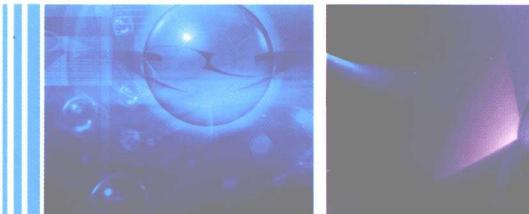




高等教育“十一五”规划教材

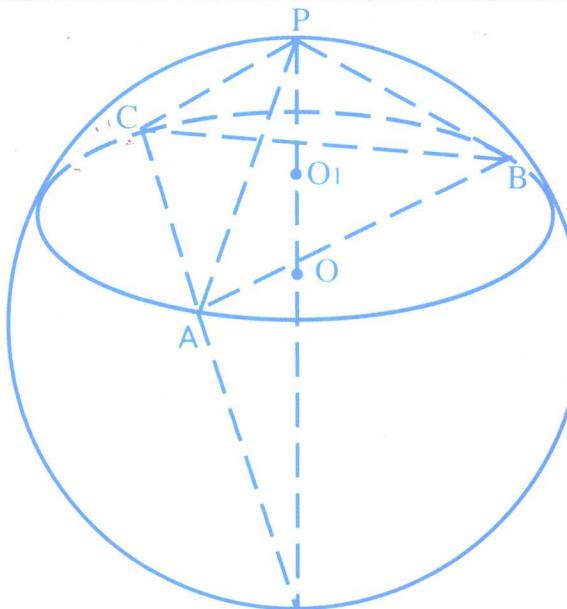
高职高专公共基础课教材系列



# 初等数学

CHUDENG SHUXUE

黄 炜 / 主 编



科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

高等教育“十一五”规划教材

高职高专公共基础课教材系列

# 初 等 数 学

黄 炜 主编

适读对象：高等职业院校、中等职业学校、普通高中、普通中专、成人高校、函授大学、自学考试、社会从业人员等。

出版时间：2005年1月第1版  
印制时间：2005年3月第1次印刷  
开本：880×1230mm 1/16  
印张：1.5  
字数：150000  
定价：15.00元

图书在版编目(CIP)数据

初等数学 / 黄炜主编. —北京: 科学出版社, 2005.1

ISBN 7-03-015988-0

中等职业教育教材系列

科学出版社与您共同打造中国教育信息化

科学出版社

北京·上海·天津·广州·西安·成都·沈阳·长春·南京·武汉·长沙·杭州·南昌·福州·太原·昆明·拉萨·呼和浩特·拉萨·南宁·乌鲁木齐·贵阳·长春·哈尔滨

## 内 容 简 介

全书共 12 章，主要内容包括：集合，不等式与充要条件，函数，幂函数，指数函数及对数函数，任意角的三角函数及其简化公式，加法定理及其推论，反三角函数，数列，平面向量，复数，空间图形，直线，二次曲线，排列，组合与二项式定理。

本书适用于高等职业院校学生，也适用于成人教育、中等职业院校的学生。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

初等数学/黄炜主编.—北京：科学出版社，2008

(高等教育“十一五”规划教材·高职高专公共基础课教材系列)

ISBN 978-7-03-022334-0

I . 初… II . 黄… III . 初等数学—高等学校：技术学校—教材 IV . O12

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 088974 号

责任编辑：沈力匀 周 恢 / 责任校对：赵 燕

责任印制：吕春珉 / 封面设计：耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮 政 编 码：100717

<http://www.sciencep.com>

新 蕉 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2008 年 8 月第 一 版 开本：B5 (720×1000)

2008 年 8 月第一次印刷 印张：16

印数：1—4 000 字数：327 600

定 价：26.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换(路通))

销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62135235 (VP04)

版 权 所 有，侵 权 必 究

举 报 电 话：010-64030229；010-64034315；13501151303

## 前 言

本书是根据教育部制定的《职业学校数学教学大纲》及《数学基础课程教学基本要求》的要求，按照职业院校的培养目标编写的。在编写中努力贯彻素质教育的原则，培养有一技之长、有实践能力，有一定的创业能力和创新精神的技术应用型人才。

本书的编写思想：

(1) 突出“以学生为本”的教育理念，努力做好与九年义务教育的衔接，又涵盖了高中数学的大部分内容，努力实现职业教育的培养要求，使不同层次的学生，都能得到发展，突出培养学生数学思维、应用意识及创新能力。

