所有元素.实际上,相当于数 k 乘以行列式中的某一行(或某一列)的所有元素.

推论:行列式中某一行(或某一列)的所有元素的公因子可提到行列式记号外.

例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5. **分项性质**

行列式中的某一行(或某一列)的所有元素都是二项之和,则这个行列式可以分成两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n+b_n \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

以三阶行列式展开式为例容易说明分项性质,此处从略.

6. **倍加性质**

将行列式某一行(列)的倍数加到另一行(列)上,行列式的值不变.

例如,将 n 阶行列式第 i 行的 k 倍加到第 j 行其值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明:根据分项性质有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

根据零值性质,上式右边的第一个行列式为零.这样即得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注意:倍加性质主要用于把元素化为零.利用倍加性质做倍加变换时需明确以哪行(列)做倍加,变的是哪行(列),而不变的是哪行(列).

我们把第 i 行的 k 倍加至第 j 行上的倍加变换记为 $r_j+r_i\times k$(写在等号的上方),第 i 列的 k 倍加至第 j 列上的倍加变换记为 $c_j+c_i\times k$(写在等号的下方).例如:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1\times k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+ka_1 & b_2+ka_2 & b_3+ka_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \underset{c_2+c_1\times k}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} a_1 & a_2+ka_1 & a_3 \\ b_1 & b_2+kb_1 & b_3 \\ c_1 & c_2+kc_1 & c_3 \end{vmatrix}.$$

7. **降阶性质**(Laplace 展开定理)

在定义 1.1.1 中,n 阶行列式可以按第一行展成

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}.$$

实际上,n 阶行列式 D 可以按任意第 i 行或第 j 列($i,j=1,2\cdots n$)展开: