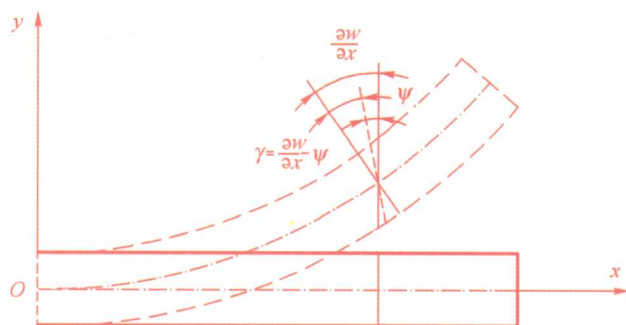


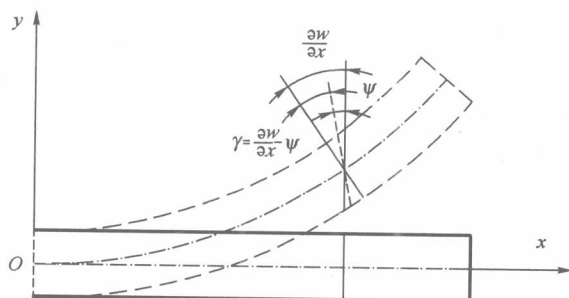
考虑剪切变形影响的 杆系结构理论与应用

夏桂云 李传习 【著】



人民交通出版社
China Communications Press

考虑剪切变形影响的 杆系结构理论与应用



夏桂云 李传习 著

人民交通出版社

内 容 提 要

本书主要研究考虑剪切变形影响的 Timoshenko 两广义位移梁理论在平面杆系结构的静力、动力、稳定分析中的理论、方法及应用,主要包括深梁结构截面剪切修正系数计算理论,深梁结构的解析法、力法和位移法,深梁线性及几何非线性有限元法,弹性地基深梁分析,轴压杆件、框架和大曲率圆弧深拱的线性稳定分析,压弯构件的二阶分析,深梁的振动,斜深梁桥的有限元分析与振动,深梁理论在中厚板壳单元构造、偏心压力法的综合修正等方面的应用。全书对材料力学、结构力学的课程内容进行了有益补充,是 Bernoulli-Euler 初等梁理论的扩展。

本书可供桥梁工程、建筑工程、工程力学等相关专业的技术人员,尤其是从事结构分析与有限元理论研究的专业技术人员,以及高等院校的本科生、硕士研究生及教师参考和使用。

图书在版编目(CIP)数据

考虑剪切变形影响的杆系结构理论与应用/夏桂云
李传习著. —北京:人民交通出版社,2008.9
ISBN 978-7-114-07247-5

I. 考… II. ①夏…②李… III. 杆件—结构分析 IV.
TU323.01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 089511 号

书 名:考虑剪切变形影响的杆系结构理论与应用

著 作 者:夏桂云 李传习

责任编辑:陈志敏 王文华

出版发行:人民交通出版社

地 址:(100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街3号

网 址:<http://www.ccpress.com.cn>

销售电话:(010) 59757969, 59757973

总 经 销:北京中交盛世书刊有限公司

经 销:各地新华书店

印 刷:三河市吉祥印务有限公司

开 本:787×1092 1/16

印 张:19.25

字 数:484 千

版 次:2008 年 9 月第 1 版

印 次:2008 年 9 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 978-7-114-07247-5

定 价:45.00 元

(如有印刷、装订质量问题的图书由本社负责调换)

前 言

Bernoulli-Euler 初等梁理论是杆系结构分析的经典理论,应用广泛,精度可满足工程的需要,工程实际中的杆系结构分析几乎全部采用此理论。材料力学、结构力学等课程也主要是阐述基于此理论的杆系结构力学问题的分析方法。但由于此理论引入了直法线假定,导致截面剪切应变为零,但剪应力不为零,这样剪切方向的本构关系不满足。1921 年 Timoshenko 提出了考虑剪切变形影响的两广义位移梁理论,从平均意义上使得剪力—剪应变本构关系得到满足,从而从源头上克服了初等梁理论的缺陷,避免了剪切闭锁现象。因此相对初等梁理论来说, Timoshenko 梁理论更完善、应用更广泛(从初等梁到中厚梁都适用)。而且基于初等梁理论的各种力学方法都可发展成基于用 Timoshenko 梁理论的方法,如力法、位移法、有限元法等;初等梁理论研究的杆系结构各种问题都可采用 Timoshenko 梁理论进行研究,且可考虑剪切变形的影响,如杆系的静力、振动、稳定问题。正是基于此认识,作者近几年对材料力学、结构力学所涉及的部分问题和方法用 Timoshenko 梁理论进行了研究,将研究成果整理成本书的核心内容。

全书共分十章。

第 1 章,绪论,主要综述深梁理论的发展以及剪切修正系数的计算理论、深梁结构变形的解析方法、深梁结构的能量原理。

第 2 章,深梁结构分析的力法和位移法,主要阐述基于 Timoshenko 深梁理论的力法、等截面直杆固端力的计算、连续深梁的三弯矩方程和三转角方程。

第 3 章,深梁结构线性及几何非线性分析的有限元法,主要阐述 Timoshenko 梁单元模式、深梁几何非线性分析的非线性有限元法和稳定函数法、钢筋混凝土深梁有限元法、斜深梁有限元法。

第 4 章,弹性地基深梁结构分析,主要介绍地基模型、阐述 Winkler 地基上 Timoshenko 梁的解析法、有限元法及屈曲分析、轻型桥台自身平面内弯曲问题、地基沉降对弹性地基深梁的影响、双参数地基上 Timoshenko 深梁的解析法及有限元法。

第 5 章,轴心受压构件的弹性稳定分析,主要阐述轴心受压构件的有效长度系数、多阶柱弹性稳定分析、剪切变形对组合压杆的稳定影响、一端固结一端自由

深梁柱在分布荷载作用下的稳定分析。

第6章,深梁压弯构件二阶分析,主要阐述简支深梁、固支深梁在分布荷载、跨中集中荷载、三分点集中荷载作用下的二阶分析方法、压弯构件的弯矩—转角位移方程。

第7章,考虑剪切变形影响的平面框架的弹性稳定分析,主要阐述考虑剪切变形影响的单层单跨框架、多层多跨框架、中间设摇摆柱框架的弹性稳定分析方法。

第8章,大曲率圆弧深拱的平面弹性稳定分析,主要阐述考虑剪切变形及大曲率影响的两端铰支、两端固支等边界条件的圆弧深拱在均布荷载作用下的弹性稳定分析方法。

第9章,深梁结构的振动分析,主要阐述经典 Timoshenko 梁的振动方程及正交性、陈镛的修正 Timoshenko 梁振动理论、Timoshenko 梁振动分析的有限元方法、斜深梁桥振动的有限元分析、Winkler 地基上和双参数地基上 Timoshenko 梁的振动。

第10章,深梁理论的拓展应用,主要阐述基于有限条带法构造矩形中厚板单元、平行四边形中厚板单元、矩形中厚板高阶单元、平面矩形膜元、中厚壳单元的方法,桥梁中荷载横向分布系数计算的偏心压力法综合修正。

在本书撰写及研究过程中,得到了中南大学曾庆元教授(院士)、长沙理工大学张建仁教授等的精心指导和鼓励。本书出版得到了湖南省教育厅科学基金(03C076)、长沙理工大学人才基金(01004171)和长沙理工大学出版基金的资助。

由于时间仓促、作者水平有限,疏漏和不足之处在所难免,敬请各位专家、读者不吝指教,来信请寄(410076)长沙市赤岭路45号长沙理工大学土木与建筑学院,E-mail:xiagy72@163.com,Lichuanxi2@163.com。

夏桂云 李传习

2008年3月于长沙理工大学

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 深梁理论的发展概述	1
1.2 几种典型的深梁理论	5
1.3 Timoshenko 简单深梁算例	13
1.4 胡海昌深梁解析方法	18
1.5 剪切修正系数的计算理论	19
1.6 常见截面形式的剪切修正系数解析解	26
1.7 截面剪切修正系数胡海昌计算理论的梯形分块法	31
1.8 Timoshenko 深梁的接触问题	37
1.9 Timoshenko 深梁的能量原理	40
第 2 章 深梁结构分析的力法和位移法	42
2.1 深梁结构的力法和位移法	42
2.2 考虑剪切变形影响的等截面直杆的杆端弯矩和剪力	49
2.3 连续深梁的三弯矩方程	56
2.4 连续深梁的三转角方程	58
第 3 章 深梁结构线性及几何非线性分析的有限元法	59
3.1 Hughes 单元模式	59
3.2 Timoshenko 深梁单元插值函数和线性刚度矩阵	61
3.3 Timoshenko 深梁单元几何非线性的非线性有限元法	64
3.4 Timoshenko 深梁单元的 Fleming 稳定函数法	66
3.5 Timoshenko 深梁单元的 Saafan&Brotton 稳定函数法	74
3.6 钢筋混凝土组合深梁单元	82
3.7 斜深梁桥的有限元分析	83
3.8 数值计算	86
第 4 章 弹性地基深梁结构分析	92
4.1 地基模型	92
4.2 弹性地基梁常见解法的适应范围	96
4.3 Winkler 地基上 Timoshenko 深梁的解析方法	97
4.4 Winkler 地基上 Timoshenko 深梁的初参数解法	101

4.5	Winkler 地基上 Timoshenko 深梁的有限元法	107
4.6	Winkler 地基上 Timoshenko 深梁屈曲	112
4.7	剪切变形对轻型桥台自身平面内弯曲的影响	115
4.8	地基沉降对弹性地基深梁的影响	120
4.9	双参数地基上 Timoshenko 深梁的分析	124
第 5 章	轴心受压构件的弹性稳定分析	137
5.1	轴心受压 Timoshenko 深梁柱的微分方程	137
5.2	轴心受压构件的弹性稳定分析	138
5.3	节点弹性约束的轴心受压杆件弹性稳定分析	141
5.4	多阶柱弹性稳定分析	146
5.5	剪切变形对组合压杆的弹性稳定影响	151
5.6	一端固结、一端自由深梁柱在分布荷载作用下的弹性稳定分析	152
第 6 章	深梁压弯构件二阶分析	156
6.1	均布荷载作用的深梁压弯构件分析	156
6.2	跨中集中荷载作用的深梁压弯构件分析	158
6.3	三分点集中荷载作用的深梁压弯构件分析	159
6.4	端弯矩作用的深梁压弯构件分析	162
6.5	深梁压弯构件的弯矩—转角位移方程	164
6.6	小结	183
第 7 章	考虑剪切变形影响的平面框架弹性稳定分析	184
7.1	近似分析方法	185
7.2	考虑剪切变形影响的单层单跨框架计算长度系数法	185
7.3	考虑剪切变形影响的多层多跨框架计算长度系数法	195
7.4	考虑剪切变形影响的设有摇摆柱框架计算长度系数法	208
7.5	小结	210
第 8 章	大曲率圆弧深拱的平面弹性稳定分析	212
8.1	大曲率曲拱微分方程	213
8.2	两铰圆弧拱的临界荷载	214
8.3	无铰圆弧拱的临界荷载	215
8.4	其他条件下的失稳	216
8.5	大曲率截面抗弯惯性矩计算	216
8.6	圆弧拱临界荷载系数计算	217
8.7	弹性失稳的临界系数和临界圆心角	219
8.8	小结	220
第 9 章	深梁结构的振动分析	221
9.1	经典 Timoshenko 梁的振动分析	221

9.2	经典 Timoshenko 梁振型函数的正交性	226
9.3	陈镔的修正 Timoshenko 梁振动理论	227
9.4	Timoshenko 梁振动的有限元分析	239
9.5	斜深梁桥振动的有限元分析	241
9.6	Winkler 地基上修正 Timoshenko 梁的振动	242
9.7	双参数地基上 Timoshenko 梁的振动	244
第 10 章	深梁理论的拓展应用	247
10.1	矩形中厚板的有限元分析	247
10.2	考虑剪切变形影响的平行四边形厚/薄板通用单元	254
10.3	中厚板高阶单元	262
10.4	中厚壳结构分析	269
10.5	偏心压力法的综合修正	283
参考文献		292

第1章 绪 论

1.1 深梁理论的发展概述

梁是工程结构中的基本构件,其研究历史较长,17 世纪初 Bernoulli-Euler 建立了初等梁的经典理论,此理论的优点是只有一个广义位移,因而在结构分析时只有一个未知数,应用非常广泛。目前材料力学、结构力学的理论基础都是初等梁理论,该理论的缺点是引入了直法线假定,没有考虑剪切变形的影响,故只能适用于“长梁”。随着工程技术的发展,“短梁”遇到得越来越多,基于经典的初等梁理论的计算精度已不能满足工程需要,如当结构截面尺寸相对于跨径来说较大时,采用初等梁理论计算所得挠度显著偏小^[1];在振动问题中,哪怕外表面上是一个长梁,但涉及梁的高阶振动时,梁剪切变形影响也不能忽略^[2];在地基与结构相互作用时,如果遇到地基沉降、局部高度承载、短梁/板、中厚梁/板等问题时也应考虑梁/板的剪切变形影响。

对于深梁,各国学者提出了多种理论,最经典的理论是 1921 年 Timoshenko 提出了两广义位移深梁理论^[1]。该理论认为变形前垂直于直梁中心线的截面,在变形后仍保持为平面,但不再假定它一定垂直变形后的中心线。这样该理论有两个广义位移,一个是中心线的挠度 w 、另一个是截面的转角 ψ ,由于直梁在变形后截面不一定再垂直于中心线,故转角 ψ 与挠度的斜率 w' 间不再相等,两者间差称为剪切角(或剪切应变) $\gamma = w' - \psi$ 。该理论第一次考虑了剪切变形的影响,把直梁理论向前推进了一步。

2000 年龚克深入研究了 Timoshenko 梁理论,并注意到 Timoshenko 理论虽然考虑了横向剪切变形的影响,但是也存在将挠度、转角视为两个变量,忽略其内在联系,与经典梁理论相比存在位移的独立性与不独立性的矛盾,使其使用范围受到限制。其通过引入适当假定后导出了转角位移与挠度间的相互关系,从而提出了单广义位移梁理论^[2],揭示了深梁理论中转角位移与挠度间并不是相互独立,而是存在一定的函数关系,使深梁理论更清晰明了。

深梁理论中比较有影响的还有 1981 年 Levinson 提出的新矩形梁理论^[3];1982 年 Bickford 提出的一致高阶梁理论^[4];1986 年 Tutek 和 Zagreb 提出的一维线弹性梁理论^[5];2003 年王敏中提出的深梁精化理论^[6];2003 年 Reddy、Auricchio、Kumar 等提出的零阶^[7]、一阶^[8]、高阶^[9]剪切理论。这些理论中除高阶剪切理论外,其他理论都可转化成 Timoshenko 梁理论,只是其剪切修正系数取不同值而已。

利用深梁理论进行结构分析时,最为关键的问题是剪切修正系数的计算问题。剪切修正系数历史上有多种计算理论和方法,最早提出计算方法的是 Timoshenko,其采用最大剪应力与平均剪应力之比作为剪切修正系数,并计算了矩阵、圆形、薄壁圆管、工字形、箱形截面的剪切修正系数^[10-11],本书将其命名为 Timoshenko 值。最有影响的剪切修正系数计算理论是 1966 年 Cowper 根据弹性力学中悬臂梁的剪应力分布形式及能量原理建立的计算公式^[12],

对于一些简单截面, Cowper 利用 Love 解给出了剪切修正系数的解析解, 对于某些复杂截面 Cowper 给出了近似解。他给出的 11 种常见截面剪切修正系数当今应用极为广泛, 本书将其命名为 Cowper 值。令 Cowper 值中材料的泊松比 $\nu=0$, 即可导得与材料力学理论一致的结果, 证明 Cowper 值有相当好的理论基础和精度。但是 Cowper 理论存在三个缺点: ①同一截面中各点横向位移并不相等, 但该理论假定其一致; ②截面在变形后实际上并不再保持为平面, 但该理论仍继续将其假定为平面; ③同一截面上假定其剪应变为常数, 但剪应力却不是常数, 不满足本构关系。由于上述三个缺陷, Cowper 指出, 只能将截面的挠度和转角理解为截面的平均挠度和转角才能缓和矛盾。1980 年 Stephen^[13] 采用与 Cowper 相同的过程, 但采用自重作用下的剪应力分布, 对 Cowper 理论进行修正, 提出了新的剪切修正系数, 将其应用于圆形、矩形截面杆的固有频率估算, 其结果比 Cowper 方法精确, 但是对于一般截面情形未能得出相同结论。2001 年 Hutchinson^[14] 利用 Hellinger-Reissner 变分原理建立了另一种剪切修正系数公式, 后来被证明与 Stephen 方法是同一种公式, 只要经过复杂的推导就可互相转化, 该公式得到的剪切修正系数称为 S-H 系数^[15-16]。我国学者胡海昌基于能量原理也提出了剪切修正系数的计算公式, 此公式的关键是对剪应力分布作出一定的假定, 建议按材料力学或弹性力学中关于悬臂梁剪应力分布进行^[1]。1992 年郑泉水^[17-18] 提出了 Hilbert 空间上子空间变分原理来提高本构方程精度, 以解决投影类型梁本构方程精度比平衡方程精度低的缺点, 其研究生卢小抒^[19] 在此基础上利用子空间变分原理和有限元方法建立梁的深化本构方程, 并利用子空间变分原理进行深梁剪切修正系数的有限元计算。1996 年牡丹旭和郑泉水^[20] 通过简化子空间变分原理的数学结构, 用修正子空间变分原理消除子空间变分原理的奇异性, 计算了单材料多种截面的剪切修正系数, 并将圆环截面剪切修正系数的有限元结果与 Cowper 理论结果进行了比较, 指出了修正子空间变分原理的有限元法可处理复杂截面以及层状或复合材料截面。1983 年曹志远教授^[21] 在研究中厚板振动问题时指出, 只要对板中剪切变形和挤压变形的分布作出不同假定, 就可导出中厚板的 Hencky 理论、Reissner 理论、Vlasov 理论、Mindlin 理论等, 这些经典的中厚板理论都可退化成深梁理论。利用中厚板理论的偏离位移分布函数和挤压变形函数可确定剪切修正系数, 但是由于其偏离位移分布函数和挤压变形函数是从中厚板理论中得来, 故只能用于矩形截面梁中, 使用上相当有限。

随着深梁研究的深入, 其有限元法发展也很迅速。深梁有限元列式中最简单的模式是 1977 年 Hughes 提出的线性插值单元^[22], 此单元的缺点是整个单元的弯矩和曲率为常数, 单元网格必须划分较密才能获得较好的精度, 而且剪切刚度过硬, 存在闭锁问题。1968 年 Przemieniecki^[23-24] 采用工程梁理论中梁的位移微分方程, 分别考虑剪切变形和弯曲变形, 导出了均匀梁的刚度矩阵, 该方法中挠度采用三次插值函数、转角位移采用二次插值函数, 精度高、适应性强, 导出的刚度矩阵是一般意义上深梁单元的精确刚度矩阵, 因此广为使用。1981 年胡海昌^[1] 根据 Timoshenko 两广义位移梁理论, 假定深梁单元横向位移为三次插值、转角位移为二次插值, 应用最小势能原理消去内部自由度, 导出了深梁单元位移插值函数, 是深梁单元插值函数的标准形式, 被广泛使用。但此方法由于要消除内部自由度, 理论推导繁杂。1991 年 Ortal^[25] 提出了非等参插值杂交应力 Timoshenko 梁单元, 此单元假定位移为二次抛物线插值、转角为线性插值, 该方法由于位移插值函数阶次较低, 精度不高, 必须通过细分网格才能提高分析结果。1994 年周世军^[26] 利用最小势能原理得到了 Timoshenko 梁单元考虑剪切变形影

响的位移函数表达式,并导出了单元刚度矩阵、一致质量矩阵和几何刚度矩阵。1998年李华^[27]将深梁横向位移分为弯曲位移和剪切位移,都采用三次插值函数,成功构造了深梁的有限元列式和刚度,是一种双挠度理论。1999年王荣辉^[28]通过引入剪切转角和弯曲转角,假定横向位移为三次插值函数,导出了一种新的单元模式;此单元引入了剪切转角和弯曲转角两个自由度,比一般梁单元自由度高。2000年龚克^[2]提出了单广义位移深梁理论,并利用该理论建立深梁单元,是对两广义位移梁理论的发展。2003年夏桂云^[29]从深梁的两广义位移理论出发,利用解析试函数直接建立深梁单元横向位移、转角、剪切应变的插值函数,进而导出了单元考虑剪切变形影响的线弹性刚度矩阵、一致质量矩阵和几何刚度矩阵。这种方法的特点是位移场(横向位移、转角、剪切应变)为各自直接建立,不需要消去多余自由度,建立的步骤与一般有限元法相同,便于理解,是建立 Timoshenko 梁单元的一种新方法,并且所建立的单元当退化至薄梁单元时不会出现剪切闭锁现象,是厚/薄梁结构分析的通用单元。

初等梁结构几何非线性分析主要有两种方法^[30],一种是基于 T. L 或 U. L 的非线性有限元方法;另一种是稳定函数方法。经典的稳定函数方法主要有 Saafan 理论、Brotton 理论、Fleming 理论,这些理论被称为有限位移理论,是大跨度杆系结构分析的主流方法。对于单元轴力 $N=0$ 时的特殊情况,1992年张国正^[31]、2003年唐茂林^[32]采用重新建立单元列式办法,导出了单元刚度矩阵,克服了单元的奇异性。1990年 Nazmy^[33]等在 Fleming 法的基础上,将平面稳定函数方法推广至空间,习惯上称之为空间稳定函数法。1994年舒兴平^[34-35]等在试验基础上认识到钢框架结构的剪切变形较大,其影响不应忽略,并基于有限变形理论,建立了考虑剪切变形影响的空间钢框架结构几何非线性分析方法,并分析了一个6层的钢框架结构。2006年夏桂云^[36]在其博士论文中借鉴初等梁的有限位移理论,利用 Timoshenko 深梁的解析函数,建立了 Timoshenko 深梁的 Saafan 理论、Brotton 理论、Fleming 理论,将有限位移理论从初等梁推广至深梁。

对于压杆的弹性稳定问题,从1744年 Euler 利用初等梁理论解决一端固定一端自由的理想轴心受压的梁柱弹性稳定问题起,研究工作进行得比较系统,其后的切线模量理论、双模量理论和 Shanley 理论奠定了轴心受压短柱的弹塑性稳定问题分析基础,可以说初等梁柱的稳定问题得到了彻底解决^[37-52]。对于深梁柱的稳定问题,研究进行得相对较少,1889年 Engesser 提出了考虑剪切变形影响的 Engesser 型临界荷载公式^[38],1942年 Haringx 提出了考虑剪切变形影响的 Haringx 型临界荷载公式^[51]。在实践中一般材料力学、结构稳定方面的书籍只对格构柱分析才考虑剪切变形对稳定的影响,而且只讨论了两端铰接的柔性杆和组合杆,其他边界下的深梁柱未予研究,究其原因是采用了双挠度理论,此理论未能明确横向位移、转角、剪切应变间的数学关系,只能解决简单问题,故有必要寻求更一般的理论和方法。

在结构工程中,框架结构的稳定分析是钢结构设计的一项重要内容,目前分析方法主要为有效长度系数法。《钢结构设计规范》(GB 50017—2003)对单层单跨框架、多层多跨框架的稳定进行了全面的规定。陈骥教授^[39]采用平衡法和位移法系统研究了有侧移框架、无侧移框架屈曲问题,并给出了单层单跨、双层单跨、多层多跨框架屈曲的计算长度系数;陈绍蕃教授^[40]分析了框架中柱、梁远端边界条件的修正问题;童根树教授^[41-42]系统研究了框架的弹性稳定,其关于同层各柱轴力不同时框架有侧移失稳的各柱相互支援作用问题、设有摇摆柱的框架稳

定问题、多层框架失稳时层与层相互支援作用问题,沈祖炎教授关于梁柱刚性连接、半刚性连接和柔性连接影响问题^[43]、支撑框架稳定问题、楔形变截面压杆稳定问题等的研究成果丰富了计算长度系数法理论;李国强教授^[44]、陈惠发教授^[45]研究了框架节点半刚性连接的影响,给出了半刚性连接节点弯矩—转角关系模型。这些研究工作均以初等梁理论为基础,代表了初等梁柱线性稳定分析的研究现状。剪切变形对框架稳定有何影响,目前研究还不是很深入,2006年李国强教授提出了近似修正方法;2006年Bakker^[46]研究了在均布荷载作用下,剪切变形对悬臂柱屈曲的影响,得出了以弯曲变形为主的全局屈曲和以剪切变形为主的局部屈曲显著不同的结论,计算了不同剪切刚度下的临界荷载系数;2007年夏桂云^[47]利用 Timoshenko 深梁的弯矩—转角方程分析了单层单跨框架的稳定问题,给出了考虑剪切变形影响的框架计算长度系数的初步结果。

对于初等梁结构的振动问题,目前研究比较深入^[53];Clough 等系统全面地研究了结构的振动问题^[54];王光远^[55]对土木工程结构的振动分析,尤其是一些常规结构的振动分析提出了先进的手段,如连续梁振动分析的递推算法、传递矩阵方法等;1996年李国豪^[56]系统分析了初等梁在匀速移动常量力作用下、匀速移动简谐力作用下、匀速滚动质量作用下、匀速移动弹簧—质量作用下、匀速移动双轴汽车荷载作用下的振动问题。所有这些研究工作虽然是基于初等梁开展的,但对深梁结构有重要的借鉴作用。曹志远教授^[21]在研究厚板振动问题时提出厚板、中厚板、深梁考虑剪切变形影响只需对三个方面作出假定,即横向挠度假定、剪切变形假定、挤压变形假定。有此假定即可建立梁、板考虑剪切变形影响的计算理论。将中厚板在一个方向进行退化处理即可导出深梁理论。曹教授推导了简支—简支、自由—自由、固支—固支、固支—自由、固支—简支、简支—自由 6 种边界条件下深梁振动频率的特征方程。1961年Huang^[57]也进行了相同的工作,分析中考虑了剪切变形影响和截面转动惯矩的影响,并对悬臂梁等的自由振动频率进行了计算。1973年Dym^[58]等研究了 Timoshenko 深梁的振动问题,考虑了剪切变形影响及截面转动惯量影响,比较了简支初等梁、深梁自由振动频率的差别,讨论了分别只考虑转动惯量和剪切变形影响时的深梁自由振动频率解的近似程度。2002年楼梦麟^[59]等应用模态摄动法求解 Timoshenko 梁的振动模态特性,对两端简支的 Timoshenko 梁得到了精确理论解,对比了两端简支的 Timoshenko 梁、Euler 梁、纯剪切梁的模态特性及其影响因素,讨论了 Timoshenko 简支梁自由振动频率随长细比及模态数的变化情况。2005年陈镛教授^[60-61]根据深梁特点,对传统 Timoshenko 梁运动方程进行了修正,分析了此修正对梁运动特性所带来的影响,并论证了 Timoshenko 梁实际上只存在一个相速度系、一个群速度系,以及一个固有频率。这种修正在低频段影响较小,而在高频段影响比较显著,并将其应用于冲击问题中。这样,梁的振动理论就有 Bernoulli-Euler 理论、考虑梁弯曲变形时转动惯量影响的 Rayleigh 理论、只考虑剪切变形的剪切梁理论、同时考虑转动惯量和剪切变形影响的 Timoshenko 梁理论及陈镛的修正 Timoshenko 梁理论。

土木工程中经常涉及弹性地基梁^[62-68]的计算问题,此问题中首先要解决的是地基模型,目前地基模型^[64,66]有 Winkler 地基模型、弹性半空间地基模型、考虑地基剪切效应的双参数模型。其中双参数模型中由于引入的约束和假定不同,又有 Filoneuko-Borodich 双参数模型、Pasternak 双参数模型、Hetenyi 双参数模型、Vlazov 双参数模型、Reissner 双参数模型等,有的学者还提出了三参数模型。

对于 Winkler 地基模型上的初等梁,1981 年龙驭球^[62]作了系统的分析,解决了无限长梁、半无限长梁在集中荷载、集中弯矩作用下的变形和内力问题,不同荷载条件下的短梁受力问题,弹性地基梁的有限元列式及振动问题。2004 年 Yin^[68]研究了弹性地基上深梁弯曲问题,其作法是将外荷载转化为傅立叶级数形式,根据弹性地基深梁的微分方程,得到了横向变形、转角、弯矩、剪力等的级数解。

梁的剪切变形影响在土木工程中的许多问题上都有所体现^[69-75],如多梁式桥梁中荷载横向分布系数的修正偏心压力法在短梁中应用时就应考虑剪切变形的影响。对于修正的偏心压力法虽然各国学者从不同的角度提出了相当多的修正方法,如德国学者舒根按自由扭转理论计入主梁的抗扭能力而建立的修正公式^[73];莱翁哈特、横道英雄、乌利茨基等考虑边梁与中梁刚度不同、按自由扭转计入主梁抗扭能力而建立的修正公式^[73];杨国先等按约束扭转理论计入主梁的抗扭能力而建立的修正公式^[73];林元培等用能量法及各向异性板理论建立的修正公式^[73];胡肇滋^[74]、程翔云^[75]等根据计算截面在桥跨中的不同位置而建立的修正公式。这些方法无一例外都是采用初等梁理论进行的,没有考虑剪切变形影响,究竟剪切变形对偏心压力法有何影响、影响程度如何,值得探讨。同样在中厚板、壳单元的构造上也可应用深梁理论来进行,如龙驭球教授应用广义变分原理及深梁单元插值函数就成功地构造出无剪切闭锁的中厚板单元。

实践当中,深梁理论的应用范围相当广泛,杆系结构中所有应用初等梁理论解决的问题都可应用深梁理论来解决,而且考虑了剪切变形影响,理论基础更合理。

1.2 几种典型的深梁理论

1.2.1 经典初等梁理论的不足

经典的 Bernoulli-Euler 梁(B-T 梁)理论是工程中最通用的初等梁理论,其优点是只有一个广义位移 w ,因此在解题时常常只有一个未知数,是材料力学、结构力学研究的主要对象,其应用范围较广。B-T 梁理论引入了平截面假定和直法线假定。根据此假定,梁内各点的位移可用中心线的挠度 $w(x)$ 来表示:

$$\begin{cases} u(x, y) = -y \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\ w(x, y) = w(x) \end{cases} \quad (1-1)$$

相应的 B-T 梁本构方程和平衡方程为:

$$\begin{cases} M = -EI \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ Q = \frac{\partial M}{\partial x} \\ EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q \end{cases} \quad (1-2)$$

根据式(1-1),梁内剪切应变为:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (1-3)$$

根据梁的剪切方向的本构关系,有:

$$Q = \int_A G \cdot \gamma_{xy} dA = 0 \neq \frac{\partial M}{\partial x} \quad (1-4)$$

从式(1-4)可以看出,B-T 梁剪切方向的本构关系不能满足,使其应用受到限制。

1.2.2 Timoshenko 两广义位移梁理论

相对于初等梁, Timoshenko 梁理论中仍保留了平截面假定(变形前垂直于梁中心线的截面,变形后仍保持为平面),但放弃了直法线假定,从而克服了初等梁的平衡方程中剪切应力(全截面内为剪力)一般不为零,但剪切应变为零的矛盾,使得剪切方向的本构关系在平均意义上得到满足,其处理方法是假定剪切应变沿横截面均匀分布,剪切应力沿横截面不均匀分布通过引入剪切修正系数进行考虑。

设梁内任一点沿 x 、 y 轴方向的位移为:

$$\begin{cases} u(x, z) = -z \cdot \psi(x, z) \\ w(x, z) = w(x) \end{cases} \quad (1-5)$$

相应地,与弯矩 M 、剪力 Q 相对应的曲率、剪切应变为:

$$\begin{cases} \chi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \gamma = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \end{cases} \quad (1-6)$$

内力与应变的本构关系为:

$$\begin{cases} M = -D\chi \\ Q = C\gamma \end{cases} \quad (1-7)$$

式中, $D = EI$, $C = kGA$, k 为剪切修正系数^[1,10-20]。

如图 1-1 所示,微段的平衡方程为:

$$\begin{cases} Q + \frac{dQ}{dx}dx - Q + qdx = 0 \\ -\left(M + \frac{dM}{dx}dx\right) + M + Qdx + mdx = 0 \end{cases} \quad (1-8)$$

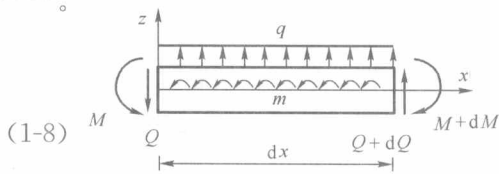


图 1-1 深梁微段图式

将本构关系代入上式,可得到以广义位移 w 、 ψ 表示的平衡方程为:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left[C \cdot \left(\frac{dw}{dx} - \psi\right)\right] = q \\ -\frac{d}{dx}\left(D \cdot \frac{d\psi}{dx}\right) - C \cdot \left(\frac{dw}{dx} - \psi\right) = m \end{cases} \quad (1-9)$$

式(1-7)、式(1-9)即为 Timoshenko 两广义位移深梁理论的基本方程。

Timoshenko 梁理论从弹性力学的观点看,仍然是一种近似理论,即在有些方面仍不符合弹性力学的要求,主要缺点有三个:①同一截面上各点的竖向位移并不相等,而这里假定为常数;②截面在变形后实际上并不再保持为平面,而这里继续假定它为一平面;③同一截面上假

定剪应变为常数而剪应力却不是常数,因而不满足本构关系。为缓和上述矛盾,Cowper 指出,可以把挠度 w 理解为截面上各点的平均位移,转角 ψ 理解为截面上各点的平均转角,即:

$$\begin{cases} w(x) = \frac{1}{A} \iint w(x, y, z) dydz \\ \psi(x) = -\frac{1}{I} \iint yu(x, y, z) dydz \end{cases} \quad (1-10)$$

式中: A, I ——截面的面积和惯性矩。

经过上式的平均处理,这样 $w' - \psi$ 可以理解为平均剪应变,于是剪应变与剪应力之间不符合本构关系的矛盾可得到缓解。

1.2.3 龚克单广义位移梁理论

2000 年龚克深入研究了 Timoshenko 梁理论,并注意到 Timoshenko 虽然考虑了横向剪切变形的影响,但是也存在将挠度、转角视为两个变量,忽略其内在联系,与经典梁理论相比有位移独立性与不独立性矛盾,使用范围受到限制等的缺点。他从基本假定出发,导出了一种适应范围更广,且只有一个广义位移的深梁理论^[2]。

单广义位移深梁的基本假定有:

- (1) 梁中性轴的轴向位移不计, z 方向的挤压变形不计;
- (2) 变形前垂直于中性轴的平面在变形后仍保持为平面,但不一定垂直于中性轴;
- (3) 剪切转角 γ 随中性轴 x 的二阶变化率不计。

根据弹性理论的几何方程,剪切应变为:

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1-11)$$

由式(1-11)可得水平位移分量为:

$$u = -\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \gamma\right) \cdot z + f(z) \quad (1-12)$$

式中: $f(z)$ ——积分常量。

因为 w 仅为 x 的函数,且根据第一条假定有 $f(z)=0$ 。所以有:

$$u = -\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \gamma\right) \cdot z = -\psi z \quad (1-13)$$

式中: ψ ——梁中心轴的转角。

根据梁的本构方程和平衡方程,梁中的弯矩和剪力如下:

$$\begin{cases} M = -D \frac{\partial \psi}{\partial x} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \\ Q = \frac{\partial M}{\partial x} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \right) \end{cases} \quad (1-14)$$

根据第二条假定, γ 的二阶变化率不计, γ 取截面上的平均值,故:

$$\gamma = \frac{Q}{C} = -\frac{D}{C} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (1-15)$$

将式(1-15)回代至式(1-14)中,可得到梁中各物理量与挠度的关系如下:

$$\begin{cases} \psi = \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{D}{C} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ M = -D \frac{\partial \psi}{\partial x} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{D}{C} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \\ Q = C\gamma = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \end{cases} \quad (1-16)$$

单广义位移深梁的平衡方程仍与初等梁理论一致,即:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q \quad (1-17)$$

单广义位移梁理论中,截面转角与初等梁相比多了修正项 $\frac{D}{C} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$ 、弯矩多了修正项 $\frac{D^2}{C} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$,其他基本相同。Timoshenko 两广义位移梁理论和龚克的单广义位移梁理论都为二阶剪切变形梁理论,除一阶剪切变形梁理论以外,还有零阶剪切变形梁理论和高阶剪切变形梁理论。

1.2.4 零阶剪切变形梁理论

1998 年 Shimpi 在分析厚/薄板时提出了板的零阶剪切变形理论,零阶剪切变形理论的优点是满足板顶、底面剪应力为 0,不需要确定剪切修正系数,无剪切闭锁现象。2003 年 Ray 将零阶剪切变形理论推广至复合材料层合板分析。当板退化成梁时,板的零阶剪切变形理论也可相应地退化成梁的零阶剪切变形理论^[7]。在梁中,取其宽度 $B=1$,设其轴向、竖向位移为:

$$\begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - z \cdot \frac{\partial w(x)}{\partial x} + \frac{Q(x)}{\mu} \left[\frac{3}{2} \frac{z}{h} - 2 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \\ w(x, z) = w(x) \end{cases} \quad (1-18)$$

将截面分层,则剪力可由剪应力积分得到:

$$Q = \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \tau_{xz}^k dz \quad (1-19)$$

应变为:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial Q(x)}{\mu \cdot \partial x} \left[\frac{3}{2} \frac{z}{h} - 2 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{Q(x)}{\mu} \left(\frac{3}{2h} - \frac{6z^2}{h^3} \right) \end{cases} \quad (1-20)$$

相应地,梁的本构关系为:

$$\begin{cases} \sigma_x = E \cdot \epsilon_x \\ \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \end{cases} \quad (1-21)$$

将式(1-20)代入式(1-21)和式(1-19)中,得:

$$\mu = \sum_{k=1}^N G \left[\frac{3}{2h} (h_{k+1} - h_k) - \frac{2}{h^3} (h_{k+1}^3 - h_k^3) \right] \quad (1-22)$$

可以看出,零阶剪切变形梁理论中,剪切修正系数 k 隐含于参数 μ 中,并且是由其截面特性决定的。零阶剪切变形梁的弯矩和剪力分别为:

$$M = \int_A E \epsilon_x z \, dz \, dy = -EI_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{EI_2}{\mu} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (1-23)$$

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} = -EI_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{EI_2}{\mu} \frac{\partial q}{\partial x} \quad (1-24)$$

式中:

$$I_1 = \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} z^2 \, dz$$

$$I_2 = \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \left(\frac{3z^2}{2h} - \frac{2z^4}{h^3} \right) \, dz$$

由力系平衡条件 $Q = \frac{\partial M}{\partial x}$, 得平衡方程为:

$$EI_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q - \frac{EI_2}{\mu} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad (1-25)$$

对于矩形截面,有:

$$\mu = Gh, \quad I_1 = \frac{h^3}{12}, \quad I_2 = \frac{h^2}{10} \quad (1-26)$$

1.2.5 Levinson 高阶剪切变形理论

Levinson 高阶剪切变形理论^[3]中,其位移模式为:

$$\begin{cases} u(x, z) = u(x) + z \cdot \psi(x) - \frac{4z^3}{3h^2} \left[\psi(x) + \frac{\partial w(x)}{\partial x} \right] \\ w(x, z) = w(x) \end{cases} \quad (1-27)$$

相应地,轴向应变和剪切应变分别为:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \left(z - \frac{4z^3}{3h^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \gamma_{xz} = \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (1-28)$$

相应的内力为:

$$\begin{cases} N = \int_{-h/2}^{h/2} E \epsilon_x \, dz = a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + (b - c) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} - c \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M = \int_{-h/2}^{h/2} E \epsilon_x z \, dz = b \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + (d - e) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} - e \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ Q = \int_{-h/2}^{h/2} G \gamma_{xz} \, dz = s \cdot \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (1-29)$$

式中:

$$\begin{cases} (a, b, d) = \int_{-h/2}^{h/2} E(1, z, z^2) \, dz \\ (c, e) = \frac{4}{3h^2} \int_{-h/2}^{h/2} E(z^3, z^4) \, dz \\ s = G \cdot \left(\int_{-h/2}^{h/2} dz - \frac{4}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} E z^2 \, dz \right) \end{cases}$$