(2) 以近代数学教育思想方法作为指导，尽可能多地吸收国内外职业教育数学教材编写的先进思想、方法和经验，突出职教特色。

(3) 以降低理论要求、加强实际应用、注重能力培养为原则，在教学内容上删去了一些烦琐的数学证明，力求把数学内容讲得简单易懂，尽量做到由浅入深，由易到难，通俗直观，循序渐进。

(4) 根据目前职业院校学生的实际情况，内容上强调对基础知识的掌握，同时加强教材的弹性。

(5) 内容注重应用性，富有时代气息，内容涉及学生日常生活、工农业生产各方面的信息。

(6) 注重可阅读性，为了提高学生的数学素养，提高学生的学习兴趣，拓宽学生的视野，培养学生的数学人文精神，对内容适当加宽和加深，在每章后附有阅读材料。

全书共 12 章，主要内容包括：集合、不等式与充要条件，函数，幂函数、指数函数及对数函数，任意角的三角函数及其简化公式，加法定理及其推论、反三角函数，数列，平面向量，复数，空间图形，直线，二次曲线，排列、组合与二项式定理。标有“\*”的内容为选学内容，供不同专业选用。书中还加入了大量的例题，习题见配套的《初等数学练习册》，题型新颖，适用面广，便于教师教学和学生自学。

本书适用于高等职业院校的学生，也适用于成人教育、中等职业院校的学生。

本书由黄炜任主编，由刘虹伟，姜俊彬、侯克南、鞠军任副主编。参加编写的有陈军科、干红英、刘睿琼、费妮娜、吴海燕、毛翠丽、胡洪平、李海秋、白凤书、刘金英。全书编写工作由黄炜组织，并负责统稿、定稿及大部分作图工作。张拓、陈钢任主审，杭丽、冯治宇担任副主审。

参加本书编写的院校有宝鸡职业技术学院、辽宁省朝阳工业学校、甘肃省卫生学校、四川省经济贸易学校、西安铁路职业技术学院、西安理工大学高等技术

学院、安康职业技术学院、朝阳市财经学校、辽宁省朝阳市广播电视台大学、湖南化工职业技术学院、山西交通职业技术学院、陕西财经职业技术学院。

在本书的编写过程中参考了许多文献资料，在此对有关资料的作者表示诚挚的谢意，同时对作者所在单位领导的鼎力支持表示感谢。由于编者水平有限，时间仓促，错误与疏漏在所难免，欢迎各位从事职业教育的专家、教师批评指正。

感谢所有帮助过本书编写的同志，特别是我的家人和朋友，以及出版社的编辑们，使本书得以顺利出版。

### ·感恩辞·

首先感谢我的父亲及平武同乡战友，他们对“本溪市钢厂”出资10万元，帮助我圆了大学梦，让我深深感受到他们对我的关爱与鼓励，我会永远铭记于心。

感谢我的恩师孙洪志（现为沈阳理工大学副校长）和张鹤林（现为东北大学教授），感谢他们对我的悉心指导和关心，使我得到良好的锻炼。

感谢我的恩师王长海（现为本溪市高级技工学校思想政治理课教研室主任）、李长海（现为本溪市高级技工学校思想政治课教研室主任）和陈国华（现为本溪市高级技工学校思想政治课教研室主任）。

感谢我的恩师王长海（现为本溪市高级技工学校思想政治课教研室主任）、李长海（现为本溪市高级技工学校思想政治课教研室主任）和陈国华（现为本溪市高级技工学校思想政治课教研室主任）。

# 目 录

<b>第1章 集合、不等式与充要条件</b>	<b>量向面平 章5集</b>
1.1 集合的概念	概念简单面向平 1.5
1.2 集合的运算	概念简单面向平 1.5
1.3 一元一次不等式组、一元二次不等式	概念简单面向平 1.8
1.4 充要条件	概念简单面向平 1.2
<b>第2章 函数</b>	<b>量向面平 章5函</b>
2.1 函数的概念	概念简单面向平 1.6
2.2 函数的图像与性质	概念简单面向平 2.1
2.3 反函数	概念简单面向平 2.4
2.4 函数的初步应用	概念简单面向平 2.6
<b>第3章 幂函数、指数函数、对数函数</b>	<b>量向面平 章5幂</b>
3.1 指数幂的推广	概念简单面向平 3.0
3.2 幂函数	概念简单面向平 3.2
3.3 指数函数	概念简单面向平 3.4
3.4 对数	概念简单面向平 3.7
3.5 对数函数	概念简单面向平 3.9
*3.6 应用与实践	概念简单面向平 4.2
<b>第4章 任意角的三角函数及其简化公式</b>	<b>量向面平 章5三</b>
4.1 角的概念的推广、弧度制	概念简单面向平 4.7
4.2 任意角的三角函数	概念简单面向平 5.0
4.3 同角三角函数间的关系	概念简单面向平 5.5
4.4 三角函数的简化公式	概念简单面向平 5.8
4.5 三角函数的图像和性质	概念简单面向平 6.1
4.6 正弦型曲线	概念简单面向平 6.6
<b>第5章 加法定理及其推论、反三角函数</b>	<b>量向面平 章5加</b>
5.1 加法定理	概念简单面向平 7.3
5.2 二倍角与半角的正弦、余弦和正切	概念简单面向平 7.6
5.3 三角函数的和差化积与积化和差	概念简单面向平 7.8
5.4 反三角函数	概念简单面向平 7.9
5.5 解斜三角形	概念简单面向平 8.5
<b>第6章 数列</b>	<b>量向面平 章5数</b>
6.1 数列的概念	概念简单面向平 9.1
6.2 等差数列	概念简单面向平 9.4
6.3 等比数列	概念简单面向平 9.7
*6.4 应用与实践	概念简单面向平 10.2

<b>第 7 章 平面向量 .....</b>	<b>106</b>
7.1 平面向量的概念 .....	106
7.2 向量的线性运算 .....	108
7.3 平面向量的坐标表示 .....	111
7.4 向量的数量积 .....	114
<b>第 8 章 复数 .....</b>	<b>120</b>
8.1 复数的概念 .....	120
8.2 复数的四则运算 .....	125
8.3 复数的三角形式 .....	127
<b>*第 9 章 空间图形 .....</b>	<b>134</b>
9.1 平面 .....	134
9.2 空间两条直线的位置关系 .....	137
9.3 空间直线与平面的位置关系 .....	139
9.4 空间平面与平面的位置关系 .....	150
9.5 常见的简单几何体 .....	158
<b>第 10 章 直线 .....</b>	<b>171</b>
10.1 直线方程的概念 .....	171
10.2 直线方程的几种形式 .....	175
10.3 平面内两条直线的位置关系 .....	180
*10.4 应用与实践 .....	185
<b>第 11 章 二次曲线 .....</b>	<b>190</b>
11.1 曲线与方程 .....	190
11.2 圆 .....	193
11.3 椭圆 .....	196
11.4 双曲线 .....	202
11.5 抛物线 .....	208
11.6 坐标轴的平移 .....	211
*11.7 极坐标与参数方程 .....	213
<b>第 12 章 排列、组合与二项式定理 .....</b>	<b>221</b>
12.1 计数原理 .....	221
12.2 排列与排列数 .....	222
12.3 组合与组合数 .....	225
12.4 排列与组合的应用 .....	228
12.5 二项式定理 .....	230
12.6 二项系数的性质 .....	231

---

附录 .....	235
附录 1 常用对数表 .....	235
附录 2 反对数表 .....	237
附录 3 三角函数表 .....	239
参考文献 .....	245

本章将介绍集合的基本概念、简单的运算、不等式，最后介绍简易逻辑关系的有关概念。学习这一章后，你将掌握集合的思想与方法，对不等式有一个较深的认识，学会用不等式解决较简单的实际问题，能利用逻辑用语准确表达思维，更好地进行交流。

# 第1章 集合、不等式与充要条件

## 本章要点

集合与元素的概念  
集合与元素的关系  
逻辑关系  
一元一次不等式组  
一元二次不等式组  
绝对值不等式  
命题  
充要条件

集合是现代数学中最基本的概念之一，不等式是表示数量之间的不等关系。本章将介绍集合的基本概念、简单的运算、不等式，最后介绍简易逻辑关系的有关概念。学习这一章后，你将掌握集合的思想与方法，对不等式有一个较深的认识，学会用不等式解决较简单的实际问题，能利用逻辑用语准确表达思维，更好地进行交流。

## 1.1 集合的概念

### 1.1.1 集合

#### 1. 集合的概念

集合是整个数学大厦的基础，它在现代数学中作用比较大，先看下面的例子：

- 引例 1.1 (1) 某高职学院 05 级数控专业班的全体学生；  
 (2) 某机床厂的全部产品；  
 (3) 平面上与两定点的距离相等的点的轨迹；  
 (4) 所有的有理数；  
 (5) 所有的四边形；  
 (6) 方程  $x^2 - 6x + 5 = 0$  的所有实根。

从引例 1.1 容易发现，每一组对象的全体在一定的范围内，具有特定属性。具有某种特定属性的对象组成的总体称为**集合**，简称**集**，组成集合的各个对象称为这个集合的**元素**。

例如，引例 1.1 中，第（1）组是由某高职学院 05 级数控专业班的全体学生组成的集合，班里的每个学生都是它的元素；第（2）组是由某机床厂的全部产品组成的集合，这个机床厂的每一件产品都是它的元素；第（3）组是由平面上与两定点的距离相等的全体点组成的集合，这个轨迹上的每一点都是它的元素；第（4）组是由所有的有理数组成的集合，每一个有理数都是它的元素；第（5）组是所有的四边形组成的集合，每一个四边形都是它的元素；第（6）组是由方程  $x^2 - 6x + 5 = 0$  的所有实根组成的集合，这个方程的每一个实根都是它的元素。

含有有限个元素的集合称为**有限集**，含有无限个元素的集合称为**无限集**，引例 1.1 中的（1）、（2）、（6）都是有限集，而（3）、（4）、（5）都是无限集。

从引例 1.1 可以看出集合中的元素具有三个特性：确定性，互异性，无序性。

## 2. 集合的表示法

在具体应用一个集合时，如何来表示一个集合呢？具体有以下两种方法：

(1) **列举法**是把集合的元素一一列举出来，写在“{ }”内，元素与元素之间用逗号隔开的方法。这种方法一般用来表示元素数目很少或有限的集合。例如， $\{1, 2, 3\}$ ，方程  $x^2 - 1 = 0$  的根组成的集合可以表示为  $\{-1, 1\}$ ，但某些无限集也可使用，例如  $\{1, 2, 3, \dots\}$ 。

(2) **描述法**把集合的元素所具有的特性描述出来，先取一个代表元素，再画一短竖线，后面把元素所具有的特定属性表示写在“{ }”内。这种方法一般用来表示元素数目很多或无限的集合。但元素较少的集合有时也可使用描述法表示。例如， $\{x | x \text{ 为某市重点高中图书馆的藏书}\}$ ，方程  $x^2 - 1 = 0$  的根组成的集合为  $\{x | x^2 - 1 = 0\}$ 。

不含有任何元素的集合叫做**空集**，记为  $\emptyset$ ，例如，不等式  $x^2 + 1 = 0$  的实数解构成的集合就是空集；只含一个元素的集合称为**单元素集**，例如，方程  $2x + 1 = 0$  根的集合，就是单元素集  $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ 。

### 1.1.2 元素与集合的关系

集合一般用大写字母表示，如  $A, B, C, \dots$ ，元素一般用小写字母表示，如  $a, b, c, \dots, \alpha, \beta, \dots$ 。如果一元素  $a$  属于集合  $A$ ，则记为 “ $a \in A$ ”，读作“ $a$  属于集合  $A$ ”，否则记为 “ $a \notin A$ ”（或  $a \in \bar{A}$ ），读作“ $a$  不属于集合  $A$ ”。

如果集合中的元素都是由数组成的，这样的集合称为**数集**。常见的数集及表示符号如下：

$\mathbf{R}$  —— 实数集;  $\mathbf{Z}$  —— 整数集;  $\mathbf{Q}$  —— 有理数集;  $\mathbf{N}$  —— 自然数集;  $\mathbf{N}^*$  —— 正整数集 (有时也用  $\mathbf{Z}^+$ ) .

【例 1.1】用适当的方法表示下列集合:

- (1) 全体奇数;
  - (2) 不超过 5 的自然数;
  - (3) 平面直角坐标系中直线  $y=x$  上所有的点;
  - (4) 所有的四边形.
- 解 (1) 用描述法表示为  $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbf{Z}\}$  ;
- (2) 用列举法表示为  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  ;
- (3) 用描述法表示为  $\{(x, y) \mid y = x, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$  ;
- (4) 用描述法表示为 {四边形} .

### 1.1.3 集合之间的关系

引例 1.2 我国目前的授课主要采用班级授课方式, 在班内一般都有男生和女生. 如果我们认为该班内的全体男生构成一个集合  $A$ , 而该班全体学生构成一个集合  $B$ . 那么这两个集合  $A$  与  $B$  之间又什么关系呢?

#### 1. 集合的包含关系

定义 1.1 设有两个集合  $A$  和  $B$ , 如果  $A$  中的每一元素都属于  $B$ , 则称  $A$  为  $B$  的子集, 记作

$$A \subseteq B \quad (\text{或 } B \supseteq A).$$

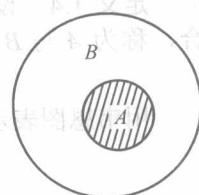
读作“ $A$  包含于  $B$ ”或“ $B$  包含  $A$ ”. 它们的关系用图 1-1 表示.

为了直观形象地表示集合之间的关系, 通常用圆等封闭图像表示集合, 用图像内的点表示该集合的元素. 这样的图叫做韦恩图 (Venn) .

当  $A$  不是  $B$  的子集时, 记作  $A \not\subseteq B$ , 读作“ $A$  不包含于  $B$ ”或“ $B$  不包含  $A$ ”.

因此引例 1.1 中, 该班全体男生构成的集合  $A$  包含于该班全体学生构成的集合  $B$ .

图 1-1



- 注 (1) 规定: 空集是任何集合  $A$  的子集, 即  $\emptyset \subseteq A$  ;  
 意 (2) 由于集合  $A$  的任何一个元素都属于集合  $A$ , 所以任何一个集合  $A$ , 都是它本身的子集, 即  $A \subseteq A$  .

定义 1.2 如果集合  $A$  是集合  $B$  的子集, 且集合  $B$  中至少有一个元素不属于集合  $A$ , 则称集合  $A$  是集合  $B$  的真子集, 记作

$$A \subsetneq B \quad (\text{或 } B \supsetneq A).$$

有时亦表示为  $A \subset B$  (或  $B \supset A$ ). 读作“集合  $A$  真包含于集合  $B$ ”或“集合  $B$  真包含集合  $A$ ”.

由以上的定义，可以很明显的看出：空集是任何非空集合的真子集。

## 2. 集合的相等

**定义 1.3** 设有集合  $A$  和集合  $B$ ，如果  $A \subseteq B$ ，又  $B \subseteq A$ ，则称集合  $A$  和集合  $B$  相等，记作  $A = B$ 。

**【例 1.2】** 写出集合  $A=\{1, 2, 3\}$  的所有的子集，并指出哪些是真子集。

解 集合  $A$  的所有子集为： $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$ ，除集合  $\{1, 2, 3\}$  外，其余都是真子集。

**【例 1.3】** 指出集合  $A=\{x|x+1=0\}$  与集合  $B=\{x|x^2-1=0\}$  之间的包含关系。

解 因为  $A=\{x|x+1=0\}=\{-1\}$ ,  $B=\{x|x^2-1=0\}=\{-1, 1\}$ ,

所以

$$A \subsetneq B.$$



**注** (1) 空集  $\emptyset$  与单元素集  $\{0\}$  是两个不同的集合，且  $\emptyset \subset \{0\}$ ；

**意** (2) 单元素集  $\{a\}$  与单元素  $a$  是两个不同的概念，且  $a \in \{a\}$ 。

## 1.2 集合的运算

### 1.2.1 交集

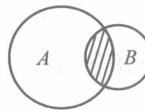
**引例 1.3** 某职业技术学院召开运动会，小王报了三项{100 米，400 米，铁饼}，小李也报了三项{铅球，400 米，跳高}，则运动会上他俩可能会在哪个项目上相遇？怎样用集合表示这个项目呢？

对于由两个集合的共有元素所组成的集合可定义如下：

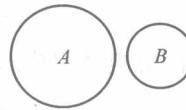
**定义 1.4** 设  $A$  与  $B$  是两个集合，由既属于  $A$  又属于  $B$  的所有元素组成的集合，称为  $A$  与  $B$  的交集，记作  $A \cap B$ ，读作“ $A$  交  $B$ ”。用描述法表示为

$$A \cap B = \{x|x \in A, \text{ 且 } x \in B\}.$$

用韦恩图表示各种情况下的  $A \cap B$ ，如图 1-2 中的阴影部分所示。



(a)



(b)



(c)



(d)

图 1-2

求两个集合的交集的运算叫做**交运算**.

根据交集的定义, 显然有下面的性质:

- (1)  $A \cap B = B \cap A$ ;
- (2)  $A \cap A = A$ ;
- (3)  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;
- (4)  $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$ .

**【例 1.4】**  $A=\{100\text{米}, 400\text{米}, \text{铁饼}\}$ ,  $B=\{\text{铅球}, 400\text{米}, \text{跳高}\}$ , 求  $A \cap B$ .

解  $A \cap B=\{100\text{米}, 400\text{米}, \text{铁饼}\} \cap \{\text{铅球}, 400\text{米}, \text{跳高}\}=\{400\text{米}\}$ .

