

高等学校教学用书

弹性波场论基础

Fundamentals of Elastic
Wave Field-theory

刘喜武 编著



中国海洋大学出版社
CHINA OCEAN UNIVERSITY PRESS

高等学校教学用书

中国海洋大学教材建设基金
中国海洋大学教材出版基金

资助

弹性波场论基础

Fundamentals of Elastic Wave Field-theory

刘喜武 编著

中国海洋大学出版社

· 青岛 ·

内容提要

本书针对地震波理论及其地震勘探工程技术的需要,全面系统地阐述了弹性波场论的基本内容。全书共分为九章,包括应力分析、应变和位移分析、应力与应变的关系、弹性动力学基本方程和定解问题等弹性理论的基本内容,以及弹性波波动方程建立过程及其在无限大弹性介质中的传播规律、在分层介质中的传播规律、波动方程积分解;最后论述地震波场的基本传播规律,内容相对独立、完整,并具有自含性。为提高学生动手能力,书末附有课程实验作业。

图书在版编目(CIP)数据

弹性波场论基础 / 刘喜武编著. —青岛: 中国海洋大学出版社, 2008. 4
ISBN 978-7-81125-141-8

I. 弹… II. 刘… III. 弹性波—场论—高等学校—教材
IV. 0347. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 045851 号

出版发行 中国海洋大学出版社
社 址 青岛市香港东路 23 号
网 址 <http://www.ouc-press.com>
电子信箱 bingbueye@tom.com
订购电话 0532—82032573(传真)
责任编辑 毕玲玲
印 制 日照报业印刷有限公司
版 次 2008 年 5 月第 1 版
印 次 2008 年 5 月第 1 次印刷
成品尺寸 185 mm×260 mm
印 张 16.75
字 数 387 千字
定 价 32.00 元

邮政编码 266071

电 话 0532—85902121

前 言

本书针对“勘查技术与工程”和“地球探测与信息技术”等专业近年来开设“弹性动力学”、“地震波动力学”等课程没有合适教材的实际情况,考虑到专业合并调整后对这些课程具体要求的变化,为适应新的课程体系改革而编写。根据课程设置要求,本书作为“地球物理场论·弹性波场论”的教材,命名为《弹性波场论基础》。

全书共分9章:第1章为绪论,介绍本门课程的特点和应用背景;第2~5章阐述经典弹性理论的基本内容,包括应力分析、应变分析、应力与应变的关系、弹性动力学基本方程和定解问题;第6章阐述弹性波波动方程的建立过程及其在无限大弹性介质中的传播规律;第7章阐述指定震源分布或边界条件下波动方程的积分解表示;第8章讨论分层弹性介质界面的散射(反射、透射、折射、面波等)和绕射规律;第9章为地震波动力学基础,论述地震波场的基本传播规律,内容相对完整、独立,具有自含性。

本书的核心是弹性波场论的基本理论和方法。弹性应力分析、应变分析和物理方程是建立弹性波波动方程的基础准备,不作为本书的重点内容。这是与材料、工程等专业开设的“弹性力学”课程不同之处,也是本课程一直没有合适教材的原因。而弹性波场理论又是地震波动力学理论的基础。本书重点内容是在建立弹性波动方程后,研究弹性波场的规律,包括在无限均匀各向同性完全弹性介质中的传播规律,指定震源分布或边界条件建立波动方程积分形式的解,讨论弹性波在分层弹性介质中界面的散射(反射、转换反射、透射、转换透射、全反射以及自由表面的面波)、绕射,最后给出实际介质中地震波传播的一些情况。为提高学生的动手实践能力,书末附有“复习思考题”和“课程实验作业”。

本书是学习“地震波动力学”和“地震勘探”等课程的基础,可作为地球物理与信息类专业本科生教材,也可供攻读地球探测与信息技术或固体地球物理专业的硕士研究生学习“地震波动力学”课程时参考。本书对从事地震勘探

的工程技术人员也有一定的参考价值。

感谢中国科学院地质与地球物理所李幼铭研究员、刘洪研究员在百忙之中审阅了全部书稿,并提出了重要的修改意见。

本书的出版得到中国海洋大学教材出版基金的资助,同时得到中国海洋大学教务处、海洋地球科学学院领导及有关老师的大力支持,在此表示衷心的感谢。

研究生张宁、刘婉莹帮助录入了大部分文字,并清绘了全部图件,研究生高伟也参与了部分文字的录入工作,对她(他)们的辛勤劳动表示感谢。在本课程讲义的5轮试用中,中国海洋大学勘查技术与工程专业2002~2006级以及地球信息科学与技术专业2003级和2006级的同学对讲义提出了不少修正建议,在此一并致谢。

由于编著者水平有限,难免有不妥之处,敬请提出宝贵意见。

刘喜武

2007年10月于中国海洋大学

目 次

第1章 绪 论	1
1.1 弹性波场论概述	1
1.2 弹性动力学的基本假设	3
1.3 地震波动力学和地震勘探	4
1.4 结语	6
第2章 应力分析	7
2.1 外力、内力及截面法	7
2.2 应力与应力分量	9
2.3 物体内一点的应力状态	12
2.4 主应力和主方向	17
2.5 最大与最小应力	20
2.6 平衡和运动微分方程	22
2.7 边界条件	25
2.8 圆柱坐标及球坐标系下平衡及运动微分方程	25
第3章 应变分析	29
3.1 位移分量和旋转分量	29
3.2 应变与应变分量	30
3.3 应变分量和位移分量的关系——几何方程(1)	31
3.4 旋转分量与位移分量的关系——几何方程(2)	33
3.5 物体内任一点的应变状态	35
3.6 主应变和主方向	39
3.7 体积应变——几何方程(3)	40
3.8 无旋变形、等体积变形与位移矢量公式	41
3.9 应变协调方程	44
3.10 圆柱坐标及球坐标系中的几何方程	45
第4章 应力与应变关系	50
4.1 广义虎克定律	50
4.2 工程弹性常数及相互间的关系式	56

4.3	简单和复杂应力状态下弹性应变能和应变能密度	58
4.4	能量密度与能通量密度	62
4.5	小结	64
第5章	弹性动力学问题的建立	65
5.1	弹性动力学的基本方程	65
5.2	弹性动力学问题的提法	68
5.3	以位移表示的运动微分方程——拉梅(Lame)方程	69
5.4	圆柱坐标和球坐标系下以位移表示的运动微分方程	71
第6章	无限弹性介质中的弹性波	73
6.1	弹性波控制方程的建立	74
6.2	声波方程的建立(流体力学)	76
6.3	均匀各向同性无限弹性介质中的平面波(Plane-wave)	81
6.4	波前面分析与弹性介质中任意波前形状波的传播速度	88
6.5	均匀各向同性无限弹性介质中的球面波	92
6.6	无限弹性介质中球面空腔产生的弹性波	94
6.7	均匀各向同性无限弹性介质中的柱面波	98
6.8	谐波	98
6.9	平面波的能量	104
第7章	波动方程解的积分表达	106
7.1	波动方程的定解问题	106
7.2	泊松积分与克希霍夫积分	110
7.3	瑞雷(Rayleigh)积分	125
7.4	格林函数法	133
7.5	波动方程的反演简介	147
第8章	分层介质中弹性波的传播	151
8.1	平面谐波在自由界面上的传播规律	151
8.2	平面谐波在两种介质分界面上的传播规律	173
8.3	层状介质中波的传播规律	183
8.4	勒夫(Love)面波	192
8.5	斯通莱(Stonely)面波	194
8.6	频散时相速度和群速度	195
第9章	地震波场论基础	197
9.1	地球介质模型	197
9.2	地震波的种类及特点	199
9.3	地震波在无限介质中传播的动力学特点	203

9.4 地震波射线理论	229
9.5 地震波在分层介质中的反射、透射与折射(影响振幅)	234
9.6 地震波中的瑞雷面波	241
9.7 地震波的薄层效应(干涉)	242
9.8 地震波的绕射	245
9.9 一个反射记录地震道的形成	247
9.10 地震波动力学在地震勘探中的应用概述	250
复习思考题	252
课程实验作业:地震波在介质分界面的反射与透射系数计算	254
参考文献	259

第1章 绪 论

1.1 弹性波场论概述

在普通物理的力学部分,我们曾经着重讨论过物体在外力作用下的机械运动规律。在讨论时,由于物体变形影响很小,我们将其忽略,而将物体视为刚体或简化为质点,这是完全正确的。然而,实际上任何物体在外力作用下不仅会产生机械运动,而且会产生变形。由于变形物体内部将相互作用,产生内力、应力和应变。当应力或应变达到一定极限时,物体就会破坏,这一点在研究材料和工程力学中尤其要考虑,地球介质也不例外,地壳运动或地震都会产生地质体的应力或应变。

在弹性力学中,主要讨论对物体作用时的变形效应,物体不再假定为刚体,而是弹性体、塑性体,应当视为可变形体,我们研究的视角也从外部整体过渡到内部局部。长期的生产实际和科学实验均已表明,几乎所有的物体都具有弹性和塑性。

所谓的弹性是指物体的变形随外力的撤除而完全消失的属性。

所谓的塑性是指物体的变形在外力的撤除后仍部分残留的属性。

物体的弹性和塑性受诸多因素影响而发生改变,并在一定的条件下相互转化。因此,确切地应当说成物体处于弹性状态或塑性状态,而非简单地说物体是弹性体或塑性体。在弹性力学中,只讨论物体处于弹性状态下的有关力学问题,这时物体可称为弹性体。

由上所述,弹性力学又称弹性理论,研究的对象是弹性体,其任务是研究弹性体在外界因素(包括外力、温度等)作用下的应力、应变和位移规律。简单地说,弹性力学就是一门研究弹性体的应力、应变和位移规律的学科。

弹性力学是固体力学中很重要的一个分支。而固体力学是从宏观观点研究固体在外力作用下的力学响应的科学,它主要研究固体由于受外力作用所引起的内力(应力)、变形(应变)以及与变形有直接关系的位移的分布规律及其随时间变化的规律。可见,应力、应变和位移是空间和时间的函数。与固体力学对应的还有流体力学等。固体力学还包括材料力学、断裂力学等等。

弹性力学本身又分为弹性静力学(Elasticity Statics)和弹性动力学(Elasticity Dynamics)。弹性静力学研究受力弹性体的任一微元都处于静力平衡,因而应力、应变和位移都只是空间位置坐标的函数,且不随时间改变的弹性力学问题(牛顿第一定律)。弹性动力学则是研究受力弹性体的任一微元都不处于静力平衡,因而应力、应变和位移都不仅是空间位置坐标的函数,而且还是时间函数的弹性力学问题(牛顿第二定律)。

本课程以弹性动力学为主,研究弹性体由于受外力作用而产生的其中各个空间位置

点的应力、应变和位移随时间变化规律的基本理论和方法。

图 1-1 表示弹性动力学学科归属及其位置。

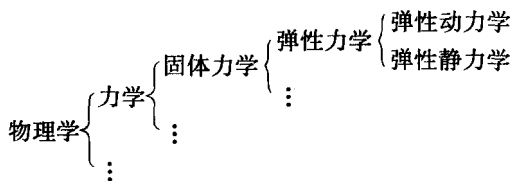


图 1-1 弹性动力学学科归属及其位置

具体地说,弹性动力学研究的基本内容如下:

- (1)应力分析;
- (2)位移和应变分析;
- (3)应力和应变的关系——物理方程;
- (4)弹性波传播。

应力是应变和位移的原因,应变和位移是应力作用的结果的不同表示;应力造成扰动,扰动的传播形成弹性波。物体内部传递的应力有压应力和剪切应力,相应的波有无旋波和等容波(等体积波),弹性波在介质的分界面发生反射、透射等散射效应,同时存在绕射。散射包含反射、转换反射、透射、转换透射、全反射以及自由表面的面波等。当分界面的曲率小于波长,或反射面为断面,尖灭点等中断时,简单的反射透射定律不适用,这时波以绕射形式传播。在地震勘探中,地震波就是一种弹性波,其波长约为 100 米,许多地质现象都将引起绕射波。理论上,地下介质中每一个点都可以看作一个绕射点,地震波场是由每个绕射点绕射波场叠加而成的,这就是著名的惠更斯原理。地震波传播的实质是介质内单元体之间能量的传递。

弹性波场论作为学习地震波动理论和方法的基础,是本书讨论和研究的核心,而地震波动理论又是地震学和地震勘探的基础,并有直接应用。弹性波对介质的动力学效应则由波动方程来描述,有:①以位势(位移)为扰动的波动方程;②以体应变和旋转分量为扰动函数的波动方程。波动方程描述介质对各种物理量的响应,而不仅仅是位移扰动。所以,弹性波动方程又是本书研究的关键和核心,应力分析、应变分析,以及应力、应变和位移三者之间的关系等弹性力学(弹性理论)基础是为建立弹性波动方程作的基础准备,不是本书重点,这就是本书作为弹性力学教程不同于材料和工程中要求的弹性力学内容之处。

建立弹性波动方程后,研究弹性波传播的基本规律:在均匀各向同性无限弹性介质中的传播规律,在分层介质中弹性波传播的规律,包括波在弹性介质分界面的散射(反射和透射)、在自由界面的散射(面波),以及它们满足的规律(Knott 方程或 Zepppritz 方程、Rayleigh 面波和 Love 面波)。

有了弹性波动方程以后,给出方程的解,就可研究波的传播规律。在给出扰动源或初边值条件时,求解波动方程的定解问题是本课程研究讨论的目的和归宿,一般有积分解析解和数值解。特别是波动方程数值解法,如有限差分法、边界元法、有限元法、伪谱法、积分偏移法等已成为重要的计算力学研究领域。

实际上,地震波与弹性波在传播理论上没有本质差异。但弹性波在传播介质、频带和能量分布上较地震波宽泛的多。弹性波理论和技术应用最典型的就人体物理信息探测,如B超。地震波实质就是天然或人工激发震源,能量(机械振动)是在地球介质中传播的一种弹性波,可用于地球物理信息探测。地震波动力学理论和方法是地震勘探理论和方法的基础,地震波动方程在地震勘探中已得到广泛和深入的应用,以地震偏移成像为中心,得到巨大而迅速的发展。因此本课程最后要结合地震勘探实际,简要介绍地震波动力学基本理论和方法,如波动地震与几何地震学的关系、实际介质中的地震波。

1.2 弹性动力学的基本假设

正如在研究物体机械运动规律时将物体抽象化成刚体或质点那样,在研究弹性体应力、应变规律时,也需要在能反映事物主要矛盾的前提下,将其抽象化成一种理想的力学模型,以深入到问题的本质。弹性力学的基本假设如下:

(1)物体是连续的

在宏观上认为物体内部由连续介质组成而无空隙,即认为物体的整个体积都被组成该物体的物质所填满。因此,物体中的应力、应变和位移等物理量都可以用坐标的连续函数表示,从而使我们便于运用高等数学解决弹性力学问题。其实,微观上构成物体的分子之间有一定的间隙存在,但它与物体的整体尺寸相比甚微,故可以不考虑,由此得到的结果与实验结果是符合的。

(2)均匀和各向同性假设

在宏观上,认为物体内部各点及每点的各个方向上的介质的物理性质都是相同的,这样整个物体的各个部分都具有相同的弹性模量和泊松比等常数,从而使得我们能够在该物体任取一小部分来加以分析,然后将所得结果应用于整个物体。应当指出,在微观上组成物体的晶粒之间的物理性质是有差异的,而且每个晶粒的物理性质也不是各向同性的。但是,对于大多数金属以及稳定的沉积岩,由于晶粒尺寸与物体尺寸相比极其微小,而且排列又不规则,从统计物理的角度看,是符合这一假设的。

(3)小变形假设

认为物体在外力及温度变化等因素作用下,物体因变形而产生的位移与整体尺寸相比是极其微小的。这样,在研究受力物体的静力平衡问题时,可以不考虑它的尺寸的改变,按受力前原始尺寸进行计算;而在研究物体的变形时,可以略去变形的乘积项,以使弹性力学中的微分方程全部变成线性微分方程。

(4)完全弹性假设

认为物体始终处于线性弹性状态。这样,应力与应变成正比,从而使我们能运用虎克定律来建立应力和应变关系。应当明确,有的物体的弹性并非总是线性的,或者根本就不是线性的,但对于很小的弹性变形来讲,近似地作弹性处理是可以的。

(5)无初应力假设

认为物体在未受外界因素作用时处于自然状态,即其内部无初应力。于是,当物体受外界因素作用时物体内部应力仅由现在所作用的外界因素而产生。如果物体中有初应力存

在,那么按弹性力学所求得的应力加上初应力才是现在物体中的实际应力。

在上述基本假设下,弹性力学问题的研究得到一定程度的简化,使得我们能依据此建立完备而线性的弹性力学方程组,从而为求解弹性力学问题奠定了理论基础。在研究方法上,弹性动力学根据基本假设,从弹性体中切取单元体(微体)入手,综合考虑静力学(或运动学)(应力与位移关系)、几何学(应变与位移关系)、物理学(应变与应力关系)得出基本微分方程,进而求解。在求解时,还必须考虑初始条件和边界条件。值得一提的是按上述方法得到相应微分方程,一般都是高阶偏微分方程,在初始和边界条件下精确地求出它们的解,数学上一般相当困难。所以,除了利用解析法求精确解之外,还发展了数值法求近似解,如有限元法等等,为克服这一困难提供了手段。

上述各假设在所限定范围内都是对实际情况的近似,为长期实践所证实,随着科学技术的发展和实际需要,上述各假设可以代之为更接近实际情况的假设。如在地震勘探中,高精度、高分辨率地震勘探要求对波场进行精细研究,从而提出研究非均匀和各向异性介质中的波传播速度,及黏弹性介质、多孔介质中的波传播问题。

1.3 地震波动力学和地震勘探

地震勘探作为应用地球物理的一种方法,已经成为最重要的勘探手段,特别是油气勘探。地震勘探是利用人工激发在地壳中传播的弹性波来勘探地质构造和地层岩性、岩石物理参数及含流体性质等的一种方法。其大致的步骤是在地表运用震源,通常是炸药,激发产生在地层介质中传播的波,在岩层分界面发生散射,如反射、折射;在地面用专门仪器接收,测定波形和传播时间,然后进入复杂处理流程,反演解释出地层的地震波速度、地层构造、地层岩性、岩石物理性质,从而提供给地质学家,判定地质目标。要达到反演解释岩性的目标,需要采用多种技术,如高分辨率处理技术、叠前深度偏移技术、高精度反演技术、地震属性分析技术、相干体技术、地震层序分析技术、AVO 分析技术、多波多分量技术、时移地震技术和可视化技术等等。

由于岩层可近似为弹性体,地震勘探方法所依赖的地震波传播理论都属弹性动力学范畴,因而弹性波动力学是地震勘探理论和方法的重要基础,同时弹性波动理论在地震勘探中有诸多直接的应用,如波动方程正演模拟、波动方程叠前深度偏移和速度估计、基于波动方程的波阻抗反演、多次波消除等等。

同样,地震波传播理论是地震学、测震学、地震预报和地震工程等学科的基础。就地震波动力学而言,目前其前沿研究热点主要有以下几点:①地球介质的非弹性、非单相、各向异性。这时,将导致地震波的衰减,并发生频散,衰减系数的求取一直是难点。此外地震波速度的各向异性一直也是研究的前沿问题。孔隙流体介质与油气储层、天然气水合物、水文、环境、工程、地质灾害预防等方面有密切联系,其中地震波传播规律也是前沿问题。②反演问题。它是地球物理学中的核心问题,特别是波动方程的反问题。目前,层析成像和偏移成像技术基本成熟。③非线性地震波的基本规律。理论上在地球介质中传播的地震波是非线性的,由于观测手段的限制及工业界的要求,线性简化也是合理的。关于非线性地震的研究还有诸多难点,如观测、多次波、反射能力和衰减等问题。

总之,地震波传播理论涵盖物理、数学、信息等多门学科,是一个庞大复杂的系统工程。

作为地震波传播理论的直接应用,地震勘探又称勘探地震学,是应用地球物理的一部分,而应用地球物理(Applied Geophysics)又是地球物理学的一个分支。

地球物理学是利用物理学理论研究地球的科学,属于高度交叉的边缘学科之一,它由固体地球物理学、应用地球物理学、大地测量学、空间物理学和大气物理学等分支组成。如弹性动力学属于物理学范畴,当用其研究地震波时,称为地震波动力学,成为勘探地震学的基础理论和方法,充分体现地震勘探的学科边缘性和交叉性。

固体地球物理学,又称理论地球物理学(Pure Geophysics),主要研究地球运动的动力学机制和多种地球物理现象产生的原因,如地球磁场、地球重力场、天然地震等产生的原因,基础性强,并侧重于从全局上研究地球及地球和其他行星的相互作用和影响,地壳、地幔、地核和地球大气层都是它研究的对象。

应用地球物理学,又称地球物理勘探,侧重于各种地球物理场对地质勘探的应用,注重经济效益,且研究的范围多局限在地壳或地壳附近地表部分(包括水圈和生物圈)。

固体地球物理学和应用地球物理学两者相互联系和交叉,理论地球物理学是勘查技术与工程(应用地球物理方法)的基础学科之一。应用地球物理学通过对地球物理场(属性)的观测和解释,确定地下物质的性质、状态和结构,为资源勘查、能源勘查、岩土工程 and 环境保护等经济和社会发展目标服务。被观测的地下介质属性有介质密度、磁性、电性、弹性、放射性、温度等。根据所研究和利用的物理属性参数不同,应用地球物理(地球物理勘探)又形成众多分支,如重力勘探、磁法勘探、电法勘探、地震勘探、核法勘探和地热勘探。尤其是地震勘探技术,分辨率和精度不断提高,在信号处理、成像和反演等方面取得重要的进展,特别是在油气地震勘探方面。工程地球物理(浅层地球物理)在地下水勘探、浅层天然气、水利、电力、工程建设、环境监测、文物保护等方面发挥重要作用。

以地震勘探为例,其理论基础是地震波动力学或弹性波动力学,在地面地震方面,核心技术为高精度三维地震勘探技术、逐步发展多波多分量地震勘探技术和时移地震技术,在井中地震方面,井间地震、随钻地震成为开发地震的新宠。高精度三维地震勘探技术系列包括三维地震资料采集、处理和解释反演技术,正朝着一体化发展。三维地震采集技术包括采集参数论证、观测系统设计、面元分析、地质模型与正演模拟、近地表调查、资料品质分析等内容,商业化软件有绿山、西方奇科、Omini、克浪等。三维地震资料处理技术包括观测系统定义、预处理、滤波、叠前去噪、反褶积、静校正、速度分析与动校正、DMO、叠加、偏移等内容。商业化的软件有:西方-Omega, CGG-Geo-vector plus, BGP-Grysis, Palad-agm-foucs, Landmark-Promax(Su)。地震资料解释反演技术包括构造解释、岩性解释、高精度波阻抗反演、地震属性分析、相干体技术、AVO 分析、可视化等内容,商业化软件 Landmark, Geo-frame, Jason, Strata, 等。

图 2-2 给出应用地球物理学的分支和应用情况。

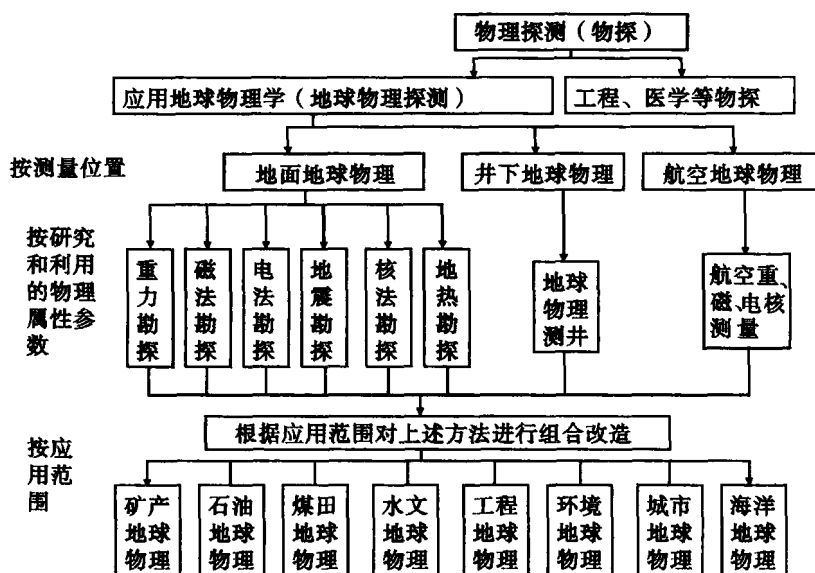


图 2-2 应用地球物理学的分支及其应用

1.4 结语

本书内容只是弹性动力学的基础内容,涉及的内容都是基本的,作为核心内容的弹性波部分也仅仅是一个引论。为进一步夯实固体地球物理学专业的基础,应进一步学习“地震波动力学”、“地震学”等课程,也为深入掌握地震波传播理论和地震勘探技术,追求科学技术前沿,打好坚实的理论与方法的科学基础。

第 2 章 应力分析

应力是弹性动力学的一个主要概念,应力概念是本章的核心,它描述物体中一部分对另一部分的作用。应力分析是连续介质力学中所具有的唯一方法。本章将研究如何描述一点的应力状态,如何描述一点的平衡状态及运动状态。

在本章推导中将忽略物体变形,即假定物体处于无变形状态,这对小变形不会引起明显误差。

2.1 外力、内力及截面法

外力是指其他物体作用在所研究物体上的力。内力是指因外力作用而使所研究物体内部各个部分之间产生的作用力,弹性力学中的内力是指“附加内力”,是依外力和变形而存在的。根据牛顿第三定律作用力和反作用力的关系,一个物体中的内力是成对出现的。当然,内力与外力是相对概念,对整个物体而言是内力,若用一个截面将其切开,在这个切开的面上的力,对被切开的任何一半而言就可以叫外力。这种用假想的截面将物体切开,并分成两部分,将该截面的内力(对未切开整体而言)暴露为外力(对切开后的任一一半而言),用平衡条件确定其大小和方向,这种内力分析方法就叫做截面法。

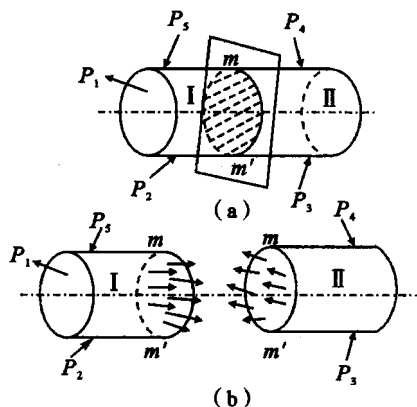


图 2-1 截面法示意图

为显示出物体在外力作用下 $m-m'$ 截面上的内力,假想用经过 $m-m'$ 截面的一个平面把物体分成 I、II 两部分,见图 2-1(a)。任取其中一部分,例如 II,作为研究对象。在 II

上作用的外力有 P_3 和 P_4 , 欲保持 II 的平衡, 则 I 必须有作用于 II 的 $m-m'$ 截面上的力与所受外力平衡, 如图 2-1(b) 所示, 这个力就是该截面上的内力, 暴露出来, 成为外力。根据作用力和反作用力定律知, II 必以大小相等、方向相反的力作用在 I 上。上述 I 和 II 之间的相互作用就是该物体在 $m-m'$ 截面上的内力。假定物体是连续的, 则在 $m-m'$ 截面上各处都有内力存在, 内力是连续分布在截面上的一个分布力系。这种用截面假想地把物体切开, 并分为两部分, 将该截面上的内力 (对未切开整个物体而言) 暴露为外力 (对切开后的一半而言), 并用平衡条件确定其大小和方向的方法就称截面法。可归结为以下四个步骤:

- (1) 切: 用假想的截面, 在欲求某截面内力的地方将物体切开, 并分成两部分;
- (2) 去: 去掉其中一部分, 保留另一部分作为研究对象;
- (3) 代: 用截面上的内力代替移去部分对保留部分的作用, 将内力暴露为外力;
- (4) 平: 建立保留部分的平衡方程, 由已知外力求内力。

作用在物体上的外力按其分布情况的不同可分为体积力和表面力, 简称体力和面力。

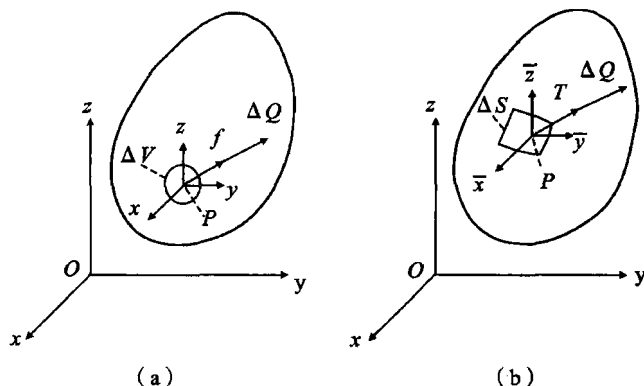


图 2-2 体力和面力的定义

2.1.1 体力

分布在物体体积内各质点的外力, 称为体力。例如重力、惯性力和电磁力等等。物体内部各点所受的体力, 一般是不同的。为了表明该物体在这一点 P 所受的体力的大小和方向, 在 P 点周围, 包含 P 点, 取微小体积元素 ΔV , 见图 2-2(a), 设作用于 ΔV 的外力为 $\Delta \vec{Q}$, 则在 ΔV 上的平均体力为 $\Delta \vec{Q} / \Delta V$, 若 ΔV 不断减小, 则 $\Delta \vec{Q}$ 和 $\Delta \vec{Q} / \Delta V$ 都将不断地改变其大小、方向和作用点。随 ΔV 的逐渐减小, 分布在 ΔV 内部的力也逐渐均匀。假定体力连续分布, 当 ΔV 趋近于零 (P 点) 时, 则 $\frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta V}$ 将趋于一定极限 $\vec{f}$, 即

$$\vec{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta V} = \frac{d\vec{Q}}{dV} \quad (2-1)$$

这个极限矢量 $\vec{f}$, 就是物体在 P 点受到的体力的集度。因为 ΔV 是标量, 故 $\vec{f}$ 的方向就是 $\Delta \vec{Q}$ 的极限方向。矢量 $\vec{f}$ 在坐标轴 x, y, z 上的投影 f_x, f_y, f_z , 称为该物体在 P 点

的体力分量,并以与坐标轴正方向一致为正,相反为负。体力的量纲为[力]·[长度]⁻³,在国际单位制中,其单位为牛顿/立方米(N/m³)。

若用作用在物体单位质量元素上的力 $\vec{F}$ 来表示体力,则

$$\vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}}{\rho \Delta V} = \frac{1}{\rho} \frac{d\vec{Q}}{dV} \quad (2-2)$$

于是

$$\vec{f} = \rho \vec{F} = \rho(X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) \quad (2-3)$$

其中 ρ 表示物体密度, X, Y, Z 为单位质量体力 $\vec{F}$ 在坐标轴上的投影, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 为沿坐标轴正向的单位矢量。弹性力学中常用式(2-3)来表示体力。

2.1.2 面力

分布在物体表面上各点的外力,称为面力。例如风力、流体压力、土压力和接触力等。物体表面各点所受的面力,一般也是不同的。为表明该物体在其表面上某一点所受面力的大小和方向,方法与体力相似,围绕 P 点取位微小面积元素 ΔS ,见图2-2(b)。设作用于 ΔS 的外力为 $\Delta \vec{Q}$,则在 ΔS 上的平均面力为 $\Delta \vec{Q}/\Delta S$ 。与体力分析类似,假定面力连续分布,当 ΔS 趋近于零(P 点)时,则 $\Delta \vec{Q}/\Delta S$ 将趋于一定极限,即

$$\vec{T} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta S} = \frac{d\vec{Q}}{dS} \quad (2-4)$$

这个极限矢量 $\vec{T}$ 就是物体在 P 点的面力的集度。同样,因为 ΔS 是标量,故 $\vec{T}$ 的方向就是 $\Delta \vec{Q}$ 的极限方向。矢量 $\vec{T}$ 在坐标轴 x, y, z 上的投影 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$,称为物体在 P 点的面力分量,并以与坐标轴正方向一致为正,相反为负。面力的量纲为[力]·[长度]⁻²,在国际单位制中,其单位为牛顿/平方米(N/m²),称为帕斯卡(Pascal),简称帕(Pa)。

2.2 应力与应力分量

2.2.1 应力

前面讲到研究内力的截面法,现进一步说明如何表明截面上任意点的内力的大小和方向。根据截面法,对被研究部分,截面上所受的内力暴露为外力,即面力,故可用研究面力的方法研究截面上各点内力的分布情况。截面上任意点内力的集度,称为应力。受力物体在 $m-m'$ 截面上围绕 C 点取微小面积元素 ΔS ,如2-3(a)所示, ΔS 上的内力为 $\Delta \vec{Q}$,于是在 ΔS 上的内力分布的集度,即平均应力,为 $\Delta \vec{Q}/\Delta S$ 。内力在截面上分布连续,当 ΔS 趋近于零(C 点时), $\Delta \vec{Q}/\Delta S$ 将趋于一定的极限 $\vec{P}_N$,即

$$\vec{P}_N = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta S} = \frac{d\vec{Q}}{dS} \quad (2-5)$$