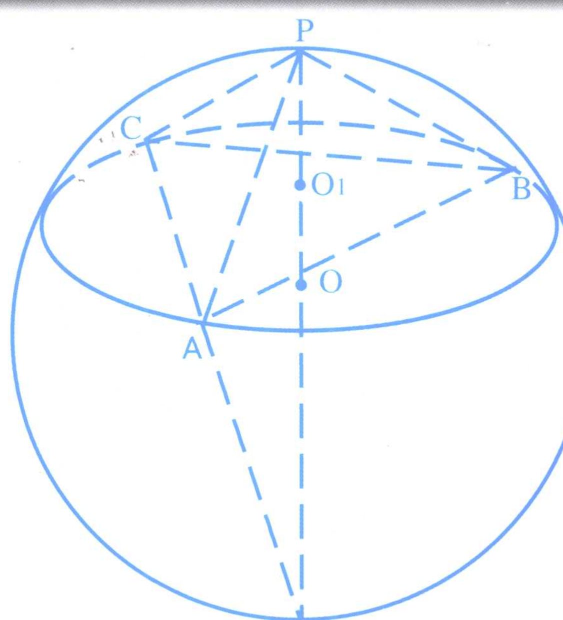
高等教育"十一五"规划教材

高职高专公共基础课教材系列

初等数学

CHUDENG SHUXUE

黄 炜/主 编



科学出版社
www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材

高职高专公共基础课教材系列

初等数学

黄 炜 主编

科学出版社

北 京

内容简介

全书共12章，主要内容包括：集合，不等式与充要条件，函数，幂函数，指数函数及对数函数，任意角的三角函数及其简化公式，加法定理及其推论，反三角函数，数列，平面向量，复数，空间图形，直线，二次曲线，排列，组合与二项式定理.

本书适用于高等职业院校学生，也适用于成人教育、中等职业院校的学生.

图书在版编目(CIP)数据

初等数学/黄炜主编. —北京：科学出版社，2008
（高等教育“十一五”规划教材·高职高专公共基础课教材系列）
ISBN 978-7-03-022334-0

Ⅰ.初… Ⅱ.黄… Ⅲ.初等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.O12

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第088974号

责任编辑：沈力匀 周 恢 /责任校对：赵 燕
责任印制：吕春珉 /封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008年8月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2008年8月第一次印刷 印张：16
印数：1—4 000 字数：327 600

定价：26.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62135235（VP04）

前言

本书是根据教育部制定的《职业学校数学教学大纲》及《数学基础课程教学基本要求》的要求，按照职业院校的培养目标编写的. 在编写中努力贯彻素质教育的原则，培养有一技之长、有实践能力，有一定的创业能力和创新精神的技术应用型人才.

本书的编写思想：

（1）突出“以学生为本”的教育理念，努力做好与九年义务教育的衔接，又涵盖了高中数学的大部分内容，努力实现职业教育的培养要求，使不同层次的学生，都能得到发展，突出培养学生数学思维、应用意识及创新能力.

（2）以近代数学教育思想方法作为指导，尽可能多地吸收国内外职业教育数学教材编写的先进思想、方法和经验，突出职教特色.

（3）以降低理论要求、加强实际应用、注重能力培养为原则，在教学内容上删去了一些烦琐的数学证明，力求把数学内容讲得简单易懂，尽量做到由浅入深，由易到难，通俗直观，循序渐进.

（4）根据目前职业院校学生的实际情况，内容上强调对基础知识的掌握，同时加强教材的弹性.

（5）内容注重应用性，富有时代气息，内容涉及学生日常生活、工农业生产各方面的信息.

（6）注重可阅读性，为了提高学生的数学素养，提高学生的学习兴趣，拓宽学生的视野，培养学生的数学人文精神，对内容适当加宽和加深，在每章后附有阅读材料.