**【例 1.5】** 设  $A=\{\text{矩形}\}$ ,  $B=\{\text{菱形}\}$ , 求  $A \cap B$ .

解  $A \cap B=\{\text{矩形}\} \cap \{\text{菱形}\}=\{\text{正方形}\}$ .

**【例 1.6】** 设  $A=\{x|x>1\}$ ,  $B=\{x|x<2\}$ , 求  $A \cap B$ .

解  $A \cap B=\{x|x>1\} \cap \{x|x<2\}$   
 $=\{x|x>1 \text{ 且 } x<2\}$   
 $=\{x|1<x<2\}$ .

## 1.2.2 并集

**引例 1.4** 学生小张学习的课程为{数学, 语文, 英语, 计算机}, 学生小黄学习的课程为{电工基础, 计算机, 专业英语, 电子工程制图}, 则这两个学生总共学习的课程是哪些? 怎样用集合表示这些课程呢?

对于由两个集合的元素合并在一起(相同的元素只取一个), 所组成的集合定义如下:

**定义 1.5** 设  $A$  和  $B$  是两个集合, 把属于  $A$  或属于  $B$  的所有元素组成的集合, 称为  $A$  与  $B$  的**并集**, 记作  $A \cup B$ , 读作“ $A$  并  $B$ ”, 用描述法表示为  $A \cup B=\{x|x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ .

用韦恩图表示各种情况下的  $A \cup B$ , 如图 1-3 (a)、(b)、(c)、(d) 所示.

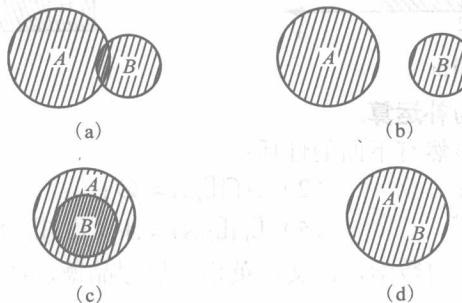


图 1-3

求并集的运算称为**并运算**.

根据并集的定义, 显然有下面的性质:

- (1)  $A \cup B = B \cup A$ ;
- (2)  $A \cup A = A$ ;
- (3)  $A \cup \emptyset = A$ ;
- (4)  $A \cup B \supseteq A, A \cup B \supseteq B$ .

**【例 1.7】** 集合  $A=\{\text{数学, 语文, 英语, 计算机}\}$ , 集合  $B=\{\text{电工基础, 计算机, 专业英语, 电子工程制图}\}$ , 求  $A \cup B$ .

解  $A \cup B = \{\text{数学, 语文, 英语, 计算机}\} \cup \{\text{电工基础, 计算机, 专业英语, 电子工程制图}\}$

$= \{\text{数学, 语文, 英语, 计算机, 电工基础, 专业英语, 电子工程制图}\}$ .

【例 1.8】设  $A = \{x | x > 1\}$ ,  $B = \{x | x < 2\}$ , 求  $A \cup B$ .

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x | x > 1\} \cup \{x | x < 2\} \\ &= \{x | x > 1 \text{ 或 } x < 2\} \\ &= \{x | 1 < x < 2\}. \end{aligned}$$

$A \cup B$  用数轴表示, 如图 1-4 所示.

【例 1.9】设  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ ,  $C = \{2, 3, 4\}$ , 求  $A \cap (B \cup C)$ .

$$\text{解 } A \cap (B \cup C) = \{0, 1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3\}.$$

### 1.2.3 补集

引例 1.5 某班一名学生本学期学习的课程为 {数学, 语文, 英语, 思想品德, 计算机}, 在学期的期末考试中, 他的 {数学, 英语} 两门课程没有及格, 试问他哪些课程通过了考试?

定义 1.6 设  $U$  是全集, 集合  $A \subseteq U$ , 则  $U$  中不属于  $A$  的所有元素组成的集合称为  $A$  的补集, 记作  $\complement_U A$ , 读作 “ $A$  补”. 用描述法表示为  $\complement_U A = \{x | x \in U, \text{ 且 } x \notin A\}$ . 用韦恩图表示  $\complement_U A$ , 如图 1-5 所示.

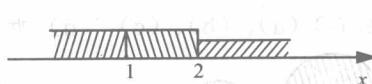


图 1-4

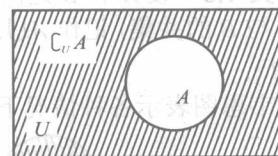


图 1-5

求补集的运算称为补运算.

据补集的定义, 显然有下面的性质:

$$(1) A \cup \complement_U A = U; \quad (2) A \cap \complement_U A = \emptyset; \quad (3) \complement_U U = \emptyset;$$

$$(4) \complement_U \emptyset = U; \quad (5) \complement_U (\complement_U A) = A \quad (\complement_U (\complement_U A) \text{ 为 } \complement_U A \text{ 的补集}).$$

【例 1.10】设  $U = \{\text{数学, 语文, 英语, 思想品德, 计算机}\}$ ,  $A = \{\text{数学, 英语}\}$ , 求  $\complement_U A$ .

解 因为  $A = \{\text{数学, 英语}\}$ , 根据补集的定义知  $\complement_U A = \{\text{语文, 思想品德, 计算机}\}$ .

【例 1.11】已知  $U = \mathbb{R}$ ,  $A = \{x | 2x+1 < 2\}$ , 求  $\complement_U A$ .

$$\text{解 因为 } A = \{x | 2x+1 < 2\} = \{x | x < \frac{1}{2}\},$$

$$\text{所以 } \complement_U A = \left\{x | x \geqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

### \*1.2.4 有限集合元素个数的计算问题

有限集合元素个数的计算问题是常见的问题，设有限集合  $M$  的元素个数记作  $|M|$  或  $N$ ，下面来研究它们的计算。

**【例 1.12】** 某职业技术学院召开田径运动会，甲班在田赛项目中获奖的共 16 人，在径赛项目中获奖的共 17 人，其中有 8 人在田赛、径赛中都获奖，试求甲班在田径运动会中至少有一项获奖的共多少人？

解 设集合  $A = \{\text{田赛获奖者}\}$ ,  $B = \{\text{径赛获奖者}\}$ , 则

$$A \cap B = \{\text{田赛与径赛都获奖者}\},$$

$$A \cup B = \{\text{田赛、径赛至少有一项获奖者}\}$$

$$= \{\text{田赛或径赛获奖者}\}.$$

因为  $|A|=16$ ,  $|B|=17$ ,  $|A \cap B|=8$ .

如图 1-6 所示,  $A \cap B$  的 8 个元素既在集合  $A$  中, 又在集合  $B$  中, 当把集合  $A$  的 16 个元素与集合  $B$  的 17 个元素相加时, 这 8 个元素重复加了一次, 计算时应减去重复的 8 个元素, 因此, 甲班获奖的人数为  $|A \cup B|=16+17-8=25$ .

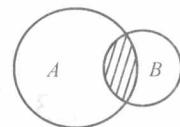


图 1-6

答: 甲班共有 25 人获奖。

例 1.12 的结论可以推广到一般情形, 得到以下定理:

**定理 1.1** 设  $A, B, C$  为有限集合, 则

$$|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|.$$

$$|A \cup B \cup C|=|A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|B \cap C|-|A \cap C|+|A \cap B \cap C|, \quad (1-1)$$

公式 (1-1) 通常叫做 **容斥原理** (逐步淘汰原理), 是计数的一种基本方法, 这一原理在概率论和数论中常被用到。

**【例 1.13】** 某学校有 16 位教师, 已知教数学课的教师有 9 位, 教物理课的教师有 7 位, 教化学课的教师有 5 位。其中, 有 6 位教师既教数学又教物理, 有 5 位教师既教数学又教化学, 有 3 位教师既教物理又教化学, 还有 3 位教师兼教这 3 门课。试问:

(1) 教数、理、化以外的课的教师有几位?

(2) 只教数、理、化中的一门课的教师有几位?

(3) 正好教数、理、化中两门课的教师有几位?

解 设 16 位教师的集合为  $U$ , 教数学课的教师属于集合  $A$ , 教物理课的教师属于集合  $B$ , 教化学课的教师属于集合  $C$ , 如图 1-7 所示, 则有

$$|A|=9, |B|=7, |C|=5.$$

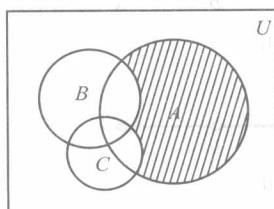


图 1-7

$$|A \cap B| = 6, |A \cap C| = 5, |B \cap C| = 3.$$

$$|A \cap B \cap C| = 3.$$

(1) 不教数学、物理、化学课的教师数目为

$$|\complement_U A \cap \complement_U B \cap \complement_U C| = 16 - |A \cup B \cup C|$$

$$= 16 - (|A| + |B| + |C|) + |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

$$= 16 - (9 + 7 + 5) + (6 + 5 + 3) - 3 = 6;$$

(2) 只教数、理、化中的一门课的教师数目为

$$N(1) = |A| + |B| + |C| - 2(|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) + 3|A \cap B \cap C|$$

$$= 9 + 7 + 5 - 2(6 + 5 + 3) + 3 \times 3 = 2;$$

(3) 正好教数、理、化中两门课的教师数目为

$$N(2) = (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) - 3|A \cap B \cap C|$$

$$= (6 + 5 + 3) - 3 \times 3 = 5.$$

### 1.3 一元一次不等式组、一元二次不等式

本节不等式的学习包括一元一次不等式组与一元二次不等式，它们的解集可以用前面学过的集合表示。为了表示简便起见，首先引入区间的概念。

#### 1.3.1 区间

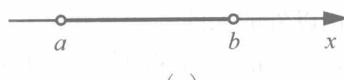
(1) 数集  $\{x | a < x < b\}$ ，记作  $(a, b)$ ，称为**开区间**；

(2) 数集  $\{x | a \leq x \leq b\}$ ，记作  $[a, b]$ ，称为**闭区间**；

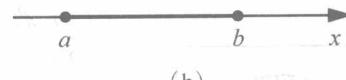
(3) 数集  $\{x | a \leq x < b\}$ ，记作  $[a, b)$ ，称为**左闭右开区间**；

(4) 数集  $\{x | a < x \leq b\}$ ，记作  $(a, b]$ ，称为**左开右闭区间**；

在数轴上，这些区间可用一条以  $a, b$  为端点的线段来表示，区间闭的一端标以实心点，开的一端标以空心点。两端点的距离称做区间的长。区间长为有限时叫做**有限区间**，具体见图 1-8 (a)、(b)、(c)、(d)。这四种区间都是有限区间，当区间长为无限时，叫做**无限区间**。



(a)



(b)



(c)



(d)

图 1-8

(5) 实数集  $\mathbf{R}$  记作  $(-\infty, +\infty)$ , 其中 “ $\infty$ ” 读作 “无穷大”,  $+\infty(-\infty)$  读作 “正(负)无穷大”, 它们都不是一个确定的数;

(6) 实数集  $\{x|x \geq a\}, \{x|x > a\}, \{x|x \leq b\}, \{x|x < b\}$  分别记作  $[a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, b)$ , 它们在数轴上的表示如图 1-9 (a)、(b)、(c)、(d) 所示.

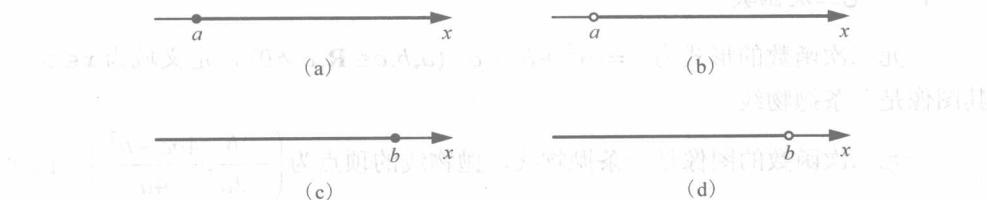


图 1-9

用区间表示数时, 必须遵循左小右大的原则.

**【例 1.14】** 用区间表示下列变量的变化范围.

$$(1) -3 < x \leq 10; \quad (2) -3 \leq x \leq 10;$$

$$(3) x \leq 10; \quad (4) x > -3.$$

解 (1) 不等式  $-3 < x \leq 10$  表示为  $(-3, 10]$ ;

(2) 不等式  $-3 \leq x \leq 10$  表示为  $[-3, 10]$ ;

(3) 不等式  $x \leq 10$  表示为  $(-\infty, 10]$ ;

(4) 不等式  $x > -3$  表示为  $(-3, +\infty)$ .

### 1.3.2 一元一次不等式组及其解法

由多个一元一次不等式所组成的不等式组, 称为 **一元一次不等式组**. 这些一元一次不等式的解集的交集, 称为这个**一元一次不等式组的解集**.

**【例 1.15】** 解下列一元一次不等式组, 并用区间表示.

$$(1) \begin{cases} 4x - 5 < 0 \\ 2x + 7 > 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 5x < 3x + 10 \end{cases}$$

解 (1) 解各不等式, 得

$$\begin{cases} x < \frac{5}{4} \\ x > -\frac{7}{2} \end{cases}$$

故原不等式的解为  $-\frac{7}{2} < x < \frac{5}{4}$ , 即  $\left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{4}\right)$ ;

(2) 解各不等式, 得

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x < 5 \end{cases}$$