全书共 12 章，主要内容包括：集合、不等式与充要条件，函数，幂函数、指数函数及对数函数，任意角的三角函数及其简化公式，加法定理及其推论、反三角函数，数列，平面向量，复数，空间图形，直线，二次曲线，排列、组合与二项式定理. 标有“*”的内容为选学内容，供不同专业选用. 书中还加入了大量的例题，习题见配套的《初等数学练习册》，题型新颖，适用面广，便于教师教学和学生自学.

本书适用于高等职业院校的学生，也适用于成人教育、中等职业院校的学生.

本书由黄炜任主编，由刘虹伟，姜俊彬、侯克南、鞠军任副主编. 参加编写的有陈军科、干红英、刘睿琼、费妮娜、吴海燕、毛翠丽、胡洪平、李海秋、白凤书、刘金英. 全书编写工作由黄炜组织，并负责统稿、定稿及大部分作图工作. 张拓、陈钢任主审，杭丽、冯治宇担任副主审.

参加本书编写的院校有宝鸡职业技术学院、辽宁省朝阳工业学校、甘肃省卫生学校、四川省经济贸易学校、西安铁路职业技术学院、西安理工大学高等技术

学院、安康职业技术学院、朝阳市财经学校、辽宁省朝阳市广播电视大学、湖南化工职业技术学院、山西交通职业技术学院、陕西财经职业技术学院.

在本书的编写过程中参考了许多文献资料，在此对有关资料的作者表示诚挚的谢意，同时对作者所在单位领导的鼎力支持表示感谢.由于编者水平有限，时间仓促，错误与疏漏在所难免，欢迎各位从事职业教育的专家、教师批评指正.

目　录

第 1 章　集合、不等式与充要条件

本章要点

- 集合、不等式与充要条件
  - 集合
    - 集合与元素的概念
    - 集合与元素的关系
    - 逻辑关系
  - 不等式
    - 一元一次不等式组
    - 一元二次不等式组
    - 绝对值不等式
  - 逻辑用语
    - 命题
    - 充要条件

集合是现代数学中最基本的概念之一，不等式是表示数量之间的不等关系. 本章将介绍集合的基本概念、简单的运算、不等式，最后介绍简易逻辑关系的有关概念. 学习这一章后，你将掌握集合的思想与方法，对不等式有一个较深的认识，学会用不等式解决较简单的实际问题，能利用逻辑用语准确表达思维，更好地进行交流.

1.1　集合的概念

1.1.1　集合

1. 集合的概念

集合是整个数学大厦的基础，它在现代数学中作用比较大，先看下面的例子：

引例 1.1　（1）某高职学院 05 级数控专业班的全体学生；

（2）某机床厂的全部产品；

（3）平面上与两定点的距离相等的点的轨迹；

（4）所有的有理数；

（5）所有的四边形；

（6）方程 $x^2-6x+5=0$ 的所有实根.

从引例 1.1 容易发现，每一组对象的全体在一定的范围内，具有特定属性. 具有某种特定属性的对象组成的总体称为**集合**，简称**集**，组成集合的各个对象称为这个集合的**元素**.

例如，引例 1.1 中，第（1）组是由某高职学院 05 级数控专业班的全体学生组成的集合，班里的每个学生都是它的元素；第（2）组是由某机床厂的全部产品组成的集合，这个机床厂的每一件产品都是它的元素；第（3）组是由平面上与两定点的距离相等的全体点组成的集合，这个轨迹上的每一点都是它的元素；第（4）组是由所有的有理数组成的集合，每一个有理数都是它的元素；第（5）组是所有的四边形组成的集合，每一个四边形都是它的元素；第（6）组是由方程 $x^2-6x+5=0$ 的所有实根组成的集合，这个方程的每一个实根都是它的元素.

含有有限个元素的集合称为**有限集**，含有无限个元素的集合称为**无限集**，引例 1.1 中的（1）、（2）、（6）都是有限集，而（3）、（4）、（5）都是无限集.

从引例 1.1 可以看出集合中的元素具有三个特性：确定性，互异性，无序性.

2. 集合的表示法

在具体应用一个集合时，如何来表示一个集合呢？具体有以下两种方法：

（1）列举法是把集合的元素一一列举出来，写在“{ }”内，元素与元素之间用逗号隔开的方法. 这种方法一般用来表示元素数目很少或有限的集合. 例如，{1，2，3}，方程 $x^2-1=0$ 的根组成的集合可以表示为{-1，1}，但某些无限集也可使用，例如{1，2，3，…}.

（2）描述法把集合的元素所具有的特性描述出来，先取一个代表元素，再画一短竖线，后面把元素所具有的特定属性表示写在“{ }”内. 这种方法一般用来表示元素数目很多或无限的集合. 但元素较少的集合有时也可使用描述法表示. 例如，$\{x\mid x$ 为某市重点高中图书馆的藏书$\}$，方程 $x^2-1=0$ 的根组成的集合为 $\{x\mid x^2-1=0\}$.

不含有任何元素的集合叫做**空集**，记为 $\varnothing$，例如，不等式 $x^2+1=0$ 的实数解构成的集合就是空集；只含一个元素的集合称为**单元素集**，例如，方程 $2x+1=0$ 根的集合，就是单元素集 $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

1.1.2　元素与集合的关系

集合一般用大写字母表示，如 A，B，C，…，元素一般用小写字母表示，如 a，b，c，…，α，β，…. 如果一元素 a 属于集合 A，则记为“$a\in A$”，读作“a 属于集合 A”，否则记为“$a\notin A$”（或 $a\overline{\in} A$），读作“a 不属于集合 A”.

如果集合中的元素都是由数组成的，这样的集合称为**数集**. 常见的数集及表示符号如下：

R ——实数集；**Z** ——整数集；**Q**——有理数集；**N** ——自然数集；$\mathbf{N}^*$——正整数集（有时也用 $\mathbf{Z}^+$）.

【例 1.1】 用适当的方法表示下列集合：

（1）全体奇数；

（2）不超过 5 的自然数；

（3）平面直角坐标系中直线 $y=x$ 上所有的点；

（4）所有的四边形.

解 （1）用描述法表示为 $A=\{x\mid x=2n-1,n\in\mathbf{Z}\}$；

（2）用列举法表示为 $\{0,1,2,3,4,5\}$；

（3）用描述法表示为 $\{(x,y)\mid y=x,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$；

（4）用描述法表示为｛四边形｝.

1.1.3 集合之间的关系

引例 1.2 我国目前的授课主要采用班级授课方式，在班内一般都有男生和女生. 如果我们认为该班内的全体男生构成一个集合 A，而该班全体学生构成一个集合 B. 那么这两个集合 A 与 B 之间又什么关系呢？

1. 集合的包含关系

定义 1.1 设有两个集合 A 和 B，如果 A 中的每一元素都属于 B，则称 A 为 B 的**子集**，记作

$$A\subseteq B \quad （或 B\supseteq A）.$$

读作"A 包含于 B"或"B 包含 A". 它们的关系用图 1-1 表示.

为了直观形象地表示集合之间的关系，通常用圆等封闭图像表示集合，用图像内的点表示该集合的元素. 这样的图叫做韦恩图（Venn）.

当 A 不是 B 的子集时，记作 $A\not\subseteq B$，读作"A 不包含于 B"或"B 不包含 A".

因此引例 1.1 中，该班全体男生构成的集合 A 包含于该班全体学生构成的集合 B.

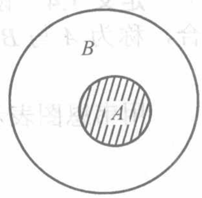


图 1-1

注意 （1）规定：空集是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing\subseteq A$；

（2）由于集合 A 的任何一个元素都属于集合 A，所以任何一个集合 A，都是它本身的子集，即 $A\subseteq A$.

定义 1.2 如果集合 A 是集合 B 的子集，且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A，则称集合 A 是集合 B 的**真子集**，记作

$$A\subsetneqq B\ （或 B\supsetneqq A）.$$

有时亦表示为 $A\subset B$（或 $B\supset A$）. 读作"集合 A 真包含于集合 B"或"集合 B 真包含集合 A".

由以上的定义，可以很明显的看出：**空集是任何非空集合的真子集**.

2. 集合的相等

定义 1.3　设有集合 A 和集合 B，如果 $A\subseteq B$，又 $B\subseteq A$，则称集合 A 和集合 B **相等**，记作 $A=B$.

【例 1.2】　写出集合 $A=\{1，2，3\}$的所有的子集，并指出哪些是真子集.

解　集合 A 的所有子集为：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1，2\}$，$\{2，3\}$，$\{1，3\}$，$\{1，2，3\}$，除集合$\{1，2，3\}$外，其余都是真子集.

【例 1.3】　指出集合 $A=\{x\mid x+1=0\}$与集合 $B=\{x\mid x^2-1=0\}$之间的包含关系.

解　因为 $A=\{x\mid x+1=0\}=\{-1\}$，$B=\{x\mid x^2-1=0\}=\{-1，1\}$，

所以

$$A\subsetneqq B.$$

注意　（1）空集$\varnothing$与单元素集$\{0\}$是两个不同的集合，且$\varnothing\subset\{0\}$；
（2）单元素集$\{a\}$与单元素 a 是两个不同的概念，且$a\in\{a\}$.

1.2　集合的运算

1.2.1　交集

引例 1.3　某职业技术学院召开运动会，小王报了三项{100 米，400 米，铁饼}，小李也报了三项{铅球，400 米，跳高}，则运动会上他俩可能会在哪个项目上相遇？怎样用集合表示这个项目呢？

对于由两个集合的共有元素所组成的集合可定义如下：

定义 1.4　设 A 与 B 是两个集合，由既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，读作“A 交 B”.用描述法表示为

$$A\cap B=\{x\mid x\in A,且x\in B\}.$$

用韦恩图表示各种情况下的 $A\cap B$，如图 1-2 中的阴影部分所示.

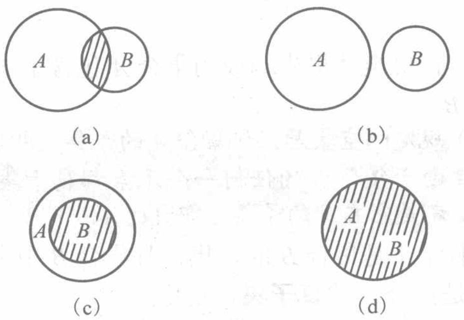


图 1-2

求两个集合的交集的运算叫做**交运算**.

根据交集的定义，显然有下面的性质：

（1）$A\cap B=B\cap A$；　（2）$A\cap A=A$；

（3）$A\cap\varnothing=\varnothing$；　（4）$A\cap B\subseteq A, A\cap B\subseteq B$.

【例 1.4】 A={100 米，400 米，铁饼}，B={铅球，400 米，跳高}，求 $A\cap B$.

解　$A\cap B$={100 米，400 米，铁饼}∩{铅球，400 米，跳高}={400 米}.

【例 1.5】 设 A={矩形}，B={菱形}，求 $A\cap B$.

解　$A\cap B$={矩形}∩{菱形}={正方形}.

【例 1.6】 设 $A=\{x\mid x>1\}$，$B=\{x\mid x<2\}$，求 $A\cap B$.

解

$$\begin{aligned}A\cap B&=\{x\mid x>1\}\cap\{x\mid x<2\}\\&=\{x\mid x>1\text{且}x<2\}\\&=\{x\mid 1<x<2\}.\end{aligned}$$

1.2.2　并集

引例 1.4　学生小张学习的课程为{数学，语文，英语，计算机}，学生小黄学习的课程为{电工基础，计算机，专业英语，电子工程制图}，则这两个学生总共学习的课程是哪些？怎样用集合表示这些课程呢？

对于由两个集合的元素合并在一起（相同的元素只取一个），所组成的集合定义如下：

定义 1.5　设 A 和 B 是两个集合，把属于 A 或属于 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，读作“A 并 B”，用描述法表示为 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或$x\in B\}$.

用韦恩图表示各种情况下的 $A\cup B$，如图 1-3（a）、（b）、（c）、（d）所示.

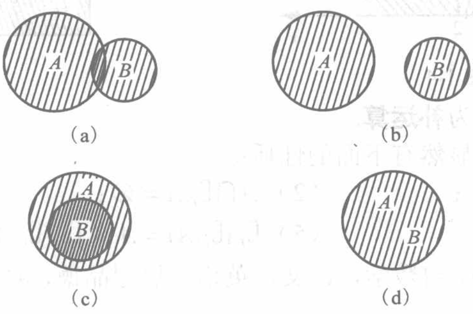


图 1-3

求并集的运算称为**并运算**.

根据并集的定义，显然有下面的性质：

（1）$A\cup B=B\cup A$；　（2）$A\cup A=A$；

（3）$A\cup\varnothing=A$；　（4）$A\cup B\supseteq A, A\cup B\supseteq B$.

【例 1.7】 集合 A={数学，语文，英语，计算机}，集合 B={电工基础，计算机，专业英语，电子工程制图}，求 $A\cup B$.

解　$A \cup B$={数学，语文，英语，计算机}∪{电工基础，计算机，专业英语，电子工程制图}
={数学，语文，英语，计算机，电工基础，专业英语，电子工程制图}.

【例 1.8】 设 $A=\{x \mid x>1\}$，$B=\{x \mid x<2\}$，求 $A \cup B$.

解
$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x>1\} \cup \{x \mid x<2\} \\ &= \{x \mid x>1 \text{或} x<2\} \\ &= \{x \mid 1<x<2\}. \end{aligned}$$

$A \cup B$ 用数轴表示，如图 1-4 所示.

【例 1.9】 设 $A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{2,3,4\}$，求 $A \cap (B \cup C)$.

解　$A \cap (B \cup C)=\{0,1,2,3\} \cap \{1,2,3,4\}=\{1,2,3\}$.

1.2.3　补集

引例 1.5　某班一名学生本学期学习的课程为{数学，语文，英语，思想品德，计算机}，在学期的期末考试中，他的{数学，英语}两门课程没有及格，试问他哪些课程通过了考试？

定义 1.6　设 U 是全集，集合 $A \subseteq U$，则 U 中不属于 A 的所有元素组成的集合称为 A 的**补集**，记作 $\complement_U A$，读作“A 补”．用描述法表示为 $\complement_U A=\{x \mid x \in U$，且$x \notin A\}$．用韦恩图表示 $\complement_U A$，如图 1-5 所示.

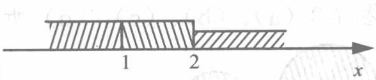


图 1-4

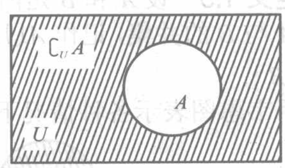


图 1-5

求补集的运算称为**补运算**.

据补集的定义，显然有下面的性质：

（1）$A \cup \complement_U A=U$；　（2）$A \cap \complement_U A=\varnothing$；　（3）$\complement_U U=\varnothing$；

（4）$\complement_U \varnothing=U$；　（5）$\complement_U(\complement_U A)=A$（$\complement_U(\complement_U A)$ 为 $C_U A$ 的补集）.

【例 1.10】 设 U={数学，语文，英语，思想品德，计算机}，A={数学，英语}，求 $\complement_U A$.

解　因为 A={数学，英语}，根据补集的定义知 $\complement_U A$={语文，思想品德，计算机}.

【例 1.11】 已知 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x \mid 2x+1<2\}$，求 $\complement_U A$.

解　因为
$$A=\{x \mid 2x+1<2\}=\{x \mid x<\frac{1}{2}\},$$
所以
$$\complement_U A=\left\{x \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

*1.2.4　有限集合元素个数的计算问题

有限集合元素个数的计算问题是常见的问题，设有限集合 M 的元素个数记作 $|M|$ 或 N，下面来研究它们的计算.

【例 1.12】 某职业技术学院召开田径运动会，甲班在田赛项目中获奖的共 16 人，在径赛项目中获奖的共 17 人，其中有 8 人在田赛、径赛中都获奖，试求甲班在田径运动会中至少有一项获奖的共多少人？

解　设集合 $A=\{田赛获奖者\}$，$B=\{径赛获奖者\}$，则

$A\cap B=\{田赛与径赛都获奖者\}$，

$A\cup B=\{田赛、径赛至少有一项获奖者\}$

$=\{田赛或径赛获奖者\}$.

因为　$|A|=16$，$|B|=17$，$|A\cap B|=8$.

如图 1-6 所示，$A\cap B$ 的 8 个元素既在集合 A 中，又在集合 B 中，当把集合 A 的 16 个元素与集合 B 的 17 个元素相加时，这 8 个元素重复加了一次，计算时应减去重复的 8 个元素，因此，甲班获奖的人数为 $|A\cup B|=16+17-8=25$.

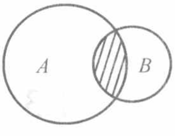


图 1-6

答：甲班共有 25 人获奖.

例 1.12 的结论可以推广到一般情形，得到以下定理：

定理 1.1　设 A,B,C 为有限集合，则

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|. \tag{1-1}$$

公式（1-1）通常叫做**容斥原理**（逐步淘汰原理），是计数的一种基本方法，这一原理在概率论和数论中常被用到.

【例 1.13】 某学校有 16 位教师，已知教数学课的教师有 9 位，教物理课的教师有 7 位，教化学课的教师有 5 位. 其中，有 6 位教师既教数学又教物理，有 5 位教师既教数学又教化学，有 3 位教师既教物理又教化学，还有 3 位教师兼教这 3 门课. 试问：

（1）教数、理、化以外的课的教师有几位？

（2）只教数、理、化中的一门课的教师有几位？

（3）正好教数、理、化中两门课的教师有几位？

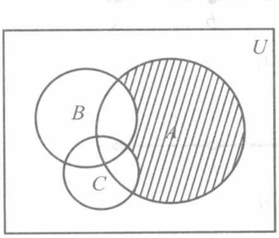


图 1-7

解　设 16 位教师的集合为 U，教数学课的教师属于集合 A，教物理课的教师属于集合 B，教化学课的教师属于集合 C，如图 1-7 所示，则有

$|A|=9$，$|B|=7$，$|C|=5$.

$$|A\cap B|=6\text{，}\ |A\cap C|=5\text{，}\ |B\cap C|=3\text{．}$$
$$|A\cap B\cap C|=3\text{．}$$

（1）不教数学、物理、化学课的教师数目为

$$\begin{aligned}|\complement_U A\cap\complement_U B\cap\complement_U C| &= 16-|A\cup B\cup C|\\ &=16-(|A|+|B|+|C|)+|A\cap B|+|B\cap C|+|A\cap C|-|A\cap B\cap C|\\ &=16-(9+7+5)+(6+5+3)-3=6\text{；}\end{aligned}$$

（2）只教数、理、化中的一门课的教师数目为

$$\begin{aligned}N(1)&=|A|+|B|+|C|-2(|A\cap B|+|B\cap C|+|A\cap C|)+3|A\cap B\cap C|\\ &=9+7+5-2(6+5+3)+3\times3=2\text{；}\end{aligned}$$

（3）正好教数、理、化中两门课的教师数目为

$$\begin{aligned}N(2)&=(|A\cap B|+|B\cap C|+|A\cap C|)-3|A\cap B\cap C|\\ &=(6+5+3)-3\times3=5\text{．}\end{aligned}$$

1.3　一元一次不等式组、一元二次不等式

本节不等式的学习包括一元一次不等式组与一元二次不等式，它们的解集可以用前面学过的集合表示. 为了表示简便起见，首先引入区间的概念.

1.3.1　区间

（1）数集 $\{x\,|\,a<x<b\}$，记作(a, b)，称为**开区间**；

（2）数集 $\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$，记作$[a, b]$，称为**闭区间**；

（3）数集 $\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$，记作 $[a, b]$，称为**左闭右开区间**；

（4）数集 $\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$，记作(a, b)，称为**左开右闭区间**；

在数轴上，这些区间可用一条以 a，b 为端点的线段来表示，区间闭的一端标以实心点，开的一端标以空心点. 两端点的距离称做区间的长. 区间长为有限时叫做**有限区间**，具体见图 1-8（a）、（b）、（c）、（d）. 这四种区间都是有限区间，当区间长为无限时，叫做**无限区间**.

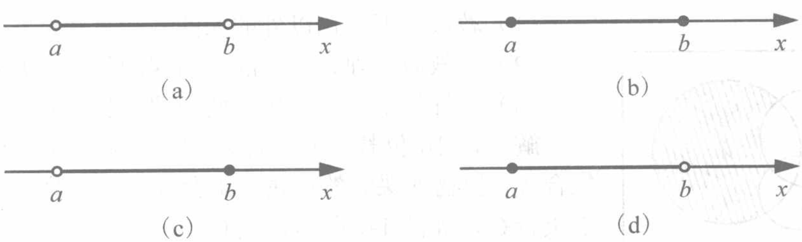


图 1-8

（5）实数集 **R** 记作$(-\infty,+\infty)$，其中“∞”读作“**无穷大**”，$+\infty(-\infty)$读作“**正（负）无穷大**”，它们都不是一个确定的数；

（6）实数集$\{x|x\geqslant a\},\{x|x>a\},\{x|x\leqslant b\},\{x|x<b\}$分别记作$[a,+\infty)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,b)$，它们在数轴上的表示如图 1-9（a）、（b）、（c）、（d）所示.

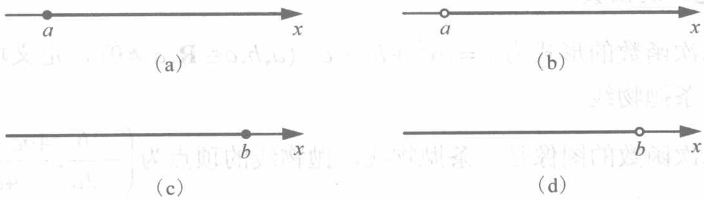


图 1-9

用区间表示数时，必须遵循左小右大的原则.

【例 1.14】 用区间表示下列变量的变化范围.

（1）$-3<x\leqslant 10$；　（2）$-3\leqslant x\leqslant 10$；

（3）$x\leqslant 10$；　（4）$x>-3$.

解　（1）不等式$-3<x\leqslant 10$表示为$(-3,10]$；

（2）不等式$-3\leqslant x\leqslant 10$表示为$[-3,10]$；

（3）不等式$x\leqslant 10$表示为$(-\infty,10]$；

（4）不等式$x>-3$表示为$(-3,+\infty)$.

1.3.2　一元一次不等式组及其解法

由多个一元一次不等式所组成的不等式组，称为**一元一次不等式组**. 这些一元一次不等式的解集的交集，称为这个**一元一次不等式组的解集**.

【例 1.15】 解下列一元一次不等式组，并用区间表示.

（1）$\begin{cases}4x-5<0\\2x+7>0\end{cases}$；　（2）$\begin{cases}2x-1\geqslant 0\\5x<3x+10\end{cases}$.

解　（1）解各不等式，得

$$\begin{cases}x<\dfrac{5}{4}\\x>-\dfrac{7}{2}\end{cases},$$

故原不等式的解为$-\dfrac{7}{2}<x<\dfrac{5}{4}$，即$\left(-\dfrac{7}{2},\dfrac{5}{4}\right)$；

（2）解各不等式，得

$$\begin{cases}x\geqslant\dfrac{1}{2}\\x<5\end{cases}.